

EDF R&D



FLUID DYNAMICS, POWER GENERATION AND ENVIRONMENT DEPARTMENT
SINGLE PHASE THERMAL-HYDRAULICS GROUP

6, QUAI WATIER
F-78401 CHATOU CEDEX

TEL: 33 1 30 87 75 40
FAX: 33 1 30 87 79 16

SEPTEMBER 2015

Code_Saturne documentation

***Code_Saturne* 4.0.3 Theory Guide**

contact: saturne-support@edf.fr



EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 1/ 400
---------	--	---

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 2/400
---------	--	--

ABSTRACT

Code_Saturne solves the Navier-Stokes equations for 2D, 2D axisymmetric, or 3D, steady or unsteady, laminar or turbulent, incompressible or dilatable flows, with or without heat transfer, and with possible scalar fluctuations. The code also includes a Lagrangian module, a semi-transparent radiation module, a gas combustion module, a coal combustion module, an electric module (Joule effect and electric arc) and a compressible module. In the present document, the "gas combustion", "coal combustion", "electric" and "compressible" capabilities of the code will be referred to as "particular physics". The code uses a finite volume discretization. A wide range of unstructured meshes, either hybrid (containing elements of different types) and/or non-conform, can be used.

This document constitutes the theory guide associated with the kernel of *Code_Saturne*. The system of equations considered consists of the Navier-Stokes equations, with turbulence and passive scalars. Firstly, the continuous equations for mass, momentum, turbulence and passive scalars are presented. Secondly, information related to the time scheme is supplied. Thirdly, the spatial discretisation is detailed: it is based on a co-located¹ finite volume scheme for unstructured meshes. Fourthly, the different source terms are described. Fifthly, boundary conditions are detailed. And finally, some algebrae such as how to solve a non-linear convection diffusion equation and some linear algebrae algorithms are presented.

In a seconde part, advanced modellings such as Combustion, electric and compressible flows are presented with their particular treatments.

To make the documentation suitable to the developers' needs, the appendix has been organized into sub-sections corresponding to the major steps of the algorithm and to some important subroutines of the code.

During the development process of the code, the documentation is naturally updated as and when required by the evolution of the source code itself. Suggestions for improvement are **more than** welcome. In particular, it will be necessary to deal with some transverse subjects (such as parallelism, periodicity) which were voluntarily left out of the first versions, to focus on the algorithms and their implementation.

To make it easier for the developers to keep the documentation up to date during the development process, the choice is made to not based this document on the implementation (except in the appendix) but to keep as much as possible a general formulation. For developers who are interested in the way theory is implemented, please refer to the **doxygen** documentation. A special effort will be made to link this theory guide to the **doxygen** documentation.

Code_Saturne is free software; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version. *Code_Saturne* is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

¹All the variables are located at the centres of the cells.

Table of contents

1	Introduction	7
1.1	Aims of the document	8
	I Generic solver capabilities	9
2	Governing equations	10
2.1	Continuous mass and momentum equations	11
2.2	Thermal equations	14
2.3	Equations for scalars	16
3	<i>Time stepping</i>	19
3.1	Time discretisation of a transport equation	20
3.2	Pressure-based velocity-pressure solver	22
4	<i>Space discretization</i>	24
4.1	Introduction	25
4.2	Convective term	27
4.3	Diffusive term	29
4.4	Gradient calculation	30
4.5	Advanced topic	38
5	Boundary conditions	39
5.1	Introduction	40
5.2	Standard user boundary conditions	41
5.3	Internal coding of the boundary conditions – Discretization	42
5.4	Wall boundary conditions	44
6	<i>Algebrae</i>	56
6.1	Iterative process	57
6.2	Linear algebrae	57

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 4/400
---------	--	--

II	Advanced modelling	58
7	Turbulence modelling	59
7.1	Eddy viscosity Models (<i>EVM</i>)	60
7.2	Differential Reynolds Stress Models (<i>DRSM</i>)	66
7.3	Large-Eddy Simulation (<i>LES</i>)	67
8	Compressible flows	70
8.1	Density-based solver	71
9	Combustion	72
9.1	Introduction	73
9.2	Thermodynamics	76
9.3	Gas combustion	77
9.4	Coal, Biomass, Heavy Oil combustion	86
10	Groundwater flows	102
10.1	Introduction	103
10.2	Groundwater flows	103
10.3	Soil-water relationships	104
10.4	Solving of the Richards equation	105
10.5	Groundwater Transferts	108
11	Magneto-Hydro Dynamics	112
12	Lagrangian particle tracking	113
13	Cavitation modelling	114
13.1	System equations	115
13.2	Vaporization source term	115
13.3	Time stepping	116
III	Appendices	117
IV	Base module	120
A-	bilsc2 routine	122
B-	clptur routine	134

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 5/ 400
---------	--	---

C- clptrg routine	150
D- clsyvt routine	160
E- codits routine	168
F- condli routine	174
G- covofi routine	184
H- gradmc routine	202
I- gradrc routine	208
J- inimas routine	218
K- itrmas/itrgrp routine	222
L- matrix routine	224
M- navstv routine	230
N- predvv routine	240
O- resopv routine	252
P- turbke routine	262
Q- turrij routine	268
R- viscfa routine	282
S- visort routine	284
T- visecv routine	288
U- vortex routine	292
V Compressible module	298
A- cfbl** routine	300
B- cfener routine	318

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 6/ 400
---------	--	---

C- cfmsvl routine	324
D- cfqdmv routine	330
E- cfxctl routine	334
 VI Electric Arcs	 354
A- elec** routine	356
 VII Mesh Handling	 374
B Mesh Algorithms	375
C Mesh Quality	392
 VIII Appendices	 395
C.1 Tensorial and index notations	396
C.2 Dffenrential operators and standard relationships	396
 IX References	 398

Nomenclature

Greek symbols

α_1	mass fraction of the continuous phase	
$\alpha_{2,i}$	mass fraction of the particle class i	
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	turbulent kinetic energy dissipation tensor	$m^2.s^{-3}$
ε	turbulent kinetic energy dissipation	$m^2.s^{-3}$
Γ	mass source term	
μ	dynamic viscosity	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
μ_l	dynamic molecular viscosity	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
Ω_i	the cell i	
$ \Omega_i $	volume of the cell i	m^3
$\underline{\underline{\Phi}}$	pressure-velocity correlation tensor	$kg.s^{-3}$
ρ	density field	$kg.m^{-3}$
ρ_m	bulk density	kg/m^3
$\underline{\underline{\sigma}}$	total stress tensor	Pa
$\underline{\underline{\tau}}$	viscous stress tensor, which is the deviatoric part of the stress tensor	Pa

Operators

$(\underline{\underline{\cdot}})^D$	deviatoric part of a tensor
:	double dot product
$(\underline{\underline{\cdot}})^S$	symmetric part of a tensor
$tr(\underline{\underline{\cdot}})$	trace of a tensor

Roman symbols

\mathcal{G}	turbulent kinetic energy buoyancy term	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
G_ε	turbulent buoyancy term for dissipation	
$\underline{\underline{\mathcal{G}}}$	turbulent buoyancy production tensor	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
C_{ε_1}	constant of the standard $k - \varepsilon$ model	
C_{ε_2}	constant of the standard $k - \varepsilon$ model	

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 8/400
---------	--	---

C_{ε_3}	constant of the standard $k - \varepsilon$ model depending on the buoyancy term	
C_μ	eddy viscosity constant	
f	interior or boundary cell face	
\mathcal{F}_i	group of all faces of the cell i	
F	center of the face f_{ij} between cells i and j	
H_m	bulk enthalpy	J/kg
I	centre of Ω_i	
k	turbulent kinetic energy	$m^2.s^{-2}$
$\underline{\underline{K}}$	tensor of the velocity head loss	$kg.m^{-3}.s^{-1}$
P	pressure field	Pa
$P_{f_{ij}}$	average of the pressure field on the interface between the neighbouring cells i and j	Pa
P_m	pressure of the bulk	Pa
\mathcal{P}	turbulent kinetic energy production	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$\underline{\underline{\mathcal{P}}}$	turbulent production tensor	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
R_{ij}	componant ij of the Reynolds stress tensor	$m^2.s^{-2}$
\underline{r}	velocity density correlation vector $\overline{\rho' \underline{u}'}$, generally modelled by a Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH): $\frac{3}{2} \frac{C_\mu}{\sigma_t} \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\nabla} \rho$	
$\underline{\underline{R}}$	Reynolds stress tensor	$m^2.s^{-2}$
\underline{S}_{f_i}	outward normal vector of the face f of the cell i , normalized by the surface $ S $	
$\underline{\underline{S}}$	strain rate tensor	s^{-1}
ST_ε	additional turbulent dissipation source term	$kg.m^{-1}.s^{-4}$
ST_k	additional turbulent kinetic energy source term	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$\underline{\underline{ST}}_{\underline{u}}$	explicit additional momentum source terms	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
t	time [s]	
\underline{u}_m	bulk velocity	m/s
\underline{u}	velocity field	$m.s^{-1}$
x_1	mass fraction of continuous phase	
x_2	mass fraction of the particle phase	
$x_{2,i}$	mass fraction of the particle class i	

Chapter 1

Introduction

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 10/ 400
---------	--	--

Disclaimer

Code_Saturne is free software; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

Code_Saturne is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.¹

1.1 Aims of the document

This chapter constitutes an introduction to the theory guide associated with the kernel of *Code_Saturne*. The system of equations considered consists of the Navier-Stokes equations, with turbulence and passive scalars. Firstly, the continuous equations for mass, momentum, turbulence and passive scalars are presented. Secondly, information related to the time scheme is supplied. Thirdly, the spatial discretisation is detailed: it is based on a co-located² finite volume scheme for unstructured meshes. Fourthly, the different source terms are described. Fifthly, boundary conditions are detailed. And finally, some algebrae such as how to solve a non-linear convection diffusion equation and some linear algebrae algorithms are presented.

In a second part, advanced modellings are presented with their particular treatments.

To make the documentation suitable to the developers' needs, the appendix has been organized into sub-sections corresponding to the major steps of the algorithm and to some important subroutines of the code.

During the development process of the code, the documentation is naturally updated as and when required by the evolution of the source code itself. Suggestions for improvement are **more than** welcome. In particular, it will be necessary to deal with some transverse subjects (such as parallelism, periodicity) which were voluntarily left out of the first versions, to focus on the algorithms and their implementation.

To make it easier for the developers to keep the documentation up to date during the development process, the choice is made not to based this document on the implementation (except in the appendix) but to keep as much as possible a general formulation. For developers who are interested in the way theory is implemented, please refer to the **doxygen** documentation (see [local html documentation](#)). A special effort will be made to link this theory guide to the **doxygen** documentation.

¹You should have received a copy of the GNU General Public License along with *Code_Saturne*; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

²All the variables are located at the centres of the cells.

Part I

Generic solver capabilities

Chapter 2

Governing equations

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 13/400
---------	--	---

2.1 Continuous mass and momentum equations

This section presents the continuous equations. It is no substitute for the specific sub-sections of this documentation: the purpose here is mainly to provide an overview before more detailed reading.

Balance methodology: The continuous equations can be obtained applying budget on the mass, momentum, or again on mass of a scalar. A useful theorem, the so-called Leibniz theorem, states that the variation of the integral of a given field A over a moving domain Ω reads:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} A d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} A \underline{v} \cdot d\underline{S}, \quad (\text{I.2.1})$$

where \underline{v} is the velocity of the boundary of Ω and $\partial\Omega$ is the boundary of Ω with a outward surface element $d\underline{S}$.

2.1.1 Laminar flows

Mass equation: Let now apply (I.2.1) to a fluid volume¹, so $\partial\Omega$ moves with the fluid velocity denoted by \underline{u} , and to the field $A = \rho$, where ρ denotes the density:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho d\Omega \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}, \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) \right) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{I.2.2})$$

the second line is obtained using Green relation. In (I.2.2), the term $\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho d\Omega \right)$ is zero because² it is the variation of the mass of a fluid volume. This equality is true for any fluid volume, so if the density field and the velocity field are sufficiently regular then the **continuity** equation holds:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0. \quad (\text{I.2.3})$$

Equation (I.2.3) could be slightly generalized to cases where a mass source term Γ exists:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma, \quad (\text{I.2.4})$$

but Γ is generally taken to 0.

Momentum equation: The same procedure on the momentum gives:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \underline{u} d\Omega \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes (\rho \underline{u}) \cdot d\underline{S}, \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{I.2.5})$$

once again, the Green relation has been used to obtain the second line. One then invokes Newton's second law stating that the variation of momentum is equal to the external forces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \underline{u} d\Omega \right) &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underline{\sigma} \cdot d\underline{S}}_{\text{boundary force}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{g} d\Omega}_{\text{volume force}}, \\ &= \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{g} d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{I.2.6})$$

¹A fluid volume consists of fluid particles, that is to say it moves with the fluid velocity.

²it can be non-zero in some rare cases when fluid is created by a chemical reaction for instance.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 14/400
---------	--	--

where $\underline{\underline{\sigma}}$ is the Cauchy stress tensor³, \underline{g} is the gravity field. Other source of momentum can be added in particular case, such as head losses or Coriolis forces for instance.

Finally, bringing (I.2.5) and (I.2.6) all together the **momentum** equation is obtained:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \underline{\text{div}} (\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) = \underline{\text{div}} (\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{g} + \underline{ST}_{\underline{u}} - \underline{K} \underline{u} + \Gamma \underline{u}^{in}, \quad (\text{I.2.7})$$

where $\underline{ST}_{\underline{u}}$ and $\underline{K} \underline{u}$ stand for explicit and implicit additional momentum Source Terms which may be prescribed by the user (head loss, $\Gamma \underline{u}^{in}$ contribution associated with a user-prescribed mass source term...). Note that \underline{K} is a symmetric positive tensor, by definition.

In order to make the set of Equations (I.2.4) and (I.2.7) closed, the Newtonian state law linking the deviatoric part of the stress tensor $\underline{\underline{\sigma}}$ to the velocity field (more precisely to the rate of strain tensor \underline{S}) is introduced:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{S} = 2\mu \underline{S} - \frac{2}{3} \mu \text{tr}(\underline{S}) \underline{1}, \quad (\text{I.2.8})$$

where $\mu = \mu_l$ is called the dynamic molecular viscosity, whereas $\underline{\underline{\tau}}$ is the viscous stress tensor and the pressure field are defined as:

$$\begin{cases} P &= -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}), \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\tau}} - P \underline{1}. \end{cases} \quad (\text{I.2.9})$$

and \underline{S} , the strain rate tensor, as:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T). \quad (\text{I.2.10})$$

Note that a fluid for which (I.2.8) holds is called a Newtonian fluid, it is generally the case for water, air, but not the case of a paint because the stresses do not depend linearly on the strain rate.

Navier-Stokes equations: Injecting Equation (I.2.8) into the momentum Equation (I.2.7) and combining it with the continuity Equation (I.2.4) give the Navier-Stokes equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) &= \Gamma, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \underline{\text{div}} (\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) &= -\underline{\nabla} P + \underline{\text{div}} \left(\mu \left[\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T - \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\nabla} \underline{u}) \underline{Id} \right] \right) + \rho \underline{g} + \underline{ST}_{\underline{u}} - \underline{K} \underline{u} + \Gamma \underline{u}^{in}, \end{cases} \quad (\text{I.2.11})$$

The left hand side of the momentum part of Equation (I.2.11) can be rewritten using the continuity Equation (I.2.4):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \underline{\text{div}} (\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} \underline{u}}_{[\Gamma - \underline{\text{div}}(\rho \underline{u})] \underline{u}} + \underbrace{\underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u})}_{\text{convection}}. \quad (\text{I.2.12})$$

Then the Navier-Stokes equations read in non-conservative form:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) &= \Gamma, \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u}) &= -\underline{\nabla} P + \underline{\text{div}} \left(\mu \left[\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T - \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\nabla} \underline{u}) \underline{Id} \right] \right) + \rho \underline{g} + \underline{ST}_{\underline{u}} - \underline{K} \underline{u} + \Gamma (\underline{u}^{in} - \underline{u}), \end{cases} \quad (\text{I.2.13})$$

This formulation will be used in the following. Note that the convective term is nothing else but $\underline{\nabla} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u}) = \underline{\text{div}} (\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) - \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) \underline{u}$, this relationship should be conserved by the space-discretized scheme (see Chapter 4).

³ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{S}$ represents the forces exerted on the surface element $d\underline{S}$ by the exterior of the domain Ω .

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 15/400
---------	--	---

2.1.2 Turbulent flows with a Reynolds-Averaged Navier-Stokes approach (*RANS*):

When the flow becomes turbulent, the *RANS* approach is to consider the velocity field \underline{u} as stochastic and then split into a mean field denoted by $\underline{\bar{u}}$ and a fluctuating field \underline{u}' :

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} + \underline{u}'. \quad (\text{I.2.14})$$

The Reynolds average operator $\overline{(\cdot)}$ is applied to Navier-Stokes Equation (I.2.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\bar{u}}) = \Gamma, \\ \rho \frac{\partial \underline{\bar{u}}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{\bar{u}} \cdot (\rho \underline{\bar{u}}) = -\underline{\nabla} \bar{P} + \text{div} \left(\mu \left[\underline{\nabla} \underline{\bar{u}} + \underline{\nabla} \underline{\bar{u}}^T - \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\nabla} \underline{\bar{u}}) \underline{Id} \right] \right) + \rho \underline{g} - \text{div}(\rho \underline{R}) \\ \quad + \underline{ST}_u - \underline{K} \underline{\bar{u}} + \Gamma (\underline{\bar{u}}^{in} - \underline{\bar{u}}), \end{array} \right. \quad (\text{I.2.15})$$

Only the mean fields $\underline{\bar{u}}$ and \bar{P} are computed. An additional term \underline{R} appears in the Reynolds Equations (I.2.15) which is by definition the covariance tensor of the fluctuating velocity field and called the Reynolds stress tensor:

$$\underline{R} \equiv \overline{\underline{u}' \otimes \underline{u}'}. \quad (\text{I.2.16})$$

the latter requires a closure modelling which depends the turbulence model adopted. Two major types of modelling exist:

- i/ Eddy Viscosity Models (*EVM*) which assume that the Reynolds stress tensor is aligned with the strain rate tensor of the mean flow ($\underline{\bar{S}} \equiv \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\bar{u}} + \underline{\nabla} \underline{\bar{u}}^T)$):

$$\rho \underline{R} = \frac{2}{3} \rho k \underline{1} - 2\mu_T \underline{\bar{S}}^D, \quad (\text{I.2.17})$$

where the turbulent kinetic energy k is defined by:

$$k \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{R}), \quad (\text{I.2.18})$$

and μ_T is called the dynamic turbulent viscosity and must be modelled. Note that the viscous part $\mu_T \underline{\bar{S}}^D$ of the Reynolds stresses is simply added to the viscous part of the stress tensor $\mu_l \underline{\bar{S}}^D$ so that the momentum equation for the mean velocity is similar to the one of a laminar flow with a variable viscosity $\mu = \mu_l + \mu_T$. Five *EVM* are available in *Code_Saturne*: $k - \varepsilon$, $k - \varepsilon$ with Linear Production (*LP*), $k - \omega$ *SST*, Spalart Allmaras, and an Elliptic Blending model (*EB-EVM*) *Bl - v² - k* ([BL12]).

- ii/ Differential Reynolds Stress Models (*DRSM*) which solve a transport equation on the components of the Reynolds stress tensor \underline{R} during the simulation, and are readily available for the momentum equation (I.2.15). Three *DRSM* models are available in *Code_Saturne*: $R_{ij} - \varepsilon$ proposed by Launder Reece and Rodi (*LRR*) in [LRR75], $R_{ij} - \varepsilon$ proposed by Speziale, Sarkar and Gatski (*SSG*) in [SSG91] and an Elliptic Blending version *EB-RSM* (see [MH02]).

2.1.3 Large Eddy Simulation (*LES*):

The *LES* approach consists in spatially filtering the \underline{u} field using an operator denoted by $\widetilde{(\cdot)}$. Applying the latter filter to the Navier-Stokes Equations (I.2.22) gives:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\widetilde{u}}) = \Gamma, \\ \rho \frac{\partial \underline{\widetilde{u}}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{\widetilde{u}} \cdot (\rho \underline{\widetilde{u}}) = -\underline{\nabla} \widetilde{P} + \text{div} \left(2\mu \underline{\widetilde{S}}^D \right) + \rho \underline{g} - \text{div} \left(\rho \underline{\widetilde{u}' \otimes \underline{u}'} \right) + \underline{ST}_u - \underline{K} \underline{\widetilde{u}} + \Gamma (\underline{\widetilde{u}}^{in} - \underline{\widetilde{u}}), \end{array} \right. \quad (\text{I.2.19})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 16/400
---------	--	---

where \underline{u}' are non-filtered fluctuations. An eddy viscosity hypothesis is made on the additional resulting tensor:

$$\widetilde{\underline{u}' \otimes \underline{u}'} = \frac{2}{3} k \underline{\underline{Id}} - 2\mu_T \underline{\underline{S}}^D, \quad (\text{I.2.20})$$

where the above turbulent viscosity μ_T now accounts only for sub-grid effects.

2.1.4 Formulation for laminar, RANS or LES calculation:

For the sake of simplicity, in all cases, the computed velocity field will be denoted by \underline{u} even if it is about *RANS* velocity field $\underline{\bar{u}}$ or *LES* velocity field $\underline{\tilde{u}}$.

Moreover, a manipulation on the right hand side of the momentum is performed to change the meaning of the pressure field. let P^* be the dynamic pressure field defined by:

$$P^* = P - \rho_0 \underline{g} \cdot \underline{x} + \frac{2}{3} \rho k, \quad (\text{I.2.21})$$

where ρ_0 is a reference constant density field. Then the continuity and the momentum equations read:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma, \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u}) = -\underline{\underline{\nabla}} P^* + \underline{\underline{\text{div}}} (2(\mu_l + \mu_T) \underline{\underline{S}}^D) - \underline{\underline{\text{div}}} (\rho \underline{\underline{R}} - 2\mu_T \underline{\underline{S}}^D) + (\rho - \rho_0) \underline{g} \\ \quad + \underline{ST}_{\underline{u}} - \underline{K} \underline{u} + \Gamma (\underline{u}^{in} - \underline{u}). \end{array} \right. \quad (\text{I.2.22})$$

2.2 Thermal equations

2.2.1 Energy equation

The energy equation reads:

$$\rho \frac{de}{dt} = -\text{div}(\underline{q}'') + q''' - P \text{div}(\underline{u}) + \mu S^2, \quad (\text{I.2.23})$$

where e is the specific internal energy, \underline{q}'' is the heat flux vector, q''' is the dissipation rate or rate of internal heat generation and S^2 is scalar strain rate defined by

$$S^2 = 2 \underline{\underline{S}}^D : \underline{\underline{S}}^D. \quad (\text{I.2.24})$$

The Fourier law of heat conduction gives:

$$\underline{q}'' = -\lambda \underline{\underline{\nabla}} T, \quad (\text{I.2.25})$$

where λ is the thermal conductivity and T is the temperature field.

2.2.2 Enthalpy equation

Thermodynamics definition of enthalpy gives:

$$h \equiv e + \frac{1}{\rho} P. \quad (\text{I.2.26})$$

Applying the Lagrangian derivative $\frac{d}{dt}$ to h :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (\text{I.2.27})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 17/400
---------	--	--

then

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dh}{dt} &= \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + q''' - P \operatorname{div} \underline{u} + \mu S^2 + \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \\
&= \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + q''' + \mu S^2 + \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} \right)}_{=0}, \\
&= \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + q''' + \mu S^2 + \frac{dP}{dt}.
\end{aligned} \tag{I.2.28}$$

To express (I.2.28) only in terms of h and not T , some thermodynamics relationships can be used. For a pure substance, Maxwell's relations give:

$$dh = C_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dP, \tag{I.2.29}$$

where β is the thermal expansion coefficient defined by:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P. \tag{I.2.30}$$

The equation (I.2.28) then becomes:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \operatorname{div} \left(\frac{\lambda}{C_p} \left(\nabla h - \frac{1 - \beta T}{\rho} \nabla P \right) \right) + q''' + \mu S^2 + \frac{dP}{dt}. \tag{I.2.31}$$

Remark 2.1 Note that for incompressible flows, βT is negligible compared to 1. Moreover, for ideal gas, $\beta = 1/T$ so the following relationship holds:

$$dh = C_p dT. \tag{I.2.32}$$

2.2.3 Temperature equation

In order to rearrange the enthalpy Equation (I.2.28) in terms of temperature (I.2.29) is used:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial P} \right|_T = - \left. \frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right|_P = \frac{1}{\rho^2} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P = -\frac{\beta}{\rho}, \tag{I.2.33}$$

and also:

$$\frac{\lambda}{C_p} \left(\nabla h - \frac{1 - \beta T}{\rho} \nabla P \right) = \lambda \nabla T, \tag{I.2.34}$$

and Equation (I.2.31) becomes:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + \beta T \frac{dP}{dt} + q''' + \mu S^2. \tag{I.2.35}$$

The Eq. (I.2.35) can be reduced using some hypothesis, for example:

- If the fluid is an ideal gas, $\beta = \frac{1}{T}$ and it becomes:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + \frac{dP}{dt} + q''' + \mu S^2. \tag{I.2.36}$$

- If the fluid is incompressible, $\beta = 0$, $q''' = 0$ and we generally neglect μS^2 so that it becomes:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \nabla T). \tag{I.2.37}$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 18/ 400
---------	--	--

2.3 Equations for scalars

Two types of transport equations are considered:

i/ convection of a scalar with additional source terms:

$$\frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div}(a \rho \underline{u})}_{\text{advection}} - \underbrace{\operatorname{div}(K \nabla a)}_{\text{diffusion}} = ST_a + \Gamma a^{in}, \quad (\text{I.2.38})$$

ii/ convection of the variance $\widetilde{a''^2}$ with additional source terms:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \widetilde{a''^2})}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div}(\widetilde{a''^2} \rho \underline{u})}_{\text{advection}} - \underbrace{\operatorname{div}(K \nabla \widetilde{a''^2})}_{\text{diffusion}} = & ST_{\widetilde{a''^2}} + \Gamma \widetilde{a''^2}^{in} \\ & + \underbrace{2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla \widetilde{a})^2 - \frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2}}_{\text{production and dissipation}}, \end{aligned} \quad (\text{I.2.39})$$

The two previous equations can be unified formally as:

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u} Y) - \operatorname{div}(K \nabla Y) = ST_Y + \Gamma Y^{in} + \mathcal{P}_Y - \epsilon_Y \quad (\text{I.2.40})$$

with:

$$\mathcal{P}_Y - \epsilon_Y = \begin{cases} 0 & \text{for } Y = a, \\ 2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla \widetilde{a})^2 - \frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2} & \text{for } Y = \widetilde{a''^2}. \end{cases} \quad (\text{I.2.41})$$

ST_Y represents the additional source terms that may be prescribed by the user.

2.3.1 Equations for scalars with a drift

The Diffusion-Inertia model is available in *Code_Saturne*; it aims at modelling aerosol transport, and was originally proposed by Zaichik *et al.* [ZSSA04]. Details on the theoretical work and implementation of the model in the framework of *Code_Saturne* can be found in technical note H-I81-2013-02277-EN.

Aerosol transport numerical model

The so-called diffusion-inertia model has been first proposed by Zaichik *et al.* [ZSSA04]. It is based on the principle that the main characteristics of the aerosol transport in turbulent flows can be described by solving a single transport equation on the particle mass concentration, which reads (using the notations of P. N  rison [Ner09]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left[U_{f,i} + \tau_p g_i - \tau_p \left(\frac{\partial U_{f,i}}{\partial t} + U_{f,k} \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_b \delta_{ik} + \frac{\Omega}{1 + \Omega} D_{ik}^T \right) \right] C \right) = & (\text{I.2.42}) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left((D_b \delta_{ik} + D_{p,ik}^T) \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

In this equation:

- C represents the particle mass concentration;

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 19/400
---------	--	---

- $U_{f,i}$ is the i component of the fluid velocity;
- τ_p is the particle relaxation time;
- g_i is the i component of the gravity acceleration;
- D_b and D_{ij}^T are respectively the coefficient of Brownian diffusion and the tensor of turbulent diffusivity.

A physical interpretation of the different terms involved in the transport equation of the aerosols follows:

- $\tau_p g_i$ represents the transport due to gravity;
- $-\tau_p \left(\frac{\partial U_{f,i}}{\partial t} + U_{f,k} \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_k} \right)$ represents the deviation of the aerosol trajectory with respect to the fluid (zero-inertia) particle due to particle inertia (which may be loosely referred to as “centrifugal” effect);
- $\frac{\partial}{\partial x_k} D_b \delta_{ik}$ is the transport of particles due to the gradient of temperature (the so-called thermophoresis);
- $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Omega}{\Omega + 1} D_{ik}^T \right)$ is the transport of particles due to the gradient of kinetic energy (the so-called “turbophoresis”, or “turbophoretic effect”).

If the particulate Reynolds number is sufficiently small, the particle relaxation time τ_p can be defined as

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_f} \quad (\text{I.2.43})$$

with ρ_p the particle density, μ_f the fluid dynamic viscosity and d_p the particle diameter. It should be underlined that to take advantage of the classical transport equation of the species in *Code_Saturne*, Eq. (I.2.42) is reformulated by considering the variable $Y \equiv C/\rho_f$ (with ρ_f considered as a good enough approximation of the density of the particle-laden flow) and actually solving an equation on this variable. With a vectorial notation, this equation reads⁴:

$$\rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \text{div}([\rho \underline{u}_Y] Y) - \text{div}(\rho \underline{u}_Y) Y + \text{div}(\rho \underline{u}_Y - \rho \underline{u}) Y = \text{div} \left(\left[\rho D_b \underline{1} + \rho \underline{\underline{D}}_p^T \right] \underline{\nabla} Y \right) \quad (\text{I.2.44})$$

where the additional convective flux is:

$$(\rho \underline{u}_Y - \rho \underline{u}) = \tau_p \rho \underline{g} - \tau_p \rho \frac{d\underline{u}}{dt} - \underline{\underline{\text{div}}} \left(\rho D_b \underline{1} + \rho \frac{\Omega}{1 + \Omega} \underline{\underline{D}}_p^t \right) \quad (\text{I.2.45})$$

Brownian diffusion

Let us detail Eq. (I.2.42) in case all terms are canceled except the diffusion one:

$$\rho \frac{\partial Y}{\partial t} = \text{div} \left(\left[\rho D_b \underline{1} + \rho \underline{\underline{D}}_p^t \right] \underline{\nabla} Y \right) \quad (\text{I.2.46})$$

The coefficient D_b is theoretically given by the Stokes-Einstein relation:

$$D_b = \frac{k_B T}{6\pi\mu_f \frac{d_p}{2}} \quad (\text{I.2.47})$$

with k_B the Boltzmann constant equal to $1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

⁴This equation is not exact. In the second member, density has been extracted from the gradient operator, and in the additional convective flux density was integrated inside the divergent operator, for compatibility reason with *Code_Saturne* construction. These approximations do not have major impact.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 20/400
---------	--	---

Sedimentation terms

Let us now focus on the term simulating transport by the gravity acceleration, in case all terms that model particle transport and diffusion are set to zero except gravity and the fluid velocity, the scalar speed \underline{u}_Y reduces to:

$$\rho \underline{u}_Y = \rho \underline{u} + \tau_p \rho \underline{g} \quad (\text{I.2.48})$$

Turbophoretic transport

Cancelling all but turbophoresis transport terms (no gravity, no turbulent diffusion, etc.), the scalar associated velocity \underline{u}_Y becomes:

$$\rho \underline{u}_Y = \rho \underline{u} - \text{div} \left(\rho \frac{\Omega}{1 + \Omega} \underline{\underline{D}}_p^T \right) \quad (\text{I.2.49})$$

Turbophoresis should move the particles from the zones with higher turbulent kinetic energy to the lower one. The fluid turbulent diffusion tensor can be expressed as:

$$\underline{\underline{D}}_p^T = \tau_T \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle \quad (\text{I.2.50})$$

With a Eddy Viscosity turbulence Model (EVM), one has

$$\langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle = \frac{2}{3} k \underline{\underline{1}} - \nu_T \underline{\underline{S}} \quad (\text{I.2.51})$$

Also, for the $k - \varepsilon$ model:

$$\tau_T = \frac{3}{2} \frac{C_\mu}{\sigma_T} \frac{k}{\varepsilon} \quad (\text{I.2.52})$$

where $C_\mu = 0.09$ is a constant and σ_T the turbulent Schmidt, and Ω is defined by:

$$\Omega = \frac{\tau_p}{\tau_{f\ p}^T} \quad (\text{I.2.53})$$

with $\tau_{f\ p}^T = \tau_T = \frac{3}{2} \frac{C_\mu}{\sigma} \frac{k}{\varepsilon}$.

Chapter 3

Time stepping

3.1 Time discretisation of a transport equation

At first, the physical properties of the flow are computed (density, viscosity, specific heat *etc.*): indeed, they may depend upon the variables (such as the temperature for example).

The time scheme is a θ -scheme:

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{for an implicit first order Euler scheme,} \\ \theta = \frac{1}{2} & \text{for second order Crank-Nicolson scheme.} \end{cases} \quad (\text{I.3.1})$$

For the second order scheme, the time step is assumed to be constant.

If required, the equations for the turbulent variables are solved (turbulent kinetic energy and dissipation or Reynolds stresses and dissipation), using a θ -scheme again. For the $k - \varepsilon$ model, an additional step is carried out to couple the source terms. For the Reynolds stress model, the variables (turbulent stresses and dissipation) are solved sequentially, without coupling.

Next, the equations for the *scalars* (enthalpy, temperature, tracers, concentrations, mass fractions...) are solved, also with a θ -scheme.

Finally, all the variables are updated and another time step may start.

The general equation for advection (valid for the velocity components, the turbulent variables and the scalars) is re-written as follows in a condensed form; the mass equation ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma$ see Equation (I.2.4)) has been used to split the time derivative:

$$\rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \underline{\nabla} Y \cdot (\rho \underline{u}) - \text{div}(\rho \underline{u}) Y - \text{div}(K \underline{\nabla} Y) = S_i(\Phi, \varphi) Y + S_e(\Phi, \varphi) + \Gamma(Y - Y^{in}). \quad (\text{I.3.2})$$

In Equation I.3.2, Φ represents the physical properties such as (ρ, K, μ_t, \dots) , φ represents the variables of the problem such as $(\underline{u}, k, \epsilon, \dots)$, $S_i(\Phi, \varphi) Y$ is the linear part of the source terms and $S_e(\Phi, \varphi)$ includes all other source terms.

Therefore, four different time steppings are used, they all define the time at which the quantities are evaluated:

- i/ θ is the time stepping applied to the variable $Y^{n+\theta} \equiv \theta Y^{n+1} + (1 - \theta) Y^n$,
- ii/ θ_Φ is the time stepping applied to the physical properties,
- iii/ θ_F is the time stepping applied to the mass flux,
- iv/ θ_S is the time stepping applied to the source terms,

If $\theta = 1/2$, or if an extrapolation is used, the time step Δt is constant in time and uniform in space.

3.1.1 Physical properties Φ

The physical properties of the flow (density, viscosity, specific heat...) are:

- either explicit, defined at the time step n .
- or extrapolated at $n + \theta_\Phi$ using the Adam-Bashforth time scheme (in this case, the time step is assumed to be constant).

Under a more general form, this reads:

$$\Phi^{n+\theta_\Phi} \equiv (1 + \theta_\Phi) \Phi^n - \theta_\Phi \Phi^{n-1}, \quad (\text{I.3.3})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 23/400
---------	--	---

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_\Phi = 0 & \text{standard explicit formulation,} \\ \theta_\Phi = 1/2 & \text{second order extrapolation at } n + 1/2, \\ \theta_\Phi = 1 & \text{first order extrapolation at } n + 1. \end{array} \right. \quad (\text{I.3.4})$$

3.1.2 Mass flux

For the mass flux, three time schemes are available. The mass flux may be:

- explicit, taken at time step n for the momentum equations and updated with its value at time step $n + 1$ for the equations for turbulence and scalars (standard scheme).
- explicit, taken at time step n for the momentum equations and also for the equations for turbulence and scalars.
- taken at $n + \theta_F$ (second order if $\theta_F = 1/2$). To solve the momentum equations, $(\rho \underline{u})^{n-2+\theta_F}$ and $(\rho \underline{u})^{n-1+\theta_F}$ are known. Hence, the value at $n + \theta_F$ is obtained as a result of the following extrapolation:

$$(\rho \underline{u})^{n+\theta_F} = 2(\rho \underline{u})^{n-1+\theta_F} - (\rho \underline{u})^{n-2+\theta_F}. \quad (\text{I.3.5})$$

At the end of this phase (after the pressure correction step), $(\rho \underline{u})^{n+1}$ is known and the following interpolation is used to determine the mass flux at $n + \theta_F$ that will be adopted for the equations for turbulence and scalars:

$$(\rho \underline{u})^{n+\theta_F} = \frac{1}{2 - \theta_F} (\rho \underline{u})^{n+1} + \frac{1 - \theta_F}{2 - \theta_F} (\rho \underline{u})^{n-1+\theta_F}. \quad (\text{I.3.6})$$

3.1.3 Source terms

As for the physical properties, the **explicit** source terms are:

- explicit:

$$[S_e(\Phi, \varphi)]^n = S_e(\Phi^{n+\theta_\Phi}, \varphi^n), \quad (\text{I.3.7})$$

- extrapolated at $n + \theta_S$ using the Adams-Bashforth scheme:

$$[S_e(\Phi, \varphi)]^{n+\theta_S} = (1 + \theta_S) S_e(\Phi^n, \varphi^n) - \theta_S S_e(\Phi^{n-1}, \varphi^{n-1}). \quad (\text{I.3.8})$$

By default, to be consistent and preserve the order of convergence in time, the implicit source terms are discretized with the same scheme as that is used for convection-diffusion of the unknown considered, *i.e.* taken at $n + \theta$:

$$[S_i(\Phi, \varphi) Y]^{n+\theta} = S_i(\Phi^{n+\theta_\Phi}, \varphi^n) [\theta Y^{n+1} + (1 - \theta) Y^n]. \quad (\text{I.3.9})$$

Remark 3.1 The *implicit* source terms taken also at $n + \theta$ for $\theta_S \neq 0$, while for $\theta_S = 0$, the implicit source terms are taken at $n + 1$, this to enhance stability.

3.1.4 General time discretized form

For the sake of clarity, it is assumed hereafter that, unless otherwise explicitly stated, the mass flux is taken at $n + \theta_F$ and the physical properties are taken at $n + \theta_\Phi$, with θ_F and θ_Φ dependent upon

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 24/400
---------	--	--

the specific schemes selected for the mass flux and the physical properties respectively and all θ s are denoted by θ .

Under a general form, the discrete counterpart of Equation (I.3.2) at $n + \theta$ reads:

$$\frac{\rho}{\Delta t} (Y^{n+1} - Y^n) + \underline{\nabla} Y^{n+\theta} \cdot (\rho \underline{u}) - \text{div} (K \underline{\nabla} Y^{n+\theta}) = [S_i(\Phi, \varphi) Y]^{n+\theta} + [S_e(\Phi, \varphi)]^{n+\theta}. \quad (\text{I.3.10})$$

Using the standard θ -scheme $Y^{n+\theta} = \theta Y^{n+1} + (1 - \theta) Y^n$, the equation reads:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta t} (Y^{n+1} - Y^n) + \theta [\underline{\nabla} Y^{n+1} \cdot (\rho \underline{u}) - \text{div} (K \underline{\nabla} Y^{n+1})] = & - (1 - \theta) [\underline{\nabla} Y^n \cdot (\rho \underline{u}) - \text{div} (K \underline{\nabla} Y^n)] \\ & + S_i(\Phi, \varphi^n) [\theta Y^{n+1} + (1 - \theta) Y^n] + [S_e(\Phi, \varphi)]^{n+\theta}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.11})$$

For numerical reasons, the system is solved in an iterative and incremental manner, with the help of the series $\delta Y_{k+1}^{n+1} = Y_{k+1}^{n+1} - Y_k^{n+1}$ (with, by definition, $Y_0^{n+1} = Y^n$). More theoretical details of such an iterative process are given in §6.1.

3.2 Pressure-based velocity-pressure solver

The aim of this section is to describe how Navier Stokes equations are solved for an incompressible or weakly compressible (dilatant or Low Mach algorithm) combined with a implicit Euler time stepping or a second order Crank Nicolson time stepping.

The set of equations to be solved is

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u}) = \underline{\text{div}} (\underline{\sigma}) - \underline{\text{div}} (\rho \underline{R}) + \underline{S} \underline{T}_u - \underline{K} \underline{u} + \rho \underline{g} + \Gamma (\underline{u}^{in} - \underline{u}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \underline{u}) = \Gamma, \end{cases} \quad (\text{I.3.12})$$

where ρ is the density field, \underline{u} is the velocity field to be solved, $[\underline{S} \underline{T}_u - \underline{K} \underline{u} + \rho \underline{g}]$ are sources terms (note that \underline{K} is expected to be a positive definite tensor), $\underline{\sigma}$ is the stress tensor, composed of the viscous tensor $\underline{\tau}$ and of the pressure field as follows

$$\begin{cases} \underline{\sigma} &= \underline{\tau} - P \underline{Id}, \\ \underline{\tau} &= 2\mu \underline{S} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr} (\underline{S}) \underline{1}, \\ \underline{S} &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T). \end{cases} \quad (\text{I.3.13})$$

where μ is the dynamic molecular viscosity κ the volume viscosity (also called the second viscosity, usually neglected in the code, excepted for compressible flows). \underline{S} is called the strain rate and Γ is an eventual mass source term.

3.2.1 Segregated solver: SIMPLEC

A fractional step scheme is used to solve the mass and momentum equations (see Chorin [Cho68]).

The first step (predictor step) provides predicted velocity components: they are determined in a coupled way solving a $3N_{cell} \times 3N_{cell}$ system. The mass equation is taken into account during the second step (corrector step): a pressure Poisson equation is solved and the mass fluxes at the cell faces are updated.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 25/400
---------	--	---

Prediction step

In this section, a predicted velocity field $\tilde{\underline{u}}$ is obtained by solving the momentum equation of (I.3.12)

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\underline{\nabla} \underline{u} \cdot (\rho \underline{u})}_{\text{convection}} &= \underbrace{\underline{\text{div}} (\mu \underline{\nabla} \underline{u})}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\underline{\text{div}} (\mu \underline{\nabla} \underline{u}^T)}_{\text{transpose of the velocity gradient term}} - \underbrace{\frac{2}{3} \underline{\nabla} (\mu \text{tr} (\underline{\nabla} \underline{u}))}_{\text{secondary viscosity}} \\
 &- \underline{\nabla} (P) - \underline{\text{div}} (\rho \underline{R}) + (\rho - \rho_0) \underline{g} \\
 &+ \underbrace{\Gamma (\underline{u}^{in} - \underline{u})}_{\text{Mass source term}} - \underbrace{\rho \underline{K} \underline{u}}_{\text{Head loss}} + \underbrace{ST_u^{exp} + ST_u^{imp}}_{\text{user source terms}} \underline{u}
 \end{aligned} \tag{I.3.14}$$

For more details, see § M and N.

Correction step

The predicted velocity has *a priori* non-zero divergence. The second step corrects the pressure by imposing the nullity¹ of the stationary constraint for the velocity computed at time instant t^{n+1} . We then solve:

$$\begin{cases} \frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \tilde{\underline{u}})^{n+1}}{\Delta t} = -\underline{\nabla} \delta P^{n+\theta}, \\ \text{div} (\rho \underline{u})^{n+1} = \Gamma, \end{cases} \tag{I.3.15}$$

where the pressure increment $\delta P^{n+\theta}$ is defined as:

$$\delta P^{n+\theta} = P^{n+\theta} - P^{n-1+\theta}. \tag{I.3.16}$$

Remark 3.2 The ρ and μ quantities remain constant over the course of both steps. If there has been any variation in the interval, their values will be modified at the start of the next time step, after the scalars (temperature, mass fraction,...) have been updated.

For more details, see § M and O.

¹or the density time-variation is the corresponding algorithm is chosen.

Chapter 4

Space discretization

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 27/400
---------	--	---

4.1 Introduction

4.1.1 Definition and notations

Within the framework of the finite volume approach, the equations are integrated over each cell of the mesh (or *control volume* Ω_i). This section is limited to a brief description of the way 0^{th} -order, convection, diffusion and gradient terms appearing in the equations are integrated using the budget methodology. Specific attention is devoted to the calculation of gradients, since it is a major characteristic of the co-located finite volume method (all the variables are associated with the same point, namely the cell centre¹).

Let N_{cell} be the number of cells, then each discretized field Y has N_{cell} degrees of freedom, which are denoted by Y_i , $i \in [1, \dots, N_{cell}]$ given by definition by:

$$Y_i \equiv \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} Y d\Omega. \quad (\text{I.4.1})$$

As each discretized field Y is supposed to be linear in every single cell, Y_i can be identified by the value of the field in I , the cell center of Ω_i :

$$Y_I = Y_i. \quad (\text{I.4.2})$$

0^{th} -order terms: Then, terms of **order 0** (*i.e.* terms that are not space derivatives) are integrated to introduce their average over the cell. For example, ρg becomes $|\Omega_i| \rho_i g$. In this expression, $|\Omega_i|$ is the measure of cell volume Ω_i and ρ_i denotes the average of ρ over the control volume (the cell) Ω_i applying (I.4.1).

Divergence operator–conservative gradient terms: The **divergence** terms (or *flux* terms, or again *conservative* terms) are integrated using the Green relation to introduce cell faces values so that *fluxes* appear naturally. For example, a term such as $\underline{\text{div}} (Y \underline{1})$ becomes²

$$\int_{\Omega_i} \underline{\text{div}} (Y \underline{1}) d\Omega = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} Y_f S_{f_i}. \quad (\text{I.4.3})$$

In expression (I.4.3), face values of the field Y appear. They are defined as:

$$Y_f \equiv \frac{1}{|S|_f} \int_f Y dS, \quad (\text{I.4.4})$$

so that the relationship (I.4.3) is exact. As the field Y is linear over the face f , Y_f can be associated to the face centre F :

$$Y_F = Y_f. \quad (\text{I.4.5})$$

In the following sections, faces \mathcal{F}_i are usually split into two categories: the interior faces $f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}$ separating two neighbouring cells i and j ; and the boundary faces $f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}$. Outward (with respect to the cell i) normals are respectively denoted \underline{S}_{ij} and \underline{S}_{ib} , which means that \underline{S}_{ij} is oriented from i toward j .

Then Y_F is expressed as an average of the degree of freedom, which are for the interface f_{ij} the value of Y_i and Y_j but also the gradients in these cells. The use of gradients to reach an higher order in space is called *reconstruction* in the coming sections. The detailed computation of $\int_{\Omega_i} \underline{\text{div}} (Y \underline{1}) d\Omega$ is given in § 4.4.1.

¹The centre of a cell is a geometric point associated with the cell and located preferably inside the cell. Nevertheless, the word *centre* shall not be taken literally, especially in the case of polyhedral cells that do not have a regular shape.

²in $\underline{\text{div}} (Y \underline{1})$, Y might be the pressure field P , this term then corresponds to the pressure gradient in the momentum equation.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 28/400
---------	--	--

Convection operator–mass flux terms: Let us now focus on the convective term $\text{div} (Y \rho \underline{u})$. This term and the unsteady term $\frac{\partial (\rho Y)}{\partial t}$ will be treated together. As a matter of fact, if the field Y is transported by the convective field $\rho \underline{u}$, the balance of the quantity ρY over a cell i is written using Leibniz theorem as:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_i} \rho Y d\Omega \right) &= \int_{\Omega_i} \frac{\partial \rho Y}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial \Omega_i} Y \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}, \\ &= \int_{\Omega_i} \frac{\partial \rho Y}{\partial t} + \text{div} (Y \rho \underline{u}) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{I.4.6})$$

the second line is obtained using Green relation.

Moreover, the unsteady and convection terms are usually written in a *non-conservative* form that is in continuous formalism:

$$\frac{\partial (\rho Y)}{\partial t} + \text{div} (Y \rho \underline{u}) = \rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \underline{\nabla} Y \cdot (\rho \underline{u}) + \Gamma Y. \quad (\text{I.4.7})$$

Note that for (I.4.7) to hold, the continuity equation (I.2.4) must be fulfilled. If (I.4.7) is required even for discrete volumes, the convection term must be defined as:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} Y \cdot (\rho \underline{u}) d\Omega &\equiv \int_{\Omega_i} \text{div} (Y \rho \underline{u}) d\Omega - Y_i \int_{\Omega_i} \text{div} (\rho \underline{u}) d\Omega, \\ &= \int_{\partial \Omega_i} Y \rho \underline{u} \cdot d\underline{S} - Y_i \int_{\partial \Omega_i} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}, \\ &= \sum_{f \in \mathcal{F}_i} (Y_f - Y_i) (\rho \underline{u})_f \cdot \underline{S}_{f_i}, \end{aligned} \quad (\text{I.4.8})$$

the second line is obtained using once again Green relation. In formula (I.4.8), one still has to express the face value Y_f and also the value of the mass flux $(\rho \underline{u})_f \cdot \underline{S}_{f_i}$: all the available convective schemes (*upwind*, *centred*, *SOLU*, *etc.*) are presented in § 4.2. Let \dot{m}_{f_i} be the outgoing mass flux from cell i through the face f :

$$\dot{m}_{f_i} \equiv (\rho \underline{u})_f \cdot \underline{S}_{f_i}, \quad (\text{I.4.9})$$

note that this convective flux is naturally defined at cell faces and thus is stored over there in the code. In the following, the convection term is denoted as follows:

$$\int_{\Omega_i} \underline{\nabla} Y \cdot (\rho \underline{u}) d\Omega = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} C_{f_i} (\dot{m}_{f_i}, Y), \quad (\text{I.4.10})$$

where $C_{f_i} (\dot{m}_{f_i}, Y)$ is defined by:

$$C_{f_i} (\dot{m}_f, Y) \equiv (Y_f - Y_i) \dot{m}_{f_i}. \quad (\text{I.4.11})$$

Laplacian operator–diffusive terms: Let us discretize the diffusive term $\text{div} (K \underline{\nabla} Y)$:

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (K \underline{\nabla} Y) d\Omega \equiv \sum_{f \in \mathcal{F}_i} K_f \underline{\nabla}_f Y \cdot \underline{S}_{f_i}, \quad (\text{I.4.12})$$

where K_f is the face diffusivity, and $\underline{\nabla}_f Y$ is the face gradient, their computation will be detailed in § 4.3. In the following, the diffusive term is denoted as follows:

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (K \underline{\nabla} Y) d\Omega = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} D_{f_i} (K_f Y), \quad (\text{I.4.13})$$

where the diffusive flux $D_{f_i} (K_f Y)$ over the face f is defined by:

$$D_{f_i} (K_f, Y) \equiv K_f \underline{\nabla}_f Y \cdot \underline{S}_{f_i}. \quad (\text{I.4.14})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 29/400
---------	--	--

Note that the diffusive flux $D_{ij}(K_{f_{ij}}, Y)$ over the interior face f_{ij} lost by the cell i is gained by j , in other words:

$$D_{ij}(K_{f_{ij}}, Y) = -D_{ji}(K_{f_{ij}}, Y). \quad (\text{I.4.15})$$

Remark 4.1 The diffusion operator can be extended to anisotropic tensor diffusivity \underline{K} .

More geometrical quantities: To end up the general description of the discretized operators, let us introduce some geometrical quantities which will be used during the approximation process of linking face fluxes to cell centred quantities. For consistency and to reach a higher order in space, the values of the variables at points I' and J' have to be used. These points are respectively the projection of the centres I and J along the orthogonal line to the interior face f_{ij} passing through F . When considering a boundary face f_b , I' is defined as the projection of I on the normal to the boundary face f_b passing through F . All the geometrical definitions are recalled in Figure I.4.1. Using Taylor series from the values at I and J and from the *cell gradient* in the respective cells, one can write for any field Y :

$$\begin{cases} Y_{I'} \simeq Y_I + \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II'} &= Y_i + \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II'}, \\ Y_{J'} \simeq Y_J + \underline{\nabla}_j Y \cdot \underline{JJ'} &= Y_j + \underline{\nabla}_j Y \cdot \underline{JJ'}. \end{cases} \quad (\text{I.4.16})$$

Note that for orthogonal meshes (where $I' = I$ for all faces of all cells), no *reconstruction* (I.4.16) is needed, and therefore the distance $|\underline{II'}|$ measures the *non-orthogonality* of the mesh. The computation of $\underline{\nabla}_i Y$ is presented in § 4.4.1 and § I.

Furthermore, the intersection between \underline{IJ} and the corresponding interior face f_{ij} is denoted by O . The distance $|\underline{OF}|$ measures the *offset* of the mesh.

Eventually, a weighting factor α_{ij} is defined to measure the distance of the cell center I to the face f_{ij} relatively to the other cell center J :

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}}. \quad (\text{I.4.17})$$

Note that the distances $\overline{I'J'}$ and $\overline{FJ'}$ are defined algebraically, that is:

$$\begin{aligned} \overline{I'J'} &\equiv \frac{I'J' \cdot S_{ij}}{|S_{ij}|}, \\ \overline{FJ'} &\equiv \frac{FJ' \cdot S_{ij}}{|S_{ij}|}, \end{aligned} \quad (\text{I.4.18})$$

and are supposed to be positive if the mesh is *star-shaped*. Note also that α_{ij} is oriented from i to j and

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1. \quad (\text{I.4.19})$$

4.2 Convective term

Using the notations adopted in § 4.1.1, the explicit budget corresponding to the integration over a cell Ω_i of the convective part $\underline{\nabla}_i Y \cdot (\rho \underline{u})$ has been written as a sum of the numerical fluxes $C_{ij}(\dot{m}_{ij}, Y)$ calculated at the interior faces, and the numerical fluxes $C_{ib}(\dot{m}_{ib}, Y)$ calculated at the boundary faces of the computational domain Ω defined by Equation (I.4.11).

Note that $C_{ib}(\dot{m}_{ib}, Y)$ makes appear the boundary conditions of the field Y and are described in detail in Chapter 5. The value of Y_{f_b} is expressed as follows:

$$Y_{f_b} \equiv A_{f_b}^g + B_{f_b}^g Y_{I'}. \quad (\text{I.4.20})$$

The value of the convective flux $C_{ij}(\dot{m}_{ij}, Y)$ depends on the numerical scheme. Three different types of convection schemes are available in *Code_Saturne*.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 30/400
---------	--	--

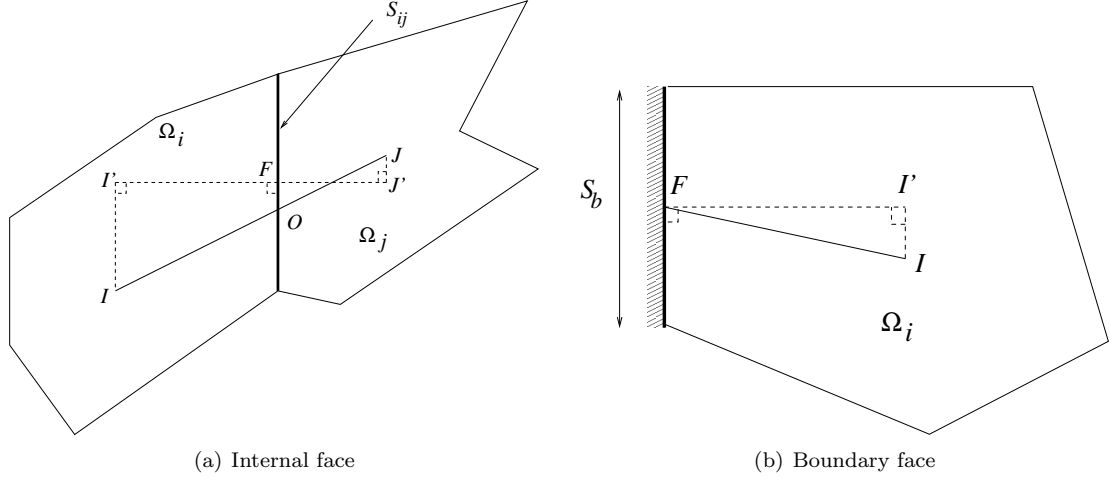


Figure I.4.1: Sketch of geometric entities.

4.2.1 Upwind

For a 1st-order upwind scheme, the convective flux reads:

$$C_{ij}^{upwind}(\dot{m}_{ij}, Y) \equiv (Y_{f_{ij}}^{upwind} - Y_i) \dot{m}_{ij}, \quad (\text{I.4.21})$$

with

$$Y_{f_{ij}}^{upwind} = \begin{cases} Y_i & \text{if } \dot{m}_{ij} \geq 0, \\ Y_j & \text{if } \dot{m}_{ij} < 0. \end{cases} \quad (\text{I.4.22})$$

4.2.2 Centred

For a centred scheme, the convective flux reads:

$$C_{ij}^{centred}(\dot{m}_{ij}, Y) \equiv (Y_{f_{ij}}^{centred} - Y_i) \dot{m}_{ij}, \quad (\text{I.4.23})$$

with

$$Y_{f_{ij}}^{centred} = \alpha_{ij} Y_{I'} + (1 - \alpha_{ij}) Y_{J'}. \quad (\text{I.4.24})$$

Remark 4.2 *We actually write*

$$Y_{f_{ij}}^{centred} = \alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j + \frac{1}{2} [\nabla_i Y + \nabla_j Y] \cdot \underline{OF}, \quad (\text{I.4.25})$$

which ensures the second-order discretization in space for Y . The factor $\frac{1}{2}$ is used for numerical stability reasons.

4.2.3 Second Order Linear Upwind (SOLU)

For a 2nd-order linear upwind scheme, the convective flux reads:

$$C_{ij}^{SOLU}(\dot{m}_{ij}, Y) \equiv (Y_{f_{ij}}^{SOLU} - Y_i) \dot{m}_{ij}, \quad (\text{I.4.26})$$

²Extrapolation of the upwind value at the faces centre.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 31/400
---------	--	---

with

$$Y_{f_{ij}}^{SOLU} = \begin{cases} Y_i + \nabla_i Y \cdot \underline{IF} & \text{if } \dot{m}_{ij} \geq 0, \\ Y_j + \nabla_j Y \cdot \underline{JF} & \text{if } \dot{m}_{ij} < 0. \end{cases} \quad (\text{I.4.27})$$

The boundary value of C_{ib}^{SOLU} is calculated as:

$$Y_{f_b}^{SOLU} = \begin{cases} Y_i + \nabla_i Y \cdot \underline{IF} & \text{if } \dot{m}_{ib} \geq 0, \\ A_{f_b}^g + B_{f_b}^g Y_{I'} & \text{if } \dot{m}_{ib} < 0. \end{cases} \quad (\text{I.4.28})$$

Remark 4.3 A slope test (which may introduce non-linearities in the convection operator) allows to switch from the centred or SOLU scheme to the first-order upwind scheme (without blending). Additionally, the default option to deal with $Y_{f_{ij}}$ is computed as a weighted average between the upstream value and the centred value (blending), according to users' choice.

4.3 Diffusive term

Using the notations adopted in § 4.1.1, the explicit budget corresponding to the integration over a cell Ω_i of the diffusive term $\text{div}(K \nabla Y)$ has been written as a sum of the numerical fluxes $D_{ij}(K_{f_{ij}}, Y)$ calculated at the internal faces, and the numerical fluxes $D_{ib}(K_{f_b}, Y)$ calculated at the boundary faces of the computational domain Ω defined by Equation (I.4.14).

Note that $D_{ib}(K_{f_b}, Y)$ makes appear the **diffusion** boundary conditions of the field Y and are described in detail in Chapter 5. The value of flux D_{ib} of the Y_{f_b} is expressed as follows:

$$\frac{D_{ib}}{|\underline{S}|_{f_b}} \equiv A_{ib}^f + B_{ib}^f Y_{I'}. \quad (\text{I.4.29})$$

The value of the diffusive flux D_{ij} depends on the *reconstruction* of the field Y and also on the interpolation at the face of the diffusivity K from the cell values. Two interpolations are available:

i/ a *harmonic* interpolation which reads:

$$K_{f_{ij}}^{harmonic} \equiv \frac{K_i K_j}{\alpha_{ij} K_i + (1 - \alpha_{ij}) K_j} \quad (\text{I.4.30})$$

ii/ an *arithmetic* interpolation which reads:

$$K_{f_{ij}}^{arithmetic} \equiv \frac{1}{2} (K_i + K_j) \quad (\text{I.4.31})$$

Note that to ensure flux continuity at the internal faces f_{ij} , one should use the *harmonic* mean, whereas the *arithmetic* mean is set as the default option because it has been proven to be more robust numerically.

4.3.1 Without reconstruction

For a *non-reconstructed* field, the diffusive flux reads:

$$D_{ij}^{NRec}(K_{f_{ij}}, Y) = -\frac{K_{f_{ij}} |\underline{S}_{ij}|}{I' J'} (Y_i - Y_j). \quad (\text{I.4.32})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 32/400
---------	--	---

4.3.2 Reconstructed

For a *reconstructed* field, the diffusive flux reads:

$$D_{ij}^{Rec}(K_{f_{ij}}, Y) = -\frac{K_{f_{ij}} |\underline{S}_{ij}|}{I'J'} (Y_{I'} - Y_{J'}). \quad (\text{I.4.33})$$

Remark 4.4 *In fact, it is actually written that*

$$\begin{aligned} D_{ij}^{Rec}(K_{f_{ij}}, Y) &= -\frac{K_{f_{ij}} |\underline{S}_{ij}|}{I'J'} (Y_i - Y_j) \\ &\quad - \frac{K_{f_{ij}} |\underline{S}_{ij}|}{I'J'} \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_i Y + \underline{\nabla}_j Y) \cdot (\underline{II}' - \underline{JJ}'), \end{aligned} \quad (\text{I.4.34})$$

which ensures the second-order discretization in space for Y . The factor $\frac{1}{2}$ is used for numerical stability reasons.

4.4 Gradient calculation

The aim of the present section is to describe the algorithms available in *Code_Saturne* to compute cell gradient for scalar or vector fields. The first one uses an iterative process to handle with non-orthogonalities. It is robust but requires computational effort. The second one, the least square method, minimizes a function. It is quick, but less accurate.

For both methods, the adaptation to gradients of vectorial fields is also presented.

4.4.1 Standard method: iterative process

General description

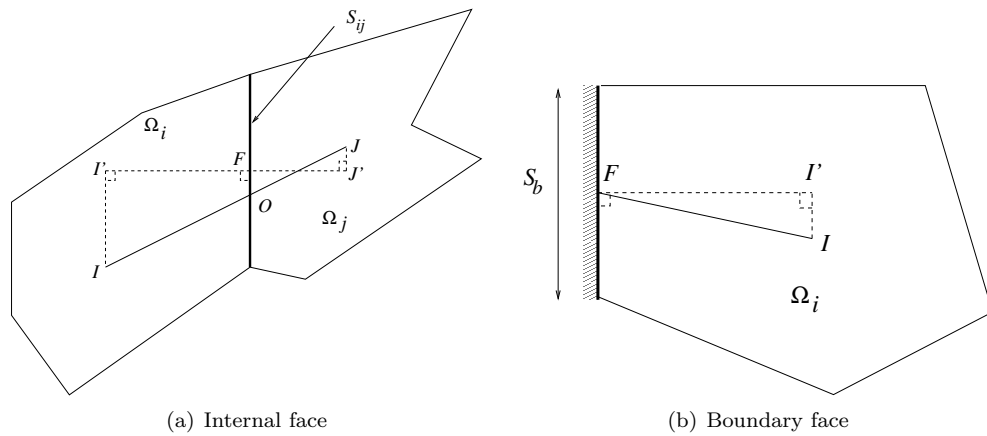


Figure I.4.2: Sketch of geometrical quantities.

Notations of the geometrical quantities are recalled in Figure I.4.2. To compute the cell gradient $\underline{\nabla}_i Y$ of the scalar field Y let us start by its definition:

$$|\Omega_i| \underline{\nabla}_i Y \equiv \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} Y \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} Y \, d\underline{S}. \quad (\text{I.4.35})$$

In order to take the mesh non-orthogonality into account, a Taylor series (1st-order) of $\underline{\nabla}_i Y$ is used as follows:

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 33/ 400
---------	--	--

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{\nabla}_i Y &\equiv \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} Y \, d\Omega = \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} Y_{f_{ij}} \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} Y_{f_b} \underline{S}_{ib}, \\
&= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} Y_F \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} Y_F \underline{S}_{ib}, \\
&\simeq \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [Y_O + \underline{\nabla}_O Y \cdot \underline{OF}] \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_{I'}] \underline{S}_{ib}, \\
&= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_I + (1 - \alpha_{ij}) Y_J)] \underline{S}_{ij} + \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{OF}] \underline{S}_{ij} \\
&+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_{I'}] \underline{S}_{ib}.
\end{aligned} \tag{I.4.36}$$

The variable $\epsilon_{\delta Y}$ is set to 0 for an increment of a variable³, to 1 for the variable itself in order to take correctly the boundary condition into account.

Using the following 1st-order in space approximation

$$\begin{cases} \underline{\nabla}_{f_{ij}} Y &= \frac{1}{2} [\underline{\nabla}_I Y + \underline{\nabla}_J Y], \\ Y_{I'} &= Y_I + \underline{\nabla}_I Y \cdot \underline{II}'. \end{cases}$$

Equation (I.4.36) becomes:

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{\nabla}_i Y &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \left[\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j + \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_i Y + \underline{\nabla}_j Y) \cdot \underline{OF} \right] \underline{S}_{ij} \\
&+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_i + B_{f_b} \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II}'] \underline{S}_{ib}.
\end{aligned}$$

Bringing $\underline{\nabla}_i Y$ terms all together on the left hand side, we have:

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{\nabla}_i Y - \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{\nabla}_i Y \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) - \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} B_{f_b} \underline{\nabla}_i Y \cdot (\underline{II}' \otimes \underline{S}_{ib}) &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j)] \underline{S}_{ij} \\
&+ \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{\nabla}_j Y \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\
&+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_i] \underline{S}_{ib}.
\end{aligned} \tag{I.4.37}$$

Without reconstruction

On an orthogonal mesh, or if chosen, only 0th-order contributions are considered. Everything is as if $\underline{II}' = \underline{0}$ and $\underline{OF} = \underline{0}$ in the previous calculation:

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{\nabla}_i Y &\equiv \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} Y \, d\Omega = \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} Y_{f_{ij}} \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} Y_{f_b} \underline{S}_{ib}, \\
&= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [\alpha_{ij} Y_I + (1 - \alpha_{ij}) Y_J] \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_I] \underline{S}_{ib},
\end{aligned}$$

³Then a homogeneous condition has to be imposed.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 34/400
---------	--	--

hence

$$\underline{\nabla}_i^{NRec} Y = \frac{1}{|\Omega_i|} \left[\sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [\alpha_{ij} Y_I + (1 - \alpha_{ij}) Y_J] \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} (\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_I) \underline{S}_{ib} \right]. \quad (\text{I.4.38})$$

Remark 4.5 The non-reconstructed gradient is denoted by $\underline{\nabla}_i^{NRec} Y$, and is then very easy to compute thanks to the Equation (I.4.38). However, it is neither accurate nor consistent on a non-orthogonal mesh.

Handling with reconstruction: iterative process

In order to solve system (I.4.37), all terms containing $\underline{\nabla}_i Y$ are implicit, whereas all terms with $\underline{\nabla}_j Y$ are explicit, we then use the series $\left(\delta \underline{\nabla}_i^k Y \right)_{k \in \mathbb{N}}$ defined by:

$$\begin{cases} \delta \underline{\nabla}_i^0 Y &= \underline{\nabla}_i^{NRec} Y, \\ \delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y &= \underline{\nabla}_i^{k+1} Y - \underline{\nabla}_i^k Y, \end{cases} \quad (\text{I.4.39})$$

and the associated system is:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_i^{k+1} Y \cdot \left[|\Omega_i| \underline{1} - \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij} - \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} B_{f_b} \underline{II}' \otimes \underline{S}_{ib} \right] &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j)] \underline{S}_{ij} \\ &+ \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{\nabla}_j^k Y \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} Y_i] \underline{S}_{ib}, \end{aligned} \quad (\text{I.4.40})$$

or, as the following relationship stands:

$$\underline{\nabla}_i^{k+1} Y = \underline{\nabla}_i^k Y + \delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y,$$

$$\begin{aligned} \delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y \cdot \left[|\Omega_i| \underline{1} - \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij} - \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} B_{f_b} \underline{II}' \otimes \underline{S}_{ib} \right] &= -|\Omega_i| \underline{\nabla}_i^k Y + \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j)] \underline{S}_{ij} \\ &+ \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla}_i^k Y + \underline{\nabla}_j^k Y \right) \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} \left(Y_i + \underline{\nabla}_i^k Y \cdot \underline{II}' \right) \right] \underline{S}_{ib}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.41})$$

The Equation (I.4.41) is a local 3×3 matrix which unknowns are each of the three components of the

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 35/400
---------	--	--

vector $\delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y$. Finally, for each cell i we get:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \underline{\nabla}_{i,x}^{k+1} Y \\ \delta \underline{\nabla}_{i,y}^{k+1} Y \\ \delta \underline{\nabla}_{i,z}^{k+1} Y \end{bmatrix}}_{\delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_{i,xx} & C_{i,xy} & C_{i,xz} \\ C_{i,yx} & C_{i,yy} & C_{i,yz} \\ C_{i,zx} & C_{i,zy} & C_{i,zz} \end{bmatrix}}_{\underline{C}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,x}^{k+1} \\ R_{i,y}^{k+1} \\ R_{i,z}^{k+1} \end{bmatrix}}_{\underline{R}_i^{k+1}}, \quad (\text{I.4.42})$$

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C}_i = |\Omega_i| \underline{1} - \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij} - \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} B_{fb} \underline{II}' \otimes \underline{S}_{ib}, \\ \underline{R}_i^{k+1} = -|\Omega_i| \underline{\nabla}_i^k Y + \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j)] \underline{S}_{ij} \\ + \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_i^k Y + \underline{\nabla}_j^k Y) \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\ + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta Y} A_{fb} + B_{fb} (Y_i + \underline{\nabla}_i^k Y \cdot \underline{II}') \right] \underline{S}_{ib}. \end{array} \right. \quad (\text{I.4.43})$$

The invert of the matrix \underline{C}_i is used to compute $(\delta \underline{\nabla}_i^{k+1} Y)$ and so $(\underline{\nabla}_i^{k+1} Y)$. The iterative process stops as soon as the Euclidean norm of the right-hand-side \underline{R}_i^{k+1} tends toward zero (*i.e.* when the Euclidean norm of $(\delta \underline{\nabla}_i^k Y)$ tends to zero) or when the number of iterations reaches the maximal number of iterations.

4.4.2 Standard method: iterative process for vectorial fields

In this section, the adaptation of the calculation presented in § 4.4.1 is adapted to vectorial fields. Some minor modifications are required, especially for the boundary condition treatment, but the core of the formulae are the very similar. The notations of the geometrical quantities are recalled in Figure I.4.2.

The definition of $\underline{\nabla}_i \underline{v}$ reads:

$$|\Omega_i| \underline{\nabla}_i \underline{v} \equiv \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} \underline{v} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} \underline{v} \otimes d\underline{S}. \quad (\text{I.4.44})$$

The same Taylor series as (I.4.36) of $\underline{\nabla}_i \underline{v}$ is used:

$$\begin{aligned} |\Omega_i| \underline{\nabla}_i \underline{v} &\equiv \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} \underline{v} \, d\Omega = \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \underline{v}_{f_{ij}} \otimes \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \underline{v}_{fb} \otimes \underline{S}_{ib}, \\ &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \underline{v}_F \otimes \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \underline{v}_F \otimes \underline{S}_{ib}, \\ &\simeq \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \left[\underline{v}_O + \underline{\nabla}_O \underline{v} \cdot \underline{OF} \right] \otimes \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta \underline{v}} \underline{A}_{fb} + \underline{B}_{fb} \cdot \underline{v}_{I'} \right] \otimes \underline{S}_{ib}, \\ &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} \underline{v}_I + (1 - \alpha_{ij}) \underline{v}_J)] \otimes \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\underline{\nabla}_{f_{ij}} \underline{v} \cdot \underline{OF} \right] \otimes \underline{S}_{ij} \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta \underline{v}} \underline{A}_{fb} + \underline{B}_{fb} \cdot \underline{v}_{I'} \right] \otimes \underline{S}_{ib}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.45})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 36/400
---------	--	---

Once again, the variable $\epsilon_{\delta v}$ is set to 0 for an increment of a variable, to 1 for the variable itself in order to take correctly the boundary condition into account.

The same 1st-order in space approximation as in the scalar gradient calculation is used:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\nabla}}_{f_{ij}} v &= \frac{1}{2} [\underline{\underline{\nabla}}_I v + \underline{\underline{\nabla}}_J v], \\ v_{I'} &= v_I + \underline{\underline{\nabla}}_I v \cdot \underline{II'}. \end{cases}$$

Equation (I.4.45) becomes:

$$\begin{aligned} |\Omega_i| \underline{\underline{\nabla}}_i v &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \left[\alpha_{ij} v_i + (1 - \alpha_{ij}) v_j + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}_i v + \underline{\underline{\nabla}}_j v) \cdot \underline{OF} \right] \otimes \underline{S}_{ij} \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta v} \underline{A}_{f_b} + \underline{B}_{f_b} \cdot v_i + \underline{B}_{f_b} \cdot (\underline{\underline{\nabla}}_i v \cdot \underline{II'}) \right] \otimes \underline{S}_{ib}. \end{aligned}$$

Note that, there is no simple possibility here to bring $\underline{\underline{\nabla}}_i v$ terms all together on the left hand side, because the term $\underline{B}_{f_b} \cdot (\underline{\underline{\nabla}}_i v) \cdot (\underline{II'} \otimes \underline{S}_{ib})$ cannot be factorised easily, and thus will be explicit:

$$\begin{aligned} |\Omega_i| \underline{\underline{\nabla}}_i v - \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{\underline{\nabla}}_i v \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) &= \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} v_i + (1 - \alpha_{ij}) v_j)] \otimes \underline{S}_{ij} \\ &+ \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{\underline{\nabla}}_j v \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \left[\epsilon_{\delta v} \underline{A}_{f_b} + \underline{B}_{f_b} \cdot v_i \right] \otimes \underline{S}_{ib} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} \underline{B}_{f_b} \underline{\underline{\nabla}}_i v \cdot (\underline{II'} \otimes \underline{S}_{ib}). \end{aligned} \quad (\text{I.4.46})$$

Without reconstruction

Without reconstruction, the vectorial gradient reads:

$$\underline{\underline{\nabla}}_i^{NRec} v = \frac{1}{|\Omega_i|} \left[\sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [\alpha_{ij} v_i + (1 - \alpha_{ij}) v_j] \otimes \underline{S}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} (\epsilon_{\delta v} \underline{A}_{f_b} + \underline{B}_{f_b} \cdot v_i) \otimes \underline{S}_{ib} \right]. \quad (\text{I.4.47})$$

Handling with reconstruction: iterative process

The series $\left(\delta \underline{\underline{\nabla}}_i^k v \right)_{k \in \mathbb{N}}$ is defined by:

$$\begin{cases} \delta \underline{\underline{\nabla}}_i^0 v &= \underline{\underline{\nabla}}_i^{NRec} v, \\ \delta \underline{\underline{\nabla}}_i^{k+1} v &= \underline{\underline{\nabla}}_i^{k+1} v - \underline{\underline{\nabla}}_i^k v, \end{cases} \quad (\text{I.4.48})$$

A system similar to Equation (I.4.41) is obtained for each cell i

$$\delta \underline{\underline{\nabla}}_i^{k+1} v \cdot \underline{C}_i = \underline{R}_i^{k+1} \quad (\text{I.4.49})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 37/400
---------	--	--

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{C}}_i = \underline{\underline{1}} - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} \underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}, \\ \underline{\underline{R}}_i^{k+1} = -\underline{\nabla}_i^k Y + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} [(\alpha_{ij} Y_i + (1 - \alpha_{ij}) Y_j)] \underline{S}_{ij} \\ + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f_{ij} \in \mathcal{F}_i^{int}} \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_i^k Y + \underline{\nabla}_j^k Y) \cdot (\underline{OF} \otimes \underline{S}_{ij}) \\ + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\epsilon_{\delta Y} A_{f_b} + B_{f_b} (Y_i + \underline{\nabla}_i^k Y \cdot \underline{II}')] \underline{S}_{ib}. \end{array} \right. \quad (\text{I.4.50})$$

Remark 4.6 Note that the matrix $\underline{\underline{C}}_i$ in (I.4.50) is not the same as in (I.4.43). First of all, there is no boundary term and thus its invert has not to be recomputed at each iteration (except if the mesh is not modified). This matrix thus only measure the quality of the mesh (if the mesh is orthogonal, $\underline{\underline{C}}_i = \underline{\underline{1}}$ for all cells). Secondly, this matrix is dimensionless, whereas in (I.4.43) $\underline{\underline{C}}_i$ has the dimension of a volume. This choice has been motivated to minimize truncature errors.

4.4.3 Least-square method

Notations of the geometrical quantities are recalled in Figure I.4.2. The aim of the present algorithm is to compute the cell gradient $\underline{\nabla}_i Y$ of the scalar field Y using a least square method. The idea is to evaluate the gradient of the variable at the cell faces using the value of the gradient at the cell centres. The method is supposed to be not as robust as the *iterative* process presented in § 4.4.1, but much more efficient.

Let introduce $\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}$ an estimation at the internal face f_{ij} of the gradient projected in the direction \underline{d}_{ij} (which will be chosen afterwards). Let also define the analogous quantity for boundary faces f_b : $\underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib}$ (\underline{d}_{ib} will also be chosen afterwards).

The goal would be to find $\underline{\nabla}_i Y$ such that, for all faces the following relationships hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{d}_{ij} = \underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}, \\ \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{d}_{ib} = \underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib}. \end{array} \right. \quad (\text{I.4.51})$$

The previous equality is generally not reachable for all the faces, so the problem is reformulated as the minimisation of the \mathcal{F}_i function:

$$\mathcal{F}_i(\underline{v}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [\underline{v} \cdot \underline{d}_{ij} - \underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{ext}} [\underline{v} \cdot \underline{d}_{ib} - \underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib}]^2, \quad (\text{I.4.52})$$

where $j \in \text{Neigh}(i)$ is the neighbouring of the cell i . By default, the neighbouring is composed of cells which share at least a face with i . But *extended* neighbouring can be used.

To minimize \mathcal{F}_i , derivatives with respect to the components of the vector \underline{v} are computed, the resulting system is solved and $\underline{\nabla}_i Y$ is defined as \underline{v}_{\min} such that $\mathcal{F}_i(\underline{v}_{\min})$ is minimum.

In order to solve the systems for each cell i separately from one to an other, vectors \underline{d}_{ij} and \underline{d}_{ib} are chosen so that the quantities $\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}$ and $\underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib}$ do not depend on neighbouring cell gradients $\underline{\nabla}_j Y$. The following choice makes it possible:

$$\begin{aligned} \underline{d}_{ij} &= \frac{\underline{IJ}}{[\underline{IJ}]}, \\ \underline{d}_{ib} &= \frac{\underline{I'F}}{[\underline{I'F}]} = \underline{n}_{ib}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.53})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 38/400
---------	--	--

Thus, for internal faces f_{ij} , \underline{d}_{ij} is the normalized vector joining the centres I and J oriented from cell i to j . The quantity $\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}$ is given by:

$$\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{|\underline{IJ}|}. \quad (\text{I.4.54})$$

For boundary faces, the choice \underline{d}_{ib} to be the outward normal implies:

$$\underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib} = \frac{Y_{f_b} - Y_{I'}}{|\underline{I'F}|}, \quad (\text{I.4.55})$$

where Y_{f_b} is expressed thanks to the boundary conditions (see Chapter 5) and the value $Y_{I'}$ is given by formula (I.4.16) recalled hereafter:

$$\begin{cases} Y_{I'} &= Y_i + \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II'} \\ Y_{f_b} &= A_{f_b}^g + B_{f_b}^g Y_{I'} = A_{f_b}^g + B_{f_b}^g (Y_i + \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II'}) \end{cases} \quad (\text{I.4.56})$$

Eventually we get:

$$\underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib} = \frac{A_{f_b}^g + (B_{f_b}^g - 1) (Y_i + \underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{II'})}{|\underline{I'F}|}, \quad (\text{I.4.57})$$

Equation (I.4.57) makes appear a term in $\underline{\nabla}_i Y$ and thus should be injected into Equation (I.4.52) before deriving it. Thus (I.4.52) becomes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left[\underline{v} \cdot \underline{d}_{ij} - \underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \left[\underline{v} \cdot \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) - \frac{A_{f_b}^g + (B_{f_b}^g - 1) Y_i}{|\underline{I'F}|} \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{I.4.58})$$

Then we cancel the derivatives of $\mathcal{F}_i(\underline{v})$ with respect to the \underline{v} components:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \underline{v}}(\underline{v}) &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left[(\underline{v} \cdot \underline{d}_{ij}) \underline{d}_{ij} - (\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}) \underline{d}_{ij} \right] \\ &+ \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \left[\left(\underline{v} \cdot \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) \right) \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) - \frac{A_{f_b}^g + (B_{f_b}^g - 1) Y_i}{|\underline{I'F}|} \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.4.59})$$

A 3×3 system for each cell i is got by writing $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \underline{v}}(\underline{\nabla}_i Y) = \underline{0}$:

$$\underline{\nabla}_i Y \cdot \underline{C}_i = \underline{R}_i, \quad (\text{I.4.60})$$

with

$$\begin{cases} \underline{C}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{d}_{ij} \otimes \underline{d}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) \otimes \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right), \\ \underline{R}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} (\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{d}_{ij}) \underline{d}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \frac{A_{f_b}^g + (B_{f_b}^g - 1) Y_i}{|\underline{I'F}|} \left(\underline{d}_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right), \end{cases} \quad (\text{I.4.61})$$

using (I.4.53) this gives:

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \frac{\underline{IJ} \otimes \underline{IJ}}{|\underline{IJ}|^2} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \left(n_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right) \otimes \left(n_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right), \\ \underline{\underline{R}}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} (Y_j - Y_i) \frac{\underline{IJ}}{|\underline{IJ}|^2} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \frac{A_{f_b}^g + (B_{f_b}^g - 1) Y_i}{|\underline{I'F}|} \left(n_{ib} - \frac{B_{f_b}^g - 1}{|\underline{I'F}|} \underline{II'} \right). \end{cases} \quad (\text{I.4.62})$$

Remark 4.7 *i/ Note that the 3×3 $\underline{\underline{C}}_i$ tensor is symmetric.*

ii/ For cells i having at least a boundary face f_b , the tensor $\underline{\underline{C}}_i$ must be recomputed at each time step, for the other, the tensor $\underline{\underline{C}}_i$ only have to be recomputed when the mesh is updated (in ALE for instance).

iii/ If the user chooses not to reconstruct the gradients (which introduces a lack of consistency on non-orthogonal meshes), then the gradient is computed thanks to formula (I.4.38).

iv/ For highly non-orthogonal meshes, an extended support⁴ can be used (see different support in Figure I.4.3) and can drastically improve the results when using tetrahedral meshes.

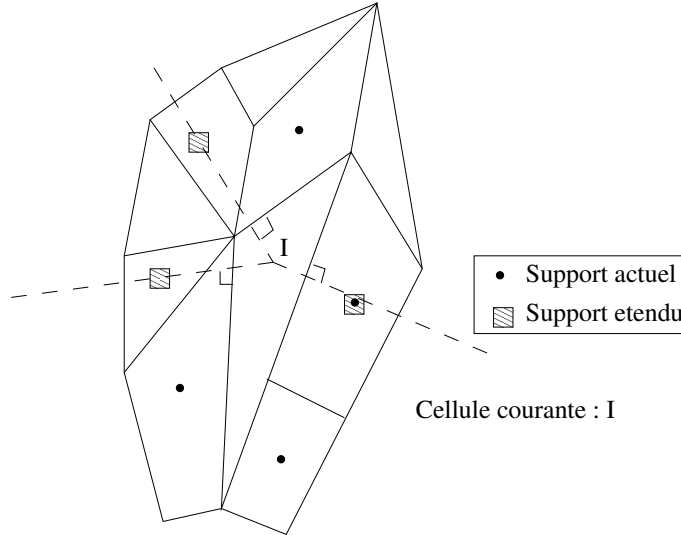


Figure I.4.3: Available supports for computing the gradient with the least square method.

4.4.4 Least-square method for vectorial fields

In this section, the adaptation of the calculation presented in § 4.4.3 is adapted to vectorial fields. Some minor modifications are required, especially for the boundary condition treatment, but the core of the formulae are the very similar. The notations of the geometrical quantities are recalled in Figure I.4.2.

The functional to be minimized is defined by

$$\mathcal{F}_i(\underline{t}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left| \underline{t} \cdot \underline{d}_{ij} - \underline{\nabla}_{f_{ij}} \underline{v} \cdot \underline{d}_{ij} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \left| \underline{t} \cdot \underline{d}_{ib} - \underline{\nabla}_{f_b} \underline{v} \cdot \underline{d}_{ib} \right|^2, \quad (\text{I.4.63})$$

⁴the support is the set of neighbouring cells used in the cell gradient computation.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 40/400
---------	--	--

To minimize \mathcal{F}_i , derivatives with respect to the components of the vector \underline{t} are computed, the resulting system is solved and $\underline{\nabla}_i \underline{v}$ is defined as \underline{t}_{\min} such that $\mathcal{F}_i(\underline{t}_{\min})$ is minimum.

In order to obtain a simple system, the same choice as in (I.4.53) is made on \underline{d}_{ij} . Concerning \underline{d}_{ib} , another choice ensuring that $\underline{\nabla}_{f_b} Y \cdot \underline{d}_{ib}$ does not depend on $\underline{\nabla}_i Y$ is made:

$$\begin{aligned} \underline{d}_{ij} &= \frac{\underline{IJ}}{|\underline{IJ}|}, \\ \underline{d}_{ib} &= \frac{\underline{IF}}{|\underline{IF}|}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.64})$$

Thus, for internal faces f_{ij} , \underline{d}_{ij} is still the normalized vector joining the centres I and J oriented from cell i to j . The quantity $\underline{\nabla}_{f_{ij}} \underline{v} \cdot \underline{d}_{ij}$ is given by:

$$\underline{\nabla}_{f_{ij}} \underline{v} \cdot \underline{d}_{ij} = \frac{\underline{v}_j - \underline{v}_i}{|\underline{IJ}|}. \quad (\text{I.4.65})$$

For boundary faces, the choice \underline{d}_{ib} implies:

$$\underline{\nabla}_{f_b} \underline{v} \cdot \underline{d}_{ib} = \frac{\underline{v}_{f_b} - \underline{v}_i}{|\underline{IF}|}, \quad (\text{I.4.66})$$

where \underline{v}_{f_b} is expressed thanks to the boundary conditions (see Chapter 5).

Then we cancel the derivatives of $\mathcal{F}_i(\underline{t})$ with respect to the \underline{t} components:

A 3×3 system for each cell i is got by writing $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \underline{t}}(\underline{\nabla}_i \underline{v}) = \underline{0}$:

$$\underline{\nabla}_i \underline{v} \cdot \underline{C}_i = \underline{R}_i, \quad (\text{I.4.67})$$

with

$$\begin{cases} \underline{C}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{d}_{ij} \otimes \underline{d}_{ij} + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \underline{d}_{ib} \otimes \underline{d}_{ib}, \\ \underline{R}_i &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{\nabla}_{f_{ij}} \underline{v} \cdot (\underline{d}_{ij} \otimes \underline{d}_{ij}) + \sum_{f_b \in \mathcal{F}_i^{\text{ext}}} \frac{A_{f_b}^g + (\underline{B}_{f_b}^g - \underline{1}) \cdot \underline{v}_i}{|\underline{IF}|} \otimes \underline{d}_{ib}. \end{cases} \quad (\text{I.4.68})$$

Remark 4.8 Note that the 3×3 \underline{C}_i tensor is slightly different from (I.4.60) and does not depend on boundary condition coefficients (and thus does not require re-computation if the mesh is not modified).

4.5 Advanced topic

4.5.1 Rhie & Chow filter

4.5.2 Handling of the hydrostatic pressure

4.5.3 Pressure extrapolation at the boundaries

Chapter 5

Boundary conditions

5.1 Introduction

Boundary conditions are required in at least three main cases:

- calculation of the convection terms (first order derivative in space) at the boundary: the code uses a mass flux at the boundary and requires the value of the convected variable when the flow is entering into the domain (or more general wave relations in the sense of the characteristic curves of the system entering the domain);
- calculation of the diffusion terms (second order derivative in space): the code needs a method to determine the value of the first order spatial derivatives at the boundary, these define *e.g.* the stresses or the thermal fluxes at the wall;
- calculation of the cell gradients: the variables at the boundary faces allow the code to define the gradient inside the cell connected to the boundary (*e.g.* the pressure gradient or the transpose gradient terms in the stress-strain relation).

These considerations only concern the computational field variables (velocity, pressure, Reynolds tensor, scalars solution of a advection-diffusion equations *etc.*). For these variables ¹, the user has to define the boundary conditions at every boundary face.

The boundary conditions could be of Neumann type (when the flux is imposed) or Dirichlet type (when the value of the field variable is prescribed), or mixed type, also called Robin type (when a combination linking the field variable to its derivative flux is imposed).

The code (see the [programmers reference of the dedicated subroutine](#)) transforms the boundary conditions provided by the user into two internal formats of representation of the boundary conditions.

A particular treatment is performed on walls: wall functions are used to model the boundary layer flow in the vicinity of the wall when the mesh is too coarse to correctly capture the sharp variations of the fields with a linear profile in the near wall cell. This will be detailed in the next sections.

A particular treatment on symmetry boundaries is also performed for vectors and tensors whereas a symmetry boundary is equivalent to an homogeneous Neumann condition (zero normal gradient) for scalar fields.

The physics model that the user wishes to apply needs to be translated into pairs of coefficients entering the linear system of equations that the code will solve. For any variable Y for every boundary faces f_b these coefficients are:

- $(A_{f_b}^g, B_{f_b}^g)$ used by the gradient operator and by the advection operator. The value at the boundary face f_b of the variable Y is then defined as:

$$Y_{f_b} \equiv A_{f_b}^g + B_{f_b}^g Y_{I'}. \quad (\text{I.5.1})$$

- (A_{ib}^f, B_{ib}^f) used by the diffusion operator. The value at the boundary face f_b of the diffusive flux q_{ib} of the variable Y is then defined as (see Equation (I.4.29)):

$$q_{ib} \equiv \frac{D_{ib}(K_{f_b}, Y)}{|\underline{S}|_{f_b}} = A_{ib}^f + B_{ib}^f Y_{I'}. \quad (\text{I.5.2})$$

Note that the diffusive boundary coefficients are oriented, which means that they are such that $D_{ib}(K_{f_b}, Y)$ is positive, this flux is gained by Y_i .

The definitions are recalled on Figure I.5.1.

¹The other variables (the physical properties for instance) have a different treatment which will not be detailed here (for instance, for the density, the user defines directly the values at the boundary. This information is then stored; one is referred to `cs_user_physical_properties` (see the [programmers reference of the dedicated subroutine](#)) or `phyvar` for more information).

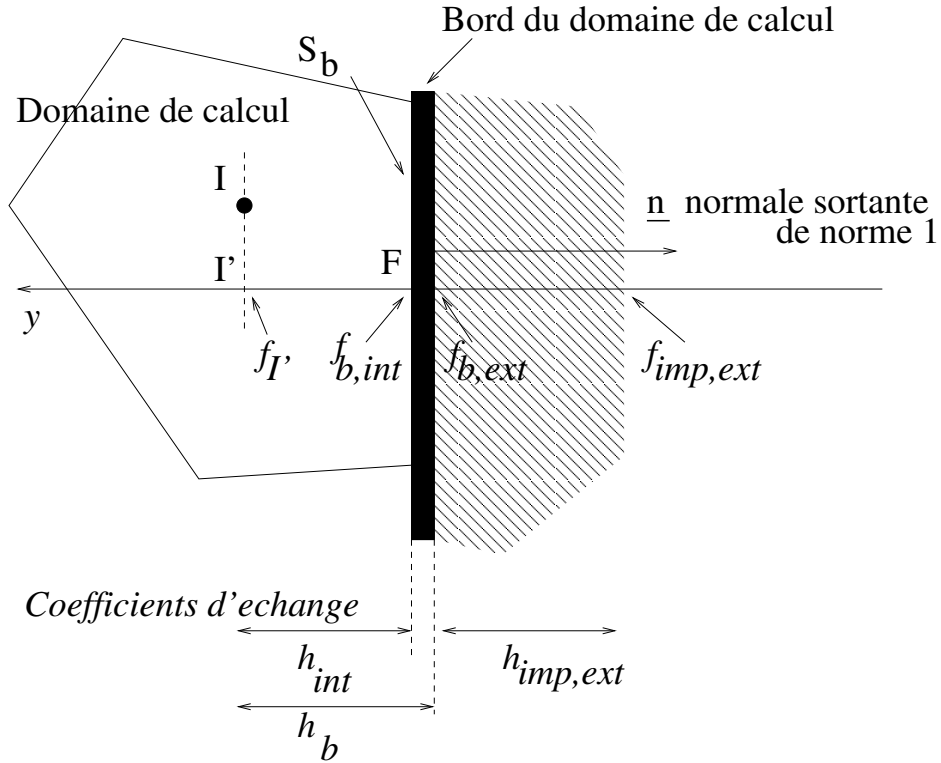


Figure I.5.1: Boundary cell.

Example 5.1 The heat flux q_w from a solid wall to a laminar flow is defined and discretised as

$$q_w = \lambda \nabla T \cdot \underline{n}_{ib} = -\lambda \frac{T_{I'} - T_F}{\overline{I'F}} = -h_{int} (T_{I'} - T_F), \quad (\text{I.5.3})$$

where $h_{int}/\overline{I'F}$ is the exchange coefficient between the wall and the fluid point I' .

- If the wall temperature T_w is known, $T_F = T_w$ is set as Dirichlet condition, q_w will be a result of the simulation, and the gradient and diffusive flux coefficients are as follows:

$$\begin{cases} A_{fb}^g = T_w, \\ B_{fb}^g = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f = -h_{int} T_w, \\ B_{ib}^f = h_{int}. \end{cases} \quad (\text{I.5.4})$$

- If the wall heat flux q_w is known, this is a Neumann condition and $T_F = T_w$ will be a result of the simulation and the gradient and diffusive flux coefficients are as follows:

$$\begin{cases} A_{fb}^g = -\frac{q_w}{h_{int}}, \\ B_{fb}^g = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f = q_w, \\ B_{ib}^f = 0. \end{cases} \quad (\text{I.5.5})$$

5.2 Standard user boundary conditions

The user generally gives standard boundary conditions, which are:

Inlet: it corresponds to a Dirichlet boundary condition on all the transported variables (and should therefore be given by the user) and to a homogeneous Neumann on the pressure field.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 44/400
---------	--	--

Outlet: it correspond to a homogeneous Neumann boundary condition on all the transported variables. For the pressure field, a Dirichlet boundary condition which is expected to mimic $\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \tau} = 0$ for any vector $\underline{\tau}$ parallel to the outlet face (see §5.4.4 for more details). This condition means that the pressure profile does not vary in the normal direction of the outlet. Warning: if the outgoing mass-flux is negative, *i.e.* if the outlet becomes an inlet, then the mass-flux is clipped to zero. Moreover, since the pressure field is defined up to a constant, it is fixed to a reference pressure P_0 at an arbitrary chosen outlet boundary face. The user can choose an other desired face where a Dirichlet on pressure is prescribed.

Free inlet/outlet: it corresponds to the standard outlet when the flow is outgoing (see §5.4.4), but to a free inlet when the flow is ingoing. The Bernoulli relationship is used to derive a boundary condition on the pressure increment to couple velocity and pressure at these free inlet faces. Note that no clipping on the velocity is imposed. The same boundary conditions as for outlet on the other variables is imposed. For more details please refer to §5.4.5.

Walls: This particular treatment will be detailed in the following sections. For the velocity, the aim is to transform the Dirichlet boundary condition (the velocity at the wall is equal to zero, or the velocity of a moving wall) into a Neumann boundary condition where the wall shear stress is imposed function of the local flow velocity and the turbulence characteristics. A similar treatment using wall functions is done on every transported variable if this variable is prescribed. The boundary condition on the pressure field is a homogeneous Neumann by default, or alternatively an extrapolation of the gradient.

Symmetries: This condition corresponds to a homogeneous Neumann for the scalar fields (*e.g.* the pressure field or the temperature field). For vectors, such as the velocity, it corresponds to impose a zero Dirichlet on the component normal to the boundary, and a homogeneous Neumann on the tangential components. Thus, this condition couples the vector components if the symmetry faces are not aligned with the reference frame. The boundary condition for tensors, such as the Reynolds stresses, will be detailed in the following sections.

5.3 Internal coding of the boundary conditions – Discretization

As already mentioned, the boundary conditions set by the user for the variable Y are translated into two pairs of coefficients $(A_{f_b}^g, B_{f_b}^g)$ which are used by the gradient operator and by the advection operator, and $(A_{f_b}^f, B_{f_b}^f)$ for use by the diffusion operator, this for all the boundary faces f_b .

Let us first recall the general form of the transport equation of a variable Y , which could be a scalar, a vector or a tensor:

$$C\rho \frac{\partial Y}{\partial t} + C\underline{\nabla} Y \cdot (\rho \underline{u}) = \text{div} (K \underline{\nabla} Y) + ST_Y. \quad (\text{I.5.6})$$

In the Equation (I.5.6) ρ is the density of the fluid, $(\rho \underline{u})$ the convective mass flux of the variable Y , K its conductivity or diffusivity and S any additional source terms. Note that K is the sum of molecular and turbulent diffusivity in case of RANS modelling with an eddy viscosity model. The dimension of K for different variables is displayed in Table 5.1. The value of C is 1 for all the variables except for the temperature where C is the specific heat C_p . If the variable Y is the variance of another scalar, then its diffusivity is deduced from the scalar itself.

5.3.1 Basic Dirichlet boundary conditions

Imposing a basic Dirichlet condition $Y_{f_b}^{imp}$ on a boundary face f_b is translated into:

Y			K		
symbol	name	units	symbol	name	units
u_i	velocity	$m.s^{-1}$	μ or $\mu + \mu_t$	dynamic viscosity	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
P	pressure	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	Δt	time step	s
T	temperature	K	λ	thermal conductivity	$kg.m.s^{-3}.K^{-1}$ $= W.m^{-1}.K^{-1}$
h	enthalpy	$m^2.s^{-2}$ $= J.kg^{-1}$	λ/C_p	thermal conductivity over specific heat	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
Y	variable	unit of (Y)	K	conductivity or diffusivity	$kg.m^{-1}.s^{-1}$

Table 5.1: Values and unit of α common cases.

$$\begin{cases} A_{f_b}^g = Y_{f_b}^{imp}, \\ B_{f_b}^g = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f = -h_{int} Y_{f_b}^{imp}, \\ B_{ib}^f = h_{int}. \end{cases} \quad (I.5.7)$$

The term h_{int} is a internal coding coefficient (automatically provided by the code) similar to an exchange coefficient. Its value for particular variables is given in Table 5.2.

Remark 5.1 $Y_{f_b}^{imp}$ must be specified by the user. The boundary type code is 1 (see Table 5.3).

5.3.2 Neumann boundary conditions

Imposing a Neumann condition D_{ib}^{imp} on a boundary face f_b is translated into

$$\begin{cases} A_{f_b}^g = -\frac{D_{ib}^{imp}}{h_{int}}, \\ B_{f_b}^g = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f = D_{ib}^{imp}, \\ B_{ib}^f = 0. \end{cases} \quad (I.5.8)$$

Remark 5.2 D_{ib}^{imp} must be specified by the user. The boundary type code is 3 (see Table 5.3).

5.3.3 Mixed or Robin boundary conditions

As explained in the introduction 5.1, the simple case of a heat flux q_w from a solid wall reads: $q_w = \lambda \nabla T \cdot \underline{n}_{ib} = -\lambda \frac{T_{I'} - T_F}{l'F} = -h_{int} (T_{I'} - T_F)$ where $h_{int} = \frac{\lambda}{l'F}$ is displayed in Table 5.2. As presented in § 5.3.1, Dirichlet condition $T_F = T_w$ simply leads to $A^f = -h_{int} T_w$ and $B^f = h_{int}$. In some cases, heat transfer outside the flow domain is described by a one-dimensional conduction equation $q = -h_{ext} (T_{REF} - T_w)$ in which some reference temperature T_{REF} is given and the coefficient h_{ext} is known from an analytical or experimental correlation. Equaling this to the heat flux computed in the first fluid cell at the boundary gives $h_{ext} (T_{REF} - T_w) = h_{int} (T_{I'} - T_F)$. This relation between the variable and its gradient at the boundary is called a Robin or mixed boundary condition.

More generally, to impose an external Dirichlet $Y_{f_b}^{imp, ext}$ at some distance outside the boundary face, this is done by a user prescribed external coefficient h_{ext} (see Figure I.5.1), and the boundary condition coefficients then read:

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 46/400
---------	--	---

$$\begin{cases} A_{fb}^g &= \frac{h_{ext}}{h_{int} + h_{ext}} Y^{imp, ext}, \\ B_{fb}^g &= \frac{h_{int}}{h_{int} + h_{ext}}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f &= -h_{eq} Y^{imp, ext}, \\ B_{ib}^f &= h_{eq}, \end{cases} \quad (I.5.9)$$

where h_{eq} is defined by $h_{eq} = \frac{h_{int} h_{ext}}{h_{int} + h_{ext}}$. The harmonic mean (as in (I.4.30)) comes from summing of resistances instead of conductances. Note that this case reduces to Dirichlet condition if h_{ext} tends to the infinity.

Remark 5.3 Both $Y^{imp, ext}$ and h_{ext} must be specified by the user. The boundary code is 1 (see Table 5.3). Take care that an outgoing flux is counted positively.

5.3.4 Convective outlet boundary conditions

If the user wishes to impose a convective outlet (also called radiative outlet) condition which reads:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + C \frac{\partial Y}{\partial n} = 0, \quad (I.5.10)$$

where C denotes the convective celerity, then the internal coding reads:

$$\begin{cases} A_{fb}^g &= \frac{1}{1 + CFL} Y_{fb}^n, \\ B_{fb}^g &= \frac{CFL}{1 + CFL}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ib}^f &= -\frac{h_{int}}{1 + CFL} Y_{fb}^n, \\ B_{ib}^f &= \frac{h_{int}}{1 + CFL}, \end{cases} \quad (I.5.11)$$

where $CFL \equiv \frac{C \Delta t}{\overline{U'F}}$.

Remark 5.4 Both C and Y_{fb}^n must be specified by the user, the boundary code is 2 (see Table 5.3).

5.4 Wall boundary conditions

This section is dedicated to wall boundary conditions for the velocity, and any transported scalar (such as the temperature, the enthalpy, *etc.*) when a wall boundary value is prescribed and a wall function is set by the user. The dedicated boundary conditions of the turbulent variables (k , ε , R_{ij}) are detailed in Chapter 7. Here is a link to the [programmers reference of the dedicated subroutine](#).

Simplified balance analysis proves that the fluid velocity profile or the Temperature profile are highly non-linear for turbulent flows in the vicinity of walls.

The aim of wall functions is to model the vicinity of the wall by substituting the Dirichlet condition on the fluid velocity and on the scalars such as the temperature ($\underline{u}_{fb} = \underline{v}_{wall}$, $T_{fb} = T_{wall}$ where \underline{v}_{wall} is the velocity of the wall and T_{wall} is the temperature of the wall) by a Robin-type boundary condition linking the wall shear stress to the velocity of the fluid, and the thermal wall flux to the temperature within the first cell.

5.4.1 Velocity boundary condition for smooth walls and rough walls

We assume it is projected onto the tangent plane to the wall (if it is not, then the code projects it). The fluid velocity in the reference frame attached to the wall ("relative" velocity) projected to the wall writes $\underline{u}_{I'}^r \equiv (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{u}_{I'} - \underline{v}_{wall})$.

The orthonormal coordinate system attached to the wall writes $\hat{\mathcal{R}} = (\underline{t}, -\underline{n}, \underline{b})$:

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 47/400
---------	--	--

Y			h_{int}	
symbol	name	units	homogeneous to	units
\underline{u}	velocity	$m.s^{-1}$	$\frac{\mu + \mu_t}{I'F}$	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
P	pressure	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$\frac{\Delta t}{I'F}$	$s.m^{-1}$
T	temperature	K	$\frac{\lambda + C_p\mu_t/\sigma_t}{I'F}$	$kg.s^{-3}.K^{-1}$
				$W.m^{-2}.K^{-1}$
h	enthalpy	$m^2.s^{-2}$	$\frac{\lambda + C_p\mu_t/\sigma_t}{I'F}$	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
		$J.kg^{-1}$		
Y	scalar	unit of(Y)	$\frac{K}{I'F}$	$kg.m^{-2}.s^{-1}$

Y			D^{imp}	
symbol	name	units	homogeneous to	units
\underline{u}	velocity	$m.s^{-1}$	$((\mu + \mu_t) \underline{\nabla} \underline{u}) \cdot \underline{n}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
p	pressure	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	$(\Delta t \underline{\nabla} P) \cdot \underline{n}$	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
T	temperature	K	$((\lambda + C_p\mu_t/\sigma_t) \underline{\nabla} T) \cdot \underline{n}$	$kg.s^{-3}$
				$W.m^{-2}$
h	enthalpy	$m^2.s^{-2}$	$(\lambda/C_p + \mu_t/\sigma_t) \underline{\nabla} H) \cdot \underline{n}$	$kg.s^{-3}$
		$J.kg^{-1}$		$W.m^{-2}$
Y	scalar	unit of (Y)	$K \underline{\nabla} Y \cdot \underline{n}$	$kg.m^{-2}.s^{-1}. \text{unit of } (Y)$

Table 5.2: Values and unities of h_{int} et D^{imp} is common cases.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 48/400
---------	--	--

- $\underline{t} = \frac{\underline{u}_{I'}^r}{|\underline{u}_{I'}^r|}$ is the unit vector parallel to the projection of the relative velocity at I' , $\underline{u}_{I'}^r$, in the plane tangent to the wall (*i.e.* orthogonal to \underline{n}),
- $-\underline{n}$ is the unit vector orthogonal to the wall and directed towards the interior of the computational domain,
- \underline{b} is the unit vector which completes the positively oriented coordinate system.

In this reference-frame the wall distance of the cell centre to the wall \overline{IF} is denoted by y .

The objective of wall functions is to increase the exchange coefficient to reflect the higher level of mixing effectively taking place in the near wall cell due to turbulence and due to effectively much sharper gradients of the computed variable than the linear profile assumed inside each cell by Finite Volumes discretisation. The end result (Cf (I.5.27)) will be to correct the laminar coefficient, $h_{int} = \lambda/y$, by a dimensionless analytical function (a "wall function") u^+ that represents the realistic non-linear profile. The correction is moreover proportional to the cell centre to wall dimensionless distance, y^+ , over which a linear profile assumption may or may not be appropriate. These functions u^+ and y^+ that depends on the level of turbulent kinetic energy, are made dimensionless by:

- either the wall shear stress τ_{wall} only (this is called "one scale friction velocity" wall function),
- or by the wall shear stress τ_{wall} and the turbulent kinetic energy (this is called "two friction velocity scales").

When the mesh is made fine enough to capture the sharp variations of the variables near the wall, wall functions are no longer needed, variables are simply given Dirichlet values at the wall and the laminar exchange coefficient is correct. However the more basic versions of the turbulence models ("high Reynolds" $k - \varepsilon$ or Reynolds stress transport) will not be able to automatically "relaminarise" (*i.e.* reduce the turbulent mixing effect to zero at the correct rate of decay as y tends toward 0) and erroneous predictions will result (generally too much friction or heat transfer). When using a refined near wall mesh, "down to the wall" or "low Reynolds" versions of the turbulence models must be selected (*e.g.* $v^2 - f$ or elliptic blending models). However in this case one must make sure the mesh is fine enough.

To allow use of standard high Reynolds models whatever the mesh density, "scalable wall functions" can be activated. This consist in shifting slightly the wall outside of the mesh if the first cell lies in the viscous sub-layer. "Scalable wall function" only work with the "two friction velocity scales" version.

The wall functions are usually derived from Eddy Viscosity Models such as $k - \varepsilon$, thus the coming sections assume that $\underline{\underline{R}} = \frac{2}{3}k\underline{\underline{1}} - \nu_T\underline{\underline{S}}$.

One friction velocity scale

The simplified momentum balance in the first boundary cell reads:

$$(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_{wall}. \quad (\text{I.5.12})$$

Let u^* be the friction velocity defined by:

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}, \quad (\text{I.5.13})$$

the equation (I.5.12) can be rewritten:

$$\left(1 + \frac{\mu_T}{\mu}\right) \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1, \quad (\text{I.5.14})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 49/400
---------	--	--

where $u^+ \equiv |\underline{u}_{I'}^r|/u^*$ and $y^+ \equiv yu^*/\nu$.

The mixing length model states $\nu_T = L_m^2 S$, where the stain rate S reduces to $\frac{\partial u_{I'}^r}{\partial y}$ in the wall vicinity. The mixing length is proportional to the wall distance according to the Prandtl model

$$L_m = \kappa y, \quad (I.5.15)$$

where $\kappa = 0.42$ is the Karman constant.

Two areas are therefore defined, one where $\mu_T/\mu \ll 1$ called the viscous sub-layer where μ_T/μ is neglected in (I.5.14) the velocity profile is found to be linear:

$$u^+ = y^+, \quad (I.5.16)$$

the other where $\frac{\mu_T}{\mu} \gg 1$ and the velocity profile becomes logarithmic:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{log}, \quad (I.5.17)$$

where $C_{log} = 5.2$.

(I.5.16) is valid for $y^+ < 5$ and (I.5.17) for $y^+ > 30$ so there is a gap (corresponding to the so called buffer layer) which more sophisticated models can cover, but they are not detailed here. Instead we introduce a dimensionless limit distance which crudely separates the viscous sub-layer from the logarithmic region writes y_{lim}^+ . Its value is $1/\kappa$ in general (to ensure the continuity of the velocity gradient) and 10.88 in LES (to ensure the continuity of the velocity).

The u^* is computed by iteratively solving(I.5.16) or (I.5.17):

$$u^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\underline{u}_{I'}^r| \nu}{y}} & \text{if } \frac{|y \underline{u}_{I'}^r|}{\nu} < y_{lim}^+, \\ \begin{cases} (u^*)^0 = \exp(-\kappa C_{log}) \frac{\nu}{y} \\ (u^*)^{q+1} = \frac{\kappa |\underline{u}_{I'}^r| + (u^*)^q}{\ln\left(\frac{y (u^*)^q}{\nu}\right) + \kappa C_{log} + 1} \end{cases} & \text{otherwise solve iteratively in } q \end{cases} \quad (I.5.18)$$

Therefore, the value of $\frac{y^+}{u^+}$ in the two layers reads:

$$\begin{cases} \frac{y^+}{u^+} = 1 & \text{if } y^+ < y_{lim}^+, \\ \frac{y^+}{u^+} = \frac{y^+}{\frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{log}} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (I.5.19)$$

Two friction velocity scales

The simplified momentum balance (I.5.12) still holds, but is non-dimensioned not only by the wall shear stress but also the turbulent kinetic energy. More precisely, let $u_k = \sqrt{\sqrt{C_\mu} k}$ be the friction velocity based on the turbulent kinetic energy in the first cell.

This definition is in fact valid only for high- y^+ values and a blending is performed in case of the intensity of turbulence is very low:

$$u_k \equiv \sqrt{g \frac{\nu |\underline{u}_{I'}^r|}{y} + (1-g) \sqrt{C_\mu} k}, \quad (I.5.20)$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 50/400
---------	--	---

where g is a blending factor defined by $g = \exp\left(-\frac{\sqrt{k}y}{11\nu}\right)$ (see []).

The friction velocity u^* is now defined by:

$$u^* \equiv \frac{\tau_{wall}}{\rho u_k}. \quad (\text{I.5.21})$$

Equation (I.5.12) can now be rewritten:

$$\left(1 + \frac{\mu_T}{\mu}\right) \frac{\partial u^+}{\partial y_k^+} = 1, \quad (\text{I.5.22})$$

where $u^+ \equiv \frac{|u_{I'}|}{u^*}$ but $y_k^+ \equiv \frac{y u_k}{\nu}$.

Let us now remark that $\nu_T = C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k} C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} = u_k L_m$ where $L_m = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ is the integral length scale. Again using the Prandtl model (I.5.15), the following equation is obtained:

$$\left(1 + \frac{1}{\kappa y_k^+}\right) \frac{\partial u^+}{\partial y_k^+} = 1. \quad (\text{I.5.23})$$

The two areas defined in the previous section (I.5.19) that are the viscous sub-layer and the logarithmic layer still hold, but with y_k^+ instead of y^+ :

$$\begin{cases} \frac{y_k^+}{u^+} = 1 & \text{if } y_k^+ < y_{lim}^+, \\ \frac{y_k^+}{u^+} = \frac{y_k^+}{\frac{1}{\kappa} \ln(y_k^+) + C_{log}} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{I.5.24})$$

Rough wall functions

When specifying a rough wall function with z_0 as roughness, the value of $\frac{y^+}{u^+}$ reads:

$$\frac{y^+}{u^+} = \frac{y^+}{\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y + z_0}{z_0}\right) + C_{log}}. \quad (\text{I.5.25})$$

Wall shear stress with wall functions

The previous sections can be summarized as follows:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = \frac{\mu}{I'F} \frac{y^+}{u^+} (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{u}_{I'} - \underline{u}_{wall}) \quad (\text{I.5.26})$$

where the rescaling factor $\frac{y^+}{u^+}$ depends on the wall function is given in (I.5.19) or (I.5.24). Note that the wall shear stress is therefore parallel to the wall and fully implicit if the θ -scheme on the velocity is implicit.

The internal pair of boundary condition coefficient for the diffusive term for the velocity are

$$\begin{cases} \underline{A}_{ib}^f &= -h_{fluid} (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot \underline{u}_{wall} - h_{hint} (\underline{n} \cdot \underline{u}_{wall}) \underline{n}, \\ \underline{B}_{ib}^f &= h_{fluid} (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) + h_{int} \underline{n} \otimes \underline{n}, \end{cases} \quad (\text{I.5.27})$$

where

$$h_{fluid} = \frac{\mu}{I'F} \frac{y^+}{u^+}. \quad (\text{I.5.28})$$

Velocity gradient boundary condition with wall functions

The gradient of the fluid velocity is of great importance for turbulence models as it appears in the production term. Moreover the profile of dissipation is even less linear than u^+ (it is hyperbolic) and would also require a wall function. A common correction in open literature is to directly modify these source term in the near wall cell volume integral. However this deeply modifies the code structure and the linear system solver. In order to implement this while still remaining within the standard boundary condition structure, the current code version follows the suggestion of [BM00] which consists in prescribing a slip velocity at the wall so that the velocity gradient evaluated inside the cell by the standard Finite Volumes linear profile is more consistent with wall function.

A dedicated boundary condition for the velocity gradient is therefore derived in presence of wall function.

To be consistent with the logarithmic law giving the ideal tangential velocity profile. On the first hand, the theoretical gradient is:

$$\left(\frac{\partial u^r}{\partial y}\right)_{I'}^{\text{theo}} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (\text{I.5.29})$$

On the other hand, the normal finite volumes gradient of the tangential velocity reduces in the case of a regular orthogonal mesh (see notations in Figure I.5.2):

$$\left(\frac{\partial u^r}{\partial y}\right)_{I'}^{\text{calc}} = \frac{u_G^r - u_F^r}{2y} = \frac{\frac{u_I^r + u_J^r}{2} - u_F^r}{2y} \quad (\text{I.5.30})$$

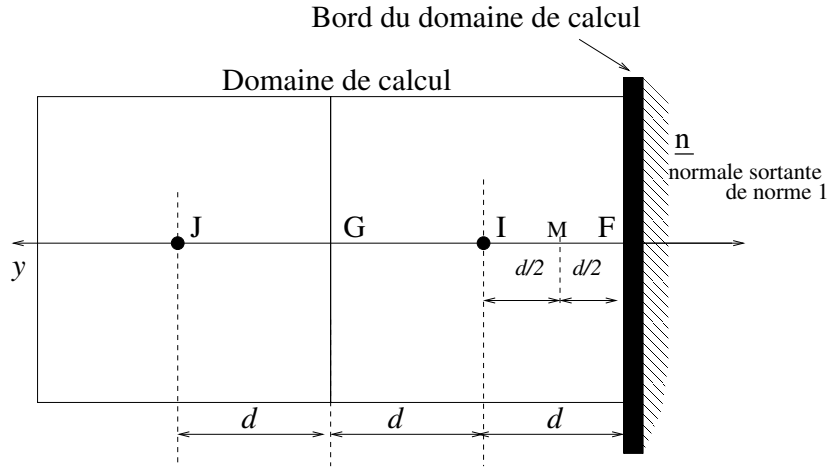


Figure I.5.2: Boundary cell - Orthogonal mesh.

We then assume that u_J^r can be obtained from u_I^r and from the gradient of u^r calculated in G from the logarithmic law $u_J^r = u_I^r + 2y \frac{u^*}{\kappa 2y}$ and we thus obtain equalizing (I.5.29) and (I.5.30) (the formula is extended without any precaution to non-orthogonal meshes):

$$u_F^r = u_{I'}^r - \frac{3u^*}{2\kappa} \quad (\text{I.5.31})$$

The normal derivative at the wall is prescribed to zero. If the value obtained for y^+ at the wall is lower than y_{lim}^+ , a no-slip condition is prescribed. Finally, one can also make explicit the velocity of the wall in the final expression: The internal pair of boundary condition coefficient for the diffusive term for

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 52/400
---------	--	--

the velocity are

$$\begin{cases} \underline{A}_{ib}^g &= (1 - \text{cofimp}) (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot \underline{u}_{wall} + (\underline{u}_{wall} \cdot \underline{n}) \underline{n}, \\ \underline{B}_{ib}^g &= \text{cofimp} (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}), \end{cases} \quad (\text{I.5.32})$$

where $\text{cofimp} = 1 - \frac{3}{2\kappa u^+}$ if $y^+ > y_{lim}^+$, and $\text{cofimp} = 0$ otherwise.

5.4.2 Scalar boundary condition for smooth walls

In this section, the wall functions applied to transported scalars Y (such as the temperature T for instance) are described. The reference "Convection Heat Transfer", Vedat S. Arpaci and Poul S. Larsen, Prentice-Hall, Inc was used. The approach is really similar to what is performed on the fluid velocity:

- if the wall value Y_{wall} is imposed, the Dirichlet boundary condition is substituted by a Robin-type one where the diffusive flux is function of the cell centre scalar value,
- if a Neumann value is imposed (that is to say that the user has prescribed the flux of Y), then the wall function is used to evaluate the corresponding wall value Y_{wall} which is displayed by the code.

Let us recall that $q_{ib}(K_{fb}, Y)$ is the wall diffusive flux for the scalar Y , and the simplified scalar balance reads:

$$q_{ib}(K_{fb}, Y) = - \left(K_{fb} + C \frac{\mu_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (\text{I.5.33})$$

Remark 5.5 *the flux is positive if it enters the fluid domain, as shown by the orientation of the y axis*

The following considerations are presented using the general notations. In particular, the Prandtl-Schmidt number writes $\sigma = \frac{\mu C}{K}$. When the considered scalar Y is the temperature T , we have

- $C = C_p$ (specific heat capacity),
- $\alpha = \lambda$ (molecular conductivity),
- $\sigma = \frac{\mu C_p}{\lambda} = Pr$ (Prandtl number),
- $\sigma_T = Pr_T$ (turbulent Prandtl number),
- $q_{ib} = \frac{D_{ib}(\lambda_{fb}, T)}{|\underline{S}|_{fb}} = \left(\lambda + \frac{C_p \mu_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial y}$ (flux in $W.m^{-2}$).

In order to make (I.5.33) dimensionless, we introduce Y^* defined using the flux at the boundary q_{ib} :

$$Y^* \equiv - \frac{q_{ib}}{\rho C u_k} \quad (\text{I.5.34})$$

For the temperature, we thus have:

$$T^* \equiv - \frac{q_{ib}}{\rho C_p u_k} \quad (\text{I.5.35})$$

We then divide both sides of equation (I.5.33) by q_{ib} and after some algebrae it comes:

$$1 = \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_T} \frac{\nu_T}{\nu} \right) \frac{\partial Y^+}{\partial y^+} \quad (\text{I.5.36})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 53/400
---------	--	--

where

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu_T = \frac{\mu_T}{\rho} \quad y^+ = \frac{y u_k}{\nu} \quad Y^+ = \frac{Y - Y_{wall}}{Y^*} \quad (\text{I.5.37})$$

5.4.3 The three layers wall function of Arpaci and Larsen

In order to compute the theoretical scalar profile, we integrate equation (I.5.36) to obtain Y_l^+ . The only difficulty then consists in prescribing a variation law of $\mathcal{K} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_T} \frac{\nu_T}{\nu}$.

In the fully developed turbulent region (far enough from the wall, for $y^+ \geq y_2^+$), a mixing length hypothesis models the variations of ν_T :

$$\nu_T = \kappa y u_k \quad (\text{I.5.38})$$

Additionally, the molecular diffusion of Y (or the conduction when Y represents the temperature) is negligible compared to its turbulent diffusion: therefore we neglect $\frac{1}{\sigma}$ compared to $\frac{1}{\sigma_T} \frac{\nu_T}{\nu}$. Finally we have:

$$\mathcal{K} = \frac{\kappa y^+}{\sigma_T} \quad (\text{I.5.39})$$

On the contrary, in the near-wall region (for $y^+ < y_1^+$) the turbulent contribution becomes negligible compared to the molecular contribution and we thus neglect $\frac{1}{\sigma_T} \frac{\nu_T}{\nu}$ compared to $\frac{1}{\sigma}$.

It would be possible to restrict ourselves to these two regions, but Arpaci and Larsen suggest the model can be improved by introducing an intermediate region ($y_1^+ \leq y^+ < y_2^+$) in which the following hypothesis is made:

$$\frac{\nu_T}{\nu} = a_1 (y^+)^3 \quad (\text{I.5.40})$$

where a_1 is a constant whose value is obtained from experimental correlations:

$$a_1 = \frac{\sigma_T}{1000} \quad (\text{I.5.41})$$

Thus the following model is used for \mathcal{K} (see a sketch in Figure I.5.3):

$$\mathcal{K} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \text{if } y^+ < y_1^+ \\ \frac{1}{\sigma} + \frac{a_1 (y^+)^3}{\sigma_T} & \text{if } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ \frac{\kappa y^+}{\sigma_T} & \text{if } y_2^+ \leq y^+ \end{cases} \quad (\text{I.5.42})$$

The values of y_1^+ and y_2^+ are obtained by calculating the intersection points of the variations laws used for \mathcal{K} .

The existence of an intermediate region depends upon the values of σ . Let's first consider the case where σ cannot be neglected compared to 1. In practise we consider $\sigma > 0,1$ (this is the common case when scalar Y represents the air or the water temperature in normal temperature and pressure conditions). It is assumed that $\frac{1}{\sigma}$ can be neglected compared to $\frac{a_1 (y^+)^3}{\sigma_T}$ in the intermediate region. We thus obtain:

$$y_1^+ = \left(\frac{1000}{\sigma} \right)^{\frac{1}{3}} \quad y_2^+ = \sqrt{\frac{1000\kappa}{\sigma_T}} \quad (\text{I.5.43})$$

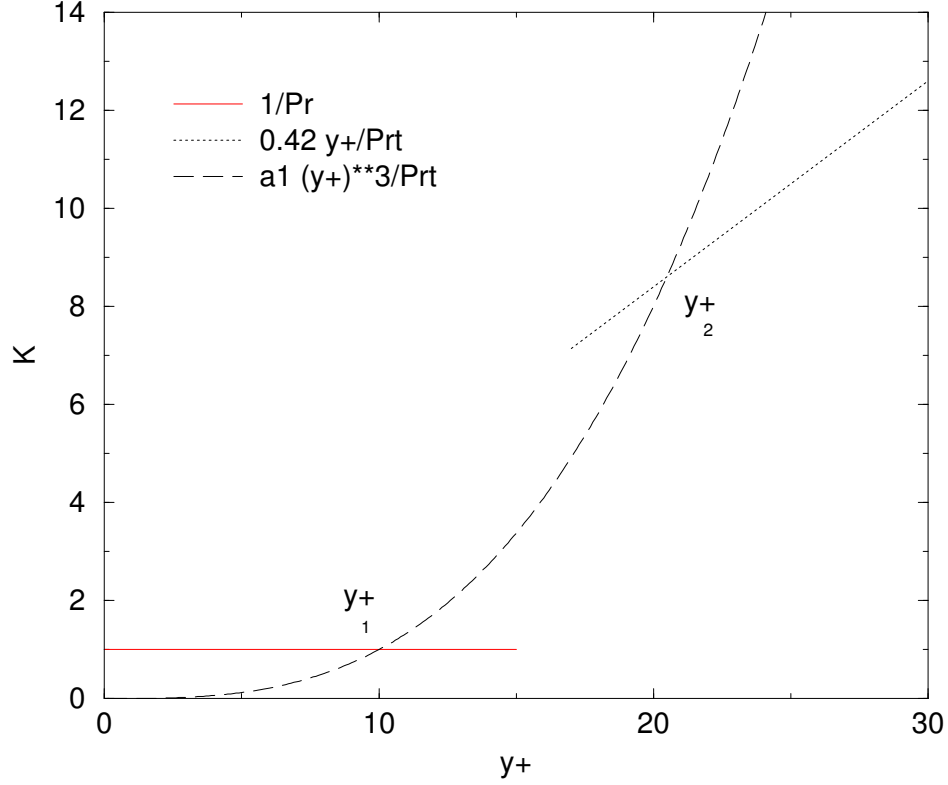


Figure I.5.3: $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_T} \frac{\nu_T}{\nu}$ as a function of y^+ obtained for $\sigma = 1$ and $\sigma_T = 1$.

The dimensionless equation (I.5.36) is integrated under the same hypothesis and we obtain the law of $\frac{y^+}{Y^+}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{y^+}{Y^+} = \frac{1}{\sigma} & \text{if } y^+ < y_1^+ \\ \frac{y^+}{Y^+} = \frac{y^+}{a_2 - \frac{\sigma_T}{2a_1}(y^+)^2} & \text{if } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ \frac{y^+}{Y^+} = \frac{y^+}{\frac{\sigma_T}{\kappa} \ln(y^+) + a_3} & \text{if } y_2^+ \leq y^+ \end{array} \right. \quad (\text{I.5.44})$$

where a_2 and a_3 are integration constants, which have been chosen to obtain a continuous profile of Y^+ :

$$a_2 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} \quad a_3 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma_T}{2\kappa} \left(1 + \ln \left(\frac{1000\kappa}{\sigma_T} \right) \right) \quad (\text{I.5.45})$$

Let's now study the case where σ is much smaller than 1. In practise it is assumed that $\sigma \leq 0.1$ (this is for instance the case for liquid metals whose thermal conductivity is very large, and who have Prandtl number of values of the order of 0.01). The intermediate region then disappears and the coordinate of the interface between the law used in the near-wall region and the one used away from the wall is given by:

$$y_0^+ = \frac{\sigma_T}{\kappa\sigma} \quad (\text{I.5.46})$$

The dimensionless equation (I.5.36) is then integrated under the same hypothesis, and the law of Y^+

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 55/400
---------	--	---

is obtained:

$$\begin{cases} \frac{y^+}{Y^+} = \frac{1}{\sigma} & \text{if } y^+ \leq y_0^+ \\ \frac{y^+}{Y^+} = \frac{y^+}{\frac{\sigma_t}{\kappa} \ln\left(\frac{y^+}{y_0^+}\right) + \sigma y_0^+} & \text{if } y_0^+ < y^+ \end{cases} \quad (\text{I.5.47})$$

Wall diffusive flux with wall functions

The previous sections can be summarized as follows:

$$q_{ib} = \frac{C\mu}{I'F} \frac{y^+}{Y^+} (Y_{I'} - Y_{wall}) \quad (\text{I.5.48})$$

where the rescaling factor $\frac{y^+}{Y^+}$ depends on the wall function is given in (I.5.44) if $\sigma > 0.1$ or (I.5.47) if $\sigma \leq 0.1$.

The internal pair of boundary condition coefficient for the diffusive term for the variable Y are

$$\begin{cases} A_{ib}^f &= -h_{fluid} Y_{wall}, \\ B_{ib}^f &= h_{fluid}, \end{cases} \quad (\text{I.5.49})$$

where $h_{fluid} = \frac{C\mu}{I'F} \frac{y^+}{Y^+}$.

5.4.4 Outlet boundary condition on the pressure

In this section the boundary condition on the pressure at the outlet is detailed. Some assumptions are made to derive this boundary condition which consists of a Dirichlet (combined with a homogeneous Neumann on the velocity) based on the pressure field at the previous time step. On basic configurations such as a channel or a pipe where the outlet is orthogonal to the flow, the shape of the pressure profile in a surface parallel to the outlet is approximately the shape of the pressure profile at the outlet. This hypothesis is valid for established flows, far from any perturbation. In this configuration one can write:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \tau} = 0,$$

where \underline{n} is the outward normal vector and $\underline{\tau}$ is any vector in the boundary face.

Then remark that the value at the boundary face f_b is linked to the pressure value in I' by the relationship:

$$P_{f_b} = P_{I'} + \underline{\nabla}_i P \cdot \underline{I'F}.$$

If moreover we assume that the pressure gradient in the normal direction is uniform, and that all the I' related to the outlet faces are on a single plane parallel to the outlet, then the value of $\underline{\nabla}_i P \cdot \underline{I'F}$ is constant for all the faces and denoted R .

Furthermore, the pressure is defined up to a constant, so the code chooses to fix the pressure at P_0 to a given outlet boundary face f_b^{imp} . Therefore the pressure field is shifted by the constant $R_0 = P_0 - P_{f_b}^{imp} = P_0 - (P_{I'}^{imp} + R)$.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 56/400
---------	--	--

All that together gives

$$\begin{aligned}
P_{f_b} &= P_{I'} + R + R_0, \\
&= P_{I'} + R + P_0 - \left(P_{I'}^{imp} + R \right), \\
&= P_{I'} + \underbrace{P_0 - P_{I'}^{imp}}_{\text{constant denoted by } \tilde{R}}, \\
&= P_{I'} + \tilde{R}.
\end{aligned} \tag{I.5.50}$$

To conclude, the outlet boundary condition on the pressure is a Dirichlet based on the value in I' (at the previous time step) and shifted to imposed the value P_0 at a given face f_b .

5.4.5 Free inlet/outlet boundary condition on the pressure increment

In this section the boundary condition on the pressure increment at the free inlet is detailed. For the other variables (even the pressure itself), the treatment is similar to §5.4.4.

Let us start with the Bernoulli relation ship between a boundary face f linked to a point on the same stream line far away from the computational domain:

$$P_f - \rho_f \underline{g} \cdot (\underline{x}_f - \underline{x}_0) + \frac{1+K}{2} \rho_f \underline{u}_f \cdot \underline{u}_f = P_\infty - \rho_\infty \underline{g} \cdot (\underline{x}_\infty - \underline{x}_0) + \frac{1}{2} \rho_\infty \underline{u}_\infty \cdot \underline{u}_\infty, \tag{I.5.51}$$

where K is a possible head loss of the fluid between the infinity and the boundary face entrance (which the user may play with to model the non-computed domain).

Assuming that the stream line is horizontal, that the density is constant over the stream line and that the fluid velocity is zero at the infinity, the Equation (I.5.51) becomes:

$$P_f^* = -\frac{1+K}{2} \rho_f \underline{u}_f \cdot \underline{u}_f, \tag{I.5.52}$$

where we recall that P^* is the dynamic pressure.

For stability reasons, the Equation (I.5.52) is implicit in time as follows:

$$P_f^{*,n+1} = -\frac{1+K}{2} \rho_f \underline{u}_f^n \cdot \underline{u}_f^{n+1}. \tag{I.5.53}$$

This implicitation is crucial to make the calculations stable.

The prediction-correction velocity-pressure coupling algorithm requires boundary conditions on the pressure increment (computed in the correction step), and therefore relation (I.5.53) is derived to obtain boundary conditions on the pressure increment. Recall that the correction step reads:

$$\frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho^n \underline{\tilde{u}})}{\Delta t} = -\underline{\nabla} \delta P, \tag{I.5.54}$$

the pressure increment $\delta P = P^{*,n+1} - P^{*,n}$ at the face is consequently given by:

$$\delta P_f = -P_f^{*,n} - \frac{1+K}{2} \rho_f \underline{u}_f^n \cdot \left(\underline{\tilde{u}} - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \delta P \right)_f. \tag{I.5.55}$$

Neglecting the tangential velocity component at the entering faces ($(\rho \underline{u})_f^n \simeq (\rho \underline{u})_f^n \cdot \underline{n} \underline{n} = \frac{\dot{m}_f}{|S|_f} \underline{n}$) and approximating $P_f^{*,n}$ with its cell-center value, Equation I.5.55 reads:

$$\delta P_f = -P_i^{*,n} - \frac{1+K}{2} \frac{\dot{m}_f}{|S|_f} \left(\underline{\tilde{u}} \cdot \underline{n} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial n} \right)_f. \tag{I.5.56}$$

Variable		Admissible Values						
Velocity	\underline{u}	1	2	3	4	5	6	9
Pressure	P	1	2	3				
Scalar turbulent variables	$k, \varepsilon, \varphi, \bar{f}, \omega$	1	2	3		5	6	
Reynolds stresses	R_{ij}	1	2	3	4	5	6	
Y (except variances)	Y	1	2	3		5	6	
Variance of a variable Y		1	2	3				

Table 5.3: Admissible values of boundary conditions for all variables.

Noting that $\left. \frac{\partial \delta P}{\partial n} \right|_f = \frac{\delta P_f - \delta P_i}{I'F}$, (I.5.56) is rewritten as:

$$\delta P_f = A_{\delta P}^g + B_{\delta P}^g \delta P_i, \quad (\text{I.5.57})$$

with:

$$\begin{aligned} A_{\delta P}^g &= \frac{1}{1 + CFL} \left(-P_i^{*,n} - \frac{1 + K}{2} \frac{\dot{m}_f}{|S|_f} \tilde{\underline{u}}_f \cdot \underline{n} \right), \\ B_{\delta P}^g &= \frac{CFL}{1 + CFL}, \end{aligned} \quad (\text{I.5.58})$$

where the CFL is defined as:

$$CFL = -\frac{1 + K}{2} \frac{\Delta t \dot{m}_f}{\rho_f |S|_f}. \quad (\text{I.5.59})$$

Remark 5.6 CFL is a positive quantity for ingoing flows, which ensures stability.

Remark 5.7 The formulation (I.5.59) is nothing else but a convective outlet on the pressure increment (see §5.3.4).

Checking step

Before computing the pairs of boundary condition coefficients, a step of checking is performed. Basically, the code checks that the user has given a boundary condition to all boundary faces, and that the setting between all the variables is compatible (see Table 5.3).

Chapter 6

Algebrae

See § [E](#).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 59/ 400
---------	--	--

6.1 Iterative process

6.2 Linear algebrae

Part II

Advanced modelling

Chapter 7

Turbulence modelling

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 62/400
---------	--	---

7.1 Eddy viscosity Models (*EV*M)

In this section eddy viscosity hypothesis is made which states that the Reynolds stress tensor is aligned with the rate of strain $\underline{\underline{S}}$:

$$\rho \underline{\underline{R}} = \frac{2}{3} \rho k \underline{\underline{1}} - 2\mu_T \underline{\underline{S}}^D \quad (\text{II.7.1})$$

7.1.1 Equations for the variables k and ε (standard $k - \varepsilon$ model)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla k \cdot (\rho \underline{\underline{u}}) - \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] &= \mathcal{P} + \mathcal{G} - \rho \varepsilon + \Gamma k^{in} + ST_k, \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \varepsilon \cdot (\rho \underline{\underline{u}}) - \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} [\mathcal{P} + (1 - C_{\varepsilon 3}) \mathcal{G}] - \rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \Gamma \varepsilon^{in} + ST_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{II.7.2})$$

where \mathcal{P} is the production term created by mean shear:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\rho \underline{\underline{R}} : \nabla \underline{\underline{u}} = - \left[-2\mu_t \underline{\underline{S}}^D + \frac{2}{3} \rho k \underline{\underline{1}} \right] : \underline{\underline{S}}, \\ &= 2\mu_t \underline{\underline{S}}^D : \underline{\underline{S}}^D - \frac{2}{3} \rho k tr(\nabla \underline{\underline{u}}), \end{aligned} \quad (\text{II.7.3})$$

and \mathcal{G} is the production term created by gravity effects:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_t} \nabla \rho \cdot \underline{\underline{g}}. \quad (\text{II.7.4})$$

The dynamic turbulent viscosity reads:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (\text{II.7.5})$$

ST_k and ST_ε stand for the additional source terms prescribed by the user (in rare cases only).

The constants of the model are given in the Table (7.1):

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Table 7.1: Standard $k - \varepsilon$ model constants [LS74].

$C_{\varepsilon 3} = 0$ if $\mathcal{G} \geq 0$ (unstable stratification) and $C_{\varepsilon 3} = 1$ if $\mathcal{G} \leq 0$ (stable stratification).

7.1.2 $k - \varepsilon - \overline{v^2}/k$ elliptic blending turbulence model

The BL- $\overline{v^2}/k$ [BL12] is a elliptic-blending based $\overline{v^2} - f$ model. It is a low Reynolds number model and as such the wall distance of the first off-wall cell centre must be of order of unity when expressed in viscous unit.

The following gives details about the model followed by some description of its implementation into *Code_Saturne*.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 63/400
---------	--	--

Model description

This eddy viscosity model solves for k and ε as turbulence variables, representing respectively the turbulent kinetic energy and its dissipation rate, as well as two non-dimensional variables, $\varphi = \overline{v^2}/k$ and α . The first of these latter two represents the ratio of wall normal Reynolds stress to turbulent kinetic energy (thus being a measure of the near-wall turbulence anisotropy) and the second is a wall proximity sensitive quantity (*i.e.* it takes the value 0 at a wall and 1 in the far field). The coefficient α is solved for via an elliptic equation (L representing the turbulence length-scale):

$$\alpha - L^2 \Delta \alpha = 1 \quad (\text{II.7.6})$$

The φ transport equation reads:

$$\frac{d\varphi}{dt} = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h - P \frac{\varphi}{k} + \frac{2}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla \varphi \cdot \nabla k + \text{div} \left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\varphi} \right) \nabla \varphi \right] \quad (\text{II.7.7})$$

The aim of the BL- $\overline{v^2}/k$ model is to stand as a code-friendly version of the $\overline{v^2} - f$ model of [Dur91]. In both the wall normal stress $\overline{v^2}$ is used in the ν_T definition to correctly represent the near-wall turbulence damping (T is the turbulence time-scale and $C_\mu = 0.22$ is calibrated in the logarithmic layer of a channel flow):

$$\nu_T = C_\mu \varphi k T \quad (\text{II.7.8})$$

The elliptic blending approach mainly allows for an improved robustness. Indeed, the original $\overline{v^2} - f$ approach solves for the quantity $\overline{v^2}$ and a variable f derived from the wall normal pressure term¹ and defined as:

$$f = \frac{1}{k} \left[\underbrace{-\frac{2}{\rho} \overline{v \partial_y p}}_{\phi_{22}^*} - 2\nu \overline{\nabla v \cdot \nabla v} + \varepsilon \frac{\overline{v^2}}{k} \right] \quad (\text{II.7.9})$$

with f being solved using an elliptic equation:

$$f - L^2 \Delta f = f_h \quad (\text{II.7.10})$$

Similarly to the α equation, this elliptic operator allows to represent the non-local effects induced by the incompressibility of turbulence. The quantity f_h is obtained by considering homogeneous modelling (*i.e.* $\Delta f = 0$) of f using for pressure strain-rate term the model of [LRR75]. The correct asymptotic behaviour of the variable $\overline{v^2}$ is ensured by the following boundary condition:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-20\nu^2 \overline{v^2}}{\varepsilon y^4} \quad (\text{II.7.11})$$

This requires a balance between $O(y^4)$ terms which proves to be numerically problematic. In the BL- $\overline{v^2}/k$ model the elliptic equation is simply solved for a non-dimensional quantity with an homogeneous Dirichlet boundary condition, therefore alleviating the stiffness associated to the boundary condition of the elliptic variable. The inclusion of α in the definition of f allows a blending between the near-wall and the homogeneous form $f = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h$ in the φ equation. For the f_h model the proposal of [SSG91] is preferred for its better reproduction of the pressure term in a boundary layer.

The model also solves a k - ε system somewhat modified compared to the one generally adopted by $\overline{v^2} - f$ models. The k and ε equations adopted by the BL- $\overline{v^2}/k$ model read:

$$\frac{dk}{dt} = P - \varepsilon + \text{div} \left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - C_{\varepsilon 3} (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} 2\nu \nu_t (\partial_k \partial_j U_i) (\partial_k \partial_j U_i) \quad (\text{II.7.12})$$

¹the pressure term ϕ_{22}^* is not decomposed but modelled as a whole

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 64/400
---------	--	--

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}^*\varepsilon}{T} + \operatorname{div} \left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] \quad (\text{II.7.13})$$

The k equation includes the so-called “E term” dependent on the second velocity derivatives squared, similar to that introduced into the ε equation by [JL72], and the homogeneous part of the dissipation rate is independently accounted for (following the suggested formulation of [JH02]). This implies that the quantity ε resolved by the model has a different definition to that conventionally employed in k - ε schemes (*i.e.* a change of variable $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} E + \frac{1}{2} \nu \partial_{jj} k$). This has the beneficial effect of reducing the Reynolds number dependence of the near-wall value of the turbulence variables and of the time and length scales, T and L respectively, yielding better near-wall prediction of the blending variable and the turbulent viscosity, and hence mean flow quantities, for both low and high Reynolds numbers.

A further feature is that the coefficient $C_{\varepsilon 2}^*$ is taken as a function of the turbulent transport of k to ε ratio (as proposed by [PLD96]):

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 2} - \alpha^3 (0.4 - C_{\varepsilon 2}) \tanh \left(\left| \frac{\operatorname{div} (\nu_t / \sigma_k \nabla k)}{\varepsilon} \right|^{3/2} \right) \quad (\text{II.7.14})$$

This improves the predictions of the dissipation rate in the defect layer of a channel flow (where the turbulent transport becomes significant) and yields better results in wake flows [PLD96]. Full details of the scheme can be found in [BL12].

in extenso definition

Equations: Equations for the turbulence kinetic energy k , the turbulence dissipation rate ε , the non-dimensionnal wall-normal Reynolds stress component $\varphi = v^2/k$ and the elliptic blending parameter α are given in Eq. (II.7.12), Eq. (II.7.13), Eq. (II.7.7) and Eq. (II.7.6) respectively.

Scales and constants: The definition of the turbulent viscosity is given in Eq. (II.7.15). The near-wall and far field models, f_w and f_h for the φ source term, f are expressed in Eq. (II.7.16) and Eq. (II.7.17). The definition of the variable coefficient $C_{\varepsilon 2}^*$ is given in Eq. (II.7.18)

Finally the time and length scales entering the definition of ν_t , the equation of ε and the definition of f_h as well as the equation of α are given in Eq. (II.7.19). The viscous limiter used as lower bound of the time scale has a finite wall value and therefore enables avoid the singularity consecutive to the definition of the ε sink term if the term $-C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon^2}{k}$ were used in place of $-C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon}{T}$. Similarly a viscous (Kolmogorov) limiter is used for the length-scale definition L to avoid numerical problems which would raise in the α equation numerical resolution if the length-scale were to tend to zero at wall. The upper limiter T_{lim} is used to enforce the Bradshaw hypothesis (proportionality between shear stress and turbulent kinetic energy in a boundary layer $\overline{uv}/k = C (= 0.6/\sqrt{3})$ with the present approach), and corrects, in a wider range of cases, the excessive production rate returned by the eddy viscosity formulation (*i.e.* allowing a linear rather than a quadratic dependance on S for large strain rate).

$$\nu_t = C_\mu \varphi k \min(T, T_{lim}) \quad (\text{II.7.15})$$

$$f_w = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\varphi}{k} \quad (\text{II.7.16})$$

$$f_h = -\frac{1}{T} \left(C_1 - 1 + C_2 \frac{P}{\varepsilon} \right) \left(\varphi - \frac{2}{3} \right) \quad (\text{II.7.17})$$

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 2} + \alpha^3 (C_{\varepsilon 4} - C_{\varepsilon 2}) \tanh \left(\left| \frac{\operatorname{div} (\nu_t / \sigma_k \nabla k)}{\varepsilon} \right|^{3/2} \right) \quad (\text{II.7.18})$$

$$\begin{cases} L = \sqrt{C_L^2 \left(\frac{k^3}{\varepsilon^2} + C_\eta^2 \frac{\nu^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}} \right)} \\ T = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} + C_T^2 \frac{\nu}{0.6\varepsilon}} \\ T_{lim} = \frac{0.6}{\sqrt{6}C_\mu\varphi\sqrt{\underline{S}:\underline{S}}} \end{cases} \quad (\text{II.7.19})$$

Constants: Table 7.2 gives the value adopted for the constants of the model.

$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	$C_{\varepsilon 4}$	σ_k	σ_ε	
1.44	1.83	2.3	0.4	1	1.5	
C_μ	C_T	C_L	C_η	C_1	C_2	σ_φ
0.22	4	0.164	75	1.7	0.9	1

Table 7.2: Constants of the BL- ν^2/k model

Boundary conditions

The turbulent variables wall boundary conditions are given in Eq. (II.7.20) (y being the wall-distance)²:

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0} k = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\nu k}{y^2} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \varphi = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7.20})$$

Remaining issues

- The actual source term $(\partial_k \partial_j U_i)(\partial_k \partial_j U_i)$ should be written as $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_k \partial_j U_i)^2$ and not

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_k \partial_j U_i) \right)^2 \text{ as it is, incorrectly, in the present implementation.}$$

- Issues regarding grid/code dependency of this term have already been raised [Iac01]. Alternatives may be worth investigating, such as $(\partial_{jj} U_i)^2$.

7.1.3 Spalart-Allmaras model

The Spalart-Allmaras turbulence model [SA92] is an *EVM RANS* model developed in the 90's in aeronautics, and is therefore well suited for studying a flow around an air-plane wing for instance.

²Note that the ε wall boundary condition is halved compared to what is used in the $\varphi - \bar{f}$ model (`iturb=50`) consequently to the change of variable described above

Model description

It consists of a transport equation of a scalar $\tilde{n}u$ directly linked to the turbulent viscosity μ_T .

More recently, this model has been extended by Aupoix [AS03] to rough wall for studying atmospheric flows. It was also successfully applied to flow in turbo-machinery where variants of this model have been developed.

The transport equation of $\tilde{\nu}$ (pseudo turbulent viscosity, which tends to 0 far from walls) reads³

$$\rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \tilde{\nu} \cdot (\rho \underline{u}) = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left[\text{div} ((\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} \rho |\nabla \tilde{\nu}|^2 \right] + \Gamma (\tilde{\nu}^{in} - \tilde{\nu}^n) + ST^{imp} \tilde{\nu} + ST^{exp} \quad (\text{II.7.21})$$

where $\tilde{\nu}^{in}$ is the injection value of $\tilde{\nu}$ in case of any mass source term, and ST^{imp} and ST^{exp} are respectively the implicit and explicit additional user source terms and where

$$\begin{aligned} \mu_T &= \rho f_{v1} \tilde{\nu} \\ f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \\ \chi &= \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \\ \tilde{S} &= \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \\ f_{v2} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}}{\nu + \tilde{\nu} f_{v1}} \\ f_w &= g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \\ g &= r + c_{w2} (r^6 - r) \\ r &= \min \left[\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}; 10 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.7.22})$$

The constants are defined in Table 7.3.

σ	c_{b1}	c_{b2}	κ	c_{w2}	c_{w3}	c_{v1}	c_{w1}
$\frac{2}{3}$	0.1355	0.622	0.41	0.3	2	7.1	$\frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$

Table 7.3: Constants of the Spalart Allmaras model.

³the present formulation is a simplified one presented by Aupoix [AS03] where transition terms have been neglected.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 67/400
---------	--	--

Time stepping

Equation (II.7.21) can be rewritten with the θ -scheme presented in Chapter 3 as

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\left[\frac{\rho}{\Delta t} + \max \left(c_{w1} f_w \rho \frac{\tilde{\nu}^n}{d^2} - c_{b1} \rho \tilde{S}, 0 \right) - \theta T_s^{imp} + \theta \Gamma^n \right] \delta \tilde{\nu}^{n+1}}^{\text{implicit term}} \\
& + \theta \left(\underbrace{\underline{\nabla} \delta \tilde{\nu}^{n+1} \cdot (\rho \underline{u})}_{\text{implicit part of the convection}} - \underbrace{\text{div} \left[\frac{\mu + \rho \tilde{\nu}}{\sigma} \underline{\nabla} \delta \tilde{\nu}^{n+1} \right]}_{\text{implicit part of the diffusion}} \right) \\
& = \\
& - \underline{\nabla} \tilde{\nu}^n \cdot (\rho \underline{u}) + \text{div} \left[\frac{\mu + \rho \tilde{\nu}}{\sigma} \underline{\nabla} \tilde{\nu}^n \right] \\
& + c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu}^n - c_{w1} f_w \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{c_{b2} \rho}{\sigma} |\underline{\nabla} \tilde{\nu}|^2 + \Gamma (\tilde{\nu}^{in} - \tilde{\nu}^n) + ST^{imp} \tilde{\nu}^n + ST^{exp}
\end{aligned} \tag{II.7.23}$$

where $\delta \tilde{\nu}^{n+1} \equiv \tilde{\nu}^{n+1} - \tilde{\nu}^n$.

Remark 7.1 The term $\left(c_{w1} f_w \rho \frac{\tilde{\nu}^n}{d^2} - c_{b1} \rho \tilde{S} \right)$ is implicit so that $\tilde{\nu}$ does not require any clipping to remain positive if an upwind convective scheme and no flux reconstruction are chosen.

Boundary conditions

Smooth walls: the boundary condition on $\tilde{\nu}$ is a standard zero Dirichlet boundary condition on the walls (see Chapter 5 for the encoding of standard Dirichlet conditions).

Note that the model gives a log law outside of the viscous sub-layer, *i.e.*:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu} & \simeq \kappa u^* d \\
\tilde{S} & \simeq \frac{u^*}{\kappa d}
\end{aligned} \tag{II.7.24}$$

Rough walls: In case of rough walls, let us define:

$$\begin{aligned}
\chi_{rough} & = \chi + c_{R1} \frac{h_s}{d_{rough}} \\
d_{rough} & = d + d_0 \\
d_0 & = \exp(-8.5\kappa) h_s \simeq 0.03 h_s
\end{aligned} \tag{II.7.25}$$

where h_s is the roughness size. The Dirichlet boundary conditions is replaced by the following Neumann boundary condition:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} \right|_{f_b} = \frac{\tilde{\nu}|_{f_b}}{d_0} \tag{II.7.26}$$

A development in series is then written:

$$\tilde{\nu}_{f_b} = \tilde{\nu}_{I'} - \underline{\nabla}_{f_b} \tilde{\nu} \cdot \underline{I'F} \tag{II.7.27}$$

Finally, that is a Robbin type boundary condition formulated as follows in *Code_Saturne*: which reads as follows in *Code_Saturne*:

$$\tilde{\nu}_{f_b} = A_{f_b}^g - B_{f_b}^g \tilde{\nu}_{I'} \tag{II.7.28}$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 68/400
---------	--	--

with $A_{fb}^g = 0$ and

$$B_{fb}^g = \frac{d_0}{d_0 + \overline{I'F}} \quad (\text{II.7.29})$$

Inlet: the profile of $\tilde{\nu}$ is imposed, the value is deduced from the profiles imposed on k and ε for a $k - \varepsilon$ turbulence model assuming $\tilde{\nu} \simeq \nu_T$.

7.2 Differential Reynolds Stress Models (*DRSM*)

In this section, the presented models solve a differential transport equation on the Reynolds' stresses tensor.

7.2.1 Equations for the Reynolds stress tensor components R_{ij} and ε (*LRR* model)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{R}} \cdot (\rho \underline{\underline{u}}) - \text{div} (\mu \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{R}}) = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\mathcal{P}}} + \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{\Phi}} - \rho \underline{\underline{\varepsilon}} + \Gamma \underline{\underline{R}}^{in} + \underline{\underline{ST}}_{R_{ij}}, \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}} \varepsilon \cdot (\rho \underline{\underline{u}}) - \text{div} (\mu \underline{\underline{\nabla}} \varepsilon) = d + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} [\underline{\underline{\mathcal{P}}} + \underline{\underline{G}}] - \rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \Gamma \varepsilon^{in} + \underline{\underline{ST}}_{\varepsilon}, \end{array} \right. \quad (\text{II.7.30})$$

where $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ stands for the turbulence production tensor associated with mean flow strain-rate and $\underline{\underline{G}}$ stands for the production- tensor associated with buoyancy effects:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{P}}} &= -\rho [\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^T + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{R}}], \\ \underline{\underline{G}} &= [\underline{\underline{r}} \otimes \underline{\underline{g}} + \underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{r}}]. \end{aligned} \quad (\text{II.7.31})$$

where $\underline{\underline{r}} \equiv \overline{\rho' \underline{\underline{u}}'}$ is modelled through a Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH): $\underline{\underline{r}} \simeq \frac{3}{2} \frac{C_\mu}{\sigma_t} \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \rho$ and $G_\varepsilon = \text{Max} \left(0, \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{G}} \right)$.

Remark 7.2 Under Boussinesq assumption (ρ varies only in the buoyancy term in the momentum equation, linearly with respect to θ , the velocity density correlation becomes $\rho \overline{\theta' \underline{\underline{u}}'}$).

With these definitions the following relations hold:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{R}}, \\ \mathcal{P} &= \frac{1}{2} \text{tr} (\underline{\underline{\mathcal{P}}}), \end{aligned} \quad (\text{II.7.32})$$

$\underline{\underline{\Phi}}$ is the term representing pressure-velocity correlations:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\phi}}_1 + \underline{\underline{\phi}}_2 + \underline{\underline{\phi}}_3 + \underline{\underline{\phi}}_w, \quad (\text{II.7.33})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\phi}}_1 &= -\rho C_1 \frac{\varepsilon}{k} \underline{\underline{R}}^D, \\ \underline{\underline{\phi}}_2 &= -C_2 \underline{\underline{\mathcal{P}}}^D, \\ \underline{\underline{\phi}}_3 &= -C_3 \underline{\underline{G}}^D. \end{aligned} \quad (\text{II.7.34})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 69/400
---------	--	--

The term $\underline{\underline{\phi}}_w$ is called *wall echo term* (by default, it is not accounted for: see [html programmer's documentation of the subroutine](#) and the appendix Q).

The dissipation term, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, is considered isotropic:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{\underline{1}}. \quad (\text{II.7.35})$$

The turbulent diffusion terms are:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{d}} &= C_S \underline{\underline{\text{div}}} \left(\rho \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{R}} \right), \\ d &= C_\varepsilon \text{div} \left(\rho \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (\text{II.7.36})$$

In the rare event of mass sources, ΓR_{ij}^{in} and $\Gamma \varepsilon^i$ are the corresponding injection terms. $ST_{R_{ij}}$ and ST_ε are also rarely used additional source terms that can be prescribed by the user.

C_μ	C_ε	C_{ε_1}	C_{ε_2}	C_1	C_2	C_3	C_S	C'_1	C'_2
0.09	0.18	1.44	1.92	1.8	0.6	0.55	0.22	0.5	0.3

Table 7.4: Model constants of the *LRR* $R_{ij} - \varepsilon$ model [LRR75].

7.3 Large-Eddy Simulation (*LES*)

7.3.1 Standard Smagorinsky model

$$\mu_t = \rho \left(C_s \overline{\Delta} \right)^2 \sqrt{2 \underline{\underline{\overline{S}}} : \underline{\underline{\overline{S}}}}, \quad (\text{II.7.37})$$

where $\underline{\underline{\overline{S}}}$ the filtered strain rate tensor components:

$$\underline{\underline{\overline{S}}} = \underline{\underline{\overline{S}}}^S = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\overline{u}}} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\overline{u}}})^T \right]. \quad (\text{II.7.38})$$

Here, $\overline{u_i}$ stands for the i^{th} resolved velocity component ⁴.

C is the Smagorinsky constant. Its theoretical value is 0.18 for homogeneous isotropic turbulence, but the value 0.065 is classic for channel flow.

$\overline{\Delta}$ is the filter width associated with the finite volume formulation (implicit filtering which corresponds to the integration over a cell). The value recommended for hexahedral cells is: $\overline{\Delta} = 2 |\Omega_i|^{\frac{1}{3}}$ where $|\Omega_i|$ is the volume of the cell i .

7.3.2 Dynamic Smagorinsky model

A second filter is introduced: it is an explicit filter with a characteristic width $\widetilde{\Delta}$ superior to that of the implicit filter ($\overline{\Delta}$). If Y is a discrete variable defined over the computational domain, the variable obtained after applying the explicit filter to Y is noted \widetilde{Y} . Moreover, with:

⁴In the case of implicit filtering, the discretization in space introduces a spectral low pass filter: only the structures larger than twice the size of the cells are accounted for. Those structures are called "the resolved scales", whereas the rest, $u_i - \overline{u_i}$, is referred to as "unresolved scales" or "sub-grid scales". The influence of the unresolved scales on the resolved scales have to be modelled.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 70/400
---------	--	--

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{L}} &= \widetilde{\underline{u} \otimes \underline{u}} - \widetilde{\underline{u}} \otimes \widetilde{\underline{u}}, \\
\underline{\underline{\tau}} &= \overline{\underline{u} \otimes \underline{u}} - \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{u}}, \\
\underline{\underline{T}} &= \widetilde{\underline{u} \otimes \underline{u}} - \widetilde{\underline{u}} \otimes \widetilde{\underline{u}},
\end{aligned} \tag{II.7.39}$$

Germano identity reads:

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{\tau}}. \tag{II.7.40}$$

Both dynamic models described hereafter rely on the estimation of the tensors $\underline{\underline{T}}$ and $\underline{\underline{\tau}}$ as functions of the filter widths and of the strain rate tensor (Smagorinsky model). The following modelling is adopted⁵:

$$\begin{aligned}
T_{ij} - \frac{1}{3} tr \underline{\underline{T}} \delta_{ij} &= -2C \tilde{\Delta}^2 |\widetilde{\underline{D}_{ij}}| \widetilde{\underline{D}_{ij}}, \\
\tau_{ij} - \frac{1}{3} tr \underline{\underline{\tau}} \delta_{ij} &= -2C^* \overline{\Delta}^2 |\overline{\underline{D}_{ij}}| \overline{\underline{D}_{ij}},
\end{aligned} \tag{II.7.41}$$

where \bar{u} stands for the *implicit-filtered* value of a variable u defined at the centres of the cells and \widetilde{u} represents the *explicit-filtered* value associated with the variable u . It follows that the numerical computation of L_{ij} is possible, since it requires the explicit filtering to be applied to implicitly filtered variables only (*i.e.* to the variables explicitly computed).

On the following assumption:

$$C = C^*, \tag{II.7.42}$$

and assuming that C^* is only slightly non-uniform, so that it can be taken out of the explicit filtering operator, the following equation is obtained:

$$\underline{\underline{L}}^D = C \left(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}} \right), \tag{II.7.43}$$

with:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= -2\tilde{\Delta}^2 |\widetilde{\underline{D}_{ij}}| \widetilde{\underline{D}_{ij}}, \\
\beta_{ij} &= -2\overline{\Delta}^2 |\overline{\underline{D}_{ij}}| \overline{\underline{D}_{ij}}.
\end{aligned} \tag{II.7.44}$$

Since we are left with six equations to determine one single variable, the least square method is used⁶. With:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{L}} - C \left(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}} \right), \tag{II.7.45}$$

the value for C is obtained by solving the following equation:

$$\frac{\partial \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}}{\partial C} = 0. \tag{II.7.46}$$

Finally:

$$C = \frac{\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{L}}}{\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{M}}}, \tag{II.7.47}$$

with

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}}. \tag{II.7.48}$$

⁵ δ_{ij} stands for the Kroeneker symbol.

⁶ $tr \underline{\underline{L}}$ has no effect for incompressible flows.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 71/400
---------	--	---

This method allows to calculate the Smagorinsky "constant" dynamically at each time step and at each cell. However, the value obtained for C can be subjected to strong variations. Hence, this approach is often restricted to flows presenting one or more homogeneous directions (Homogeneous Isotropic Turbulence, 2D flows presenting an homogeneous span-wise direction...). Indeed, in such cases, the model can be (and is) stabilized by replacing C by an average value of C computed over the homogeneous direction(s).

For a general case (without any homogeneous direction), a specific averaging is introduced to stabilize the model: for any given cell of the mesh, the averaged Smagorinsky constant is obtained as an average of C over the "extended neighbouring" of the cell (the set of cells that share at least one vertex with the cell considered). More precisely, the average value (also denoted \bar{C} hereafter) is calculated as indicated below:

$$C = \frac{\widetilde{\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{L}}}}{\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{M}}} \quad (\text{II.7.49})$$

Chapter 8

Compressible flows

See § [A](#).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 73/ 400
---------	--	--

8.1 Density-based solver

Chapter 9

Combustion

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 75/400
---------	--	---

9.1 Introduction

9.1.1 Use & call

From a CFD point of view, combustion is a (sometimes very) complicated way to determine ρ , the density.

Depending on the presence of a match or not, two solutions exist, known as ignited and extinguished. From a numerical point of view, it means that these two solutions have two attraction basin; the more representative the model, the more difficult the stabilisation of the combustion (may be difficult to ignite).

However, combustion models needs few extra fields of scalar with regular transport equations, some of them with a reactive or interfacial source term.

This version of *Code_Saturne* focuses on steady industrial combustion processes; propagating fires are out of the present range (but in the short coming release).

In *Code_Saturne* modelling of combustion is able to deal with gas phase combustion (diffusion, premix, partial premix), and with solid or liquid finely dispersed fuels (fixed and fluidised beds are out of range).

Combustion of condensed fuels involves one-way interfacial flux due to phenomena in the condensed phase (evaporation or pyrolysis) and reciprocal ones (heterogeneous combustion and gasification). Many of the species injected in the gas phase are afterwards involved in gas phase combustion.

That is the reason why many modules are similar for gas, coal and fuel oil combustion modelling. Obviously, the thermodynamical description of gas species is similar in every version as close as possible to the JANAF rules.

All models are developed in both adiabatic and unadiabatic (permeatic : heat loss, *e.g.* by radiation) version, beyond the standard (-1, 0, 1), the rule to call models in **usppmo** is:

```

ippmod(index ; model) = -1    unused
ippmod(index ; model) =  0    simplest adiabatic version
ippmod(index ; model) =  1    simplest permeatic version (II.9.1)

```

and possibly:

```

ippmod(index ; model) = 2.p    p adiabatic version
ippmod(index ; model) = 2.p + 1 p permeatic version

```

Every permeatic version involves the transport of enthalpy (one more variable).

9.1.2 Gas combustion modelling

Gas combustion is limited by disponibility (in the same fluid particle) of both fuel and oxidizer and by kinetic effects (a lot of chemical reactions involved can be described using an Arrhenius law with high activation energy). The mixing of mass (atoms) incoming with fuel and oxydizer is described by a mixture fraction (mass fraction of matter incoming with fuel), this variable is not affected by combustion.

A progress variable is used to describe the transformation of the mixture from fuel and oxydant to products (carbon dioxide and so on). Combustion of gas is, traditionnaly, splitted in premix and diffusion regimes.

In premixed combustion process a first stage of mixing has been realised (without blast ...) and the mixture is introduced in the boiler (or combustor can). In common industrial conditions the combustion is mainly limited by the mixing of fresh gases (frozen) and burnt gases (exhausted) resulting in the inflammation of the first and their conversion to burnt ones ; so an assumption of chemistry

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 76/400
---------	--	---

much faster than mixing (characteristic time for chemistry much smaller than characteristic time for turbulent mixing) induces an intermittent regime. The gas flow is constituted of totally fresh and totally burnt gases (the flamme containing the gases during their transformation is extremely thin). With this previous assumptions, Spalding [S71] established the "Eddy Break Up" model, which allows a complete description of the combustion process with only one progress variable (mixture fraction is both constant - in time - and homogeneous - in space).

In diffusion flames the fuel and the oxydant are introduced by, at least, two inlets. In ordinary industrial conditions, their mixing is the main limitation and the mixture fraction is enough to qualify a fluid particle, but in turbulent flows a *Probability Density Function* of the mixture fraction is needed to qualify the thermodynamical state of the bulk. So, at least, both the mean and the variance of the mixture fraction are needed (two variables) to fit parameters of the pdf (the shape of whose is presumed).

Real world's chemistry is not so fast and, unfortunately, the mixing can not be as homogeneous as wished. The main part of industrial combustion occurs in partial premix regime. Partial premix occurs if mixing is not finished (at molecular level) when the mixture is introduced, or if air or fuel, are staggered, or if a diffusion flame is blown off. For these situations, and specifically for lean premix gas turbines [LW00] developed a model allowing a description of both mixing and chemical limitations. A collaboration between the LCD Poitiers [RCP04] and EDF R&D has produced a simpler version of their algorithm. Not only the mean and the variance of both mixture fraction and progress variable are needed but also their covariance (five variables).

9.1.3 Two-phase combustion modelling

Coal combustion is the main way to produce electricity in the world. Heavy fuel oil combustion have been hugely used to produce electrical energy. Biomass is a promising fuel to be used alone or in blend.

Advanced combustion process may include exhaust gases recycling, pure oxygen or steam injection, so this release of *Code_Saturne* takes into account three oxidizers (tracked by three mixture fractions).

Coal is a natural product with a very complex composition. During the industrial process of milling, the raw coal is broken in tiny particles of different sizes. After its introduction in the boiler, coal particles undergoes drying, devolatilisation (heating of coal turn it in a mixture of char and gases), heterogenous combustion (of char by oxygen in carbon monoxide), gasification (of char by carbon dioxide or by water steam in carbon monoxide), leaving ash particles.

The description of fuel evaporation is done with respect to its heaviness : after a minimum temperature is reached, the gain of enthalpy is splitted between heating and evaporation. This way the evaporation takes place on a range of temperature (which can be large). The total evaporation is common for light (domestic) oil but impossible for heavy ones : at high temperature, during the last evaporation, a craking reaction appears : so a particle similar to the char is leaved. The heterogeneous oxydation of this char particle is very similar to coal char ones.

Each of these phenomena are taken into account for some classes of particles : a solid class is carac-terised by a coal (it is useful to burn mixture of coals with differents ranks or mixture of coal with biomass ...) and an initial diameter, for heavy fuel oil, liquid classes refer to initial diameter (neither possibility of blending after injection nor cofiring with oil and coal). *Code_Saturne* computes the num-ber, the mass and the enthalpy for each class of particles by unit of mass of mixture; allowing the determination of local diameter and temperature (for each class; *e.g.* the finest will be be heated the fastest).

The main assumption is to solve only one velocity (and pressure) field: it means that the discrepancy of velocity between coal particles and gases is assumed to be negligible.

Due to the radiation, evaporation and heterogeneous combustion, temperature can be different for gas and different size particles : so the specific enthalpy of each particle class is solved.

The description of coal pyrolysis proposed by [K76] is used, leading to two source terms for light and

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 77/400
---------	---	---

heavy volatile matters (the moderate temperature reaction produces gases with low molecular mass, the high temperature reaction produces heavier gases and less char) represented by two passive scalars : mixture fractions. The description of the heterogeneous reaction (which produce carbon monoxide) produces a source term for the carbon: the corresponding mixture fraction is bounded far below one (the carbon can't be free, it is always in carbon monoxide form, mixed with nitrogen or other).

The retained model for the gas phase combustion is the assumption of diffusion flamelets surrounding particle (for a single particle or a cloud), this diffusion flame establish itself between a mixing of the previous gaseous fuels issued from fast phenomenon (pyrolysis or fuel evaporation) mixed in a local mean fuel and the mixing of oxidizers, water vapor (issued from drying) and carbon monoxide issued from slow phenomenon (heterogeneous oxydation and gasification of char). The PDF diffusion approach is used to describe the conversion of hydrocarbon to carbon monoxide (hydrocarbon conversion is assumed fast vs. mixing); the further conversion of carbon monoxide to carbon dioxide was (in previous release, still existing for fast first evaluation of carbon dioxide useful to initialize the kinetic model) ruled by mixing or is (now recommended for better prediction of carbon monoxide at outlet and corrosion risks) kinetically ruled with respect to the mean mass fraction and temperature (reach of equilibrium assumed slow vs. mixing). Special attention is paid to pollutant formation (conversion of H_2S to SO_2 involved in soot agglomeration, NO_x formation).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 78/400
---------	--	---

9.2 Thermodynamics

9.2.1 Introductrion

The description of the thermodynamical of gaseous mixture is as close as possible to the JANAF standard. The gases mixture is, often, considered as composed of some *global* species (*e.g.* oxidizer, products, fuel) each of them beeing a mixture (with known ratio) of *elementary* species (oxygen, nitrogen, carbon dioxide, ...).

A tabulation of the enthalpy of both elementary and global species for some temperatures is constructed (using JANAF polynoms) or read (if the user found useful to define a global specie not simply related to elementary ones; *e.g.* unspecified hydrocarbon known by C, H, O, N, S analysis and heating value). The thermodynamic properties of condensed phase are more simple: formation enthalpy is computed using properties of gaseous products of combustion with air (formation enthalpy of which is zero valued as O₂ and N₂ are reference state) and the lower heating value. The heat capacity of condensed phase is assumed constant and it is a data the user has to enter (in the corresponding data file dp_FCP or dp_FUE).

9.2.2 Gases enthalpy discretisation

A table of gases (both elementary species and global ones) enthalpy for some temperatures (the user choses number of points, temperature in dp_*** file) is computed (enthalpy of elementary species is computed using JANAF polynomia; enthalpy for global species are computed by weighting of elementary ones) or red (subroutine `pptbht`). Then the entahlpy is supposed to be linear vs. temperature in each temperature gap (i.e. continuous piece wise linear on the whole temperature range). As a consequence, temperature is a linear function of enthalpy; and a simple algorithm (subroutine `cothht`) allows to determine the enthalpy of a mixture of gases (for inlet conditions it is more useful to indicate temperature and mass fractions) or to determine temperature from enthalpy of the mixture and mass fractions of global species (common use in every fluid particle, at every time step).

9.2.3 Particles enthalpy discretisation

Enthalpy of condensed material is rarely known. Usually, only the low heating value and ultimate analysis are determined. So, using simple assumptions and the enthalpy of known released species (after burning with air) the formation enthalpy of coal or heavy oil can be computed. Assuming the thermal capacity is constant for every condensed material a table can be build with ... two (more is useless) temperatures, allowing the use of the same simple algorithm for temperature-enthalpy conversion. When intermediate gazeous species (volatile or vapour) are thermodynamically known, simple assumptions (*e.g.*: char is thermodynamically equivalent to pure carbon in reference state; ashes are inert) allow to deduce enthalpy for heterogeneous reactions (these energies have not to be explicitly taken in account for the energy balance of particles).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 79/400
---------	--	---

9.3 Gas combustion

Flames with gaseous fuels can be categorized in premix, diffusion or partial-premix.

9.3.1 Premix: Eddy Break Up

The original Spalding model [S71] was written for a situation where the whole boiler is filled with the same mixture (only one inlet); the motto of which is "*If it mixes, it burns*". If the chemistry is fast vs. mixing, fluid particles are made of fresh gases or of burned ones. This situation is described by a progress variable (valued 0 in fresh gases and 1 in burnt ones) with a source term: the reaction one. The mixture of totally fresh or totally burnt gases, called intermittency, leads to a maximal variance of the progress variable determined by the mean value of the progress variable.

$$C_{\max}^{\prime 2} = (C_{\text{moy}} - C_{\min}) \cdot (C_{\max} - C_{\text{moy}}) = C_{\text{moy}} \cdot (1 - C_{\text{moy}}) \quad (\text{II.9.2})$$

The mixing of fresh and burnt gases is the dissipation of this variance and it induces the conversion of fresh gases in burnt ones. So the source term for the (mean) progress variable is the dissipation of its (algebraic) variance. Be careful: in *Code_Saturne* the variable chosen to describe the reaction is the mass fraction of fresh gases (valued 1 in fresh and 0 in burnt), so:

$$S(Y_{\text{fg}}) = -C_{\text{ebu}} \frac{\epsilon}{k} \left[\rho Y_{\text{fg}} (1 - Y_{\text{fg}}) \right] \quad (\text{II.9.3})$$

Where C_{ebu} is a constant, supposedly "universal", fitted around 1.6 (only advanced users may adjust this value).

Some improvements have been proposed, and largely used, for situations with mixture fraction gradient (staggering of reactant(s)) but are not theoretically funded. The simplest extension is available (options 2 and 3) in *Code_Saturne* with one extra equation solved for f the mean of mixture fraction: the corresponding hypothesis is "*no variance for mixture fraction*" ... a little bit surprising in an EBU context (maximal variance for progress variable). The choice of the fresh gas mass fraction appears now to be quite relevant : the computation of species mass fraction can be done, with respect to the mean mixture fraction, both in fresh (the mass fraction of which is Y_{fg}) where species mass fraction are obvious and burnt gases (the mass fraction of which is $(1 - Y_{\text{fg}})$) among which species mass fraction come from a complete reaction assumption (as introduced hereafter for diffusion flame).

$$\begin{aligned} Y_{\text{fuel}} &= Y_{\text{fg}} \cdot f + (1 - Y_{\text{fg}}) \cdot \max \left(0 ; \frac{f - f_s}{1 - f_s} \right) \\ Y_{\text{Ox}} &= Y_{\text{fg}} \cdot (1 - f) + (1 - Y_{\text{fg}}) \cdot \max \left(0 ; \frac{f_s - f}{f_s} \right) \\ Y_{\text{prod}} &= (1 - Y_{\text{fg}}) \cdot \left(\frac{f}{f_s} ; \frac{1 - f}{1 - f_s} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9.4})$$

Where f_s is the stoichiometric mixture fraction.

In adiabatic conditions the specific enthalpy of gases (in every combustion model the considered enthalpy contains formation one and heat content, but no terms for velocity or pressure) is directly related to the mixture fraction (as long as the inlet temperature for air and fuel is known). When heat losses, like radiation, are taken into account, an equation has to be solved for the mean enthalpy (such an equation is needed so when some inlets have different temperatures -partial preheat- enthalpy is then used as an extra passive scalar). In industrial processes, the aim is often to transfer the heat from burnt gases to the wall; even for heat loss the wall temperature is near to the fresh gases temperature and the main heat flux takes place between burnt gases and wall. So, in *Code_Saturne*, the specific enthalpy of the fresh gases is supposed to be related to mixture fraction and the specific enthalpy of burnt gases is locally

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 80/400
---------	--	--

computed to reach the mean specific enthalpy. By this way every heat loss removed from the mean enthalpy is charged to the hottest gases.

$$\tilde{h} = Y_{fg} \cdot h_{fg}(\tilde{f}) + (1 - Y_{fg}) \cdot h_{bg} \quad \Leftrightarrow \quad h_{bg} = \frac{\tilde{h} - Y_{fg} \cdot h_{fg}(\tilde{f})}{1 - Y_{fg}} \quad (\text{II.9.5})$$

where \tilde{f} is here the local mean of the mixture fraction or a constant value (in the regular EBU model).

9.3.2 Diffusion: PDF with 3 points chemistry

In diffusion model, the combustion is assumed to be limited only by mixing (between air and fuel), so the reaction is assumed to reach instantaneously its equilibrium state and the temperature and concentrations can be computed for every value of the mixture fraction. In *Code_Saturne* the implemented version uses an extra hypothesis: the reaction is complete; so if the mixture is stoichiometric, the burnt gases contains only final products (none unburnt like CO, except definition of product including a specified ratio of CO). As a consequence, every concentration is a piecewise linear function of the mixture fraction (subroutines: `d3pphy`, `d3pint`, `cpcym`, `fucym`).

$$0 \leq f \leq f_s \quad ; \quad Y_i(f) = Y_{\text{air}} + \frac{f}{f_s} (Y_s - Y_{\text{air}}) \quad (\text{II.9.6})$$

$$f_s \leq f \leq 1 \quad ; \quad Y_i(f) = Y_s + \frac{f - f_s}{1 - f_s} (Y_{\text{fuel}} - Y_s) \quad (\text{II.9.7})$$

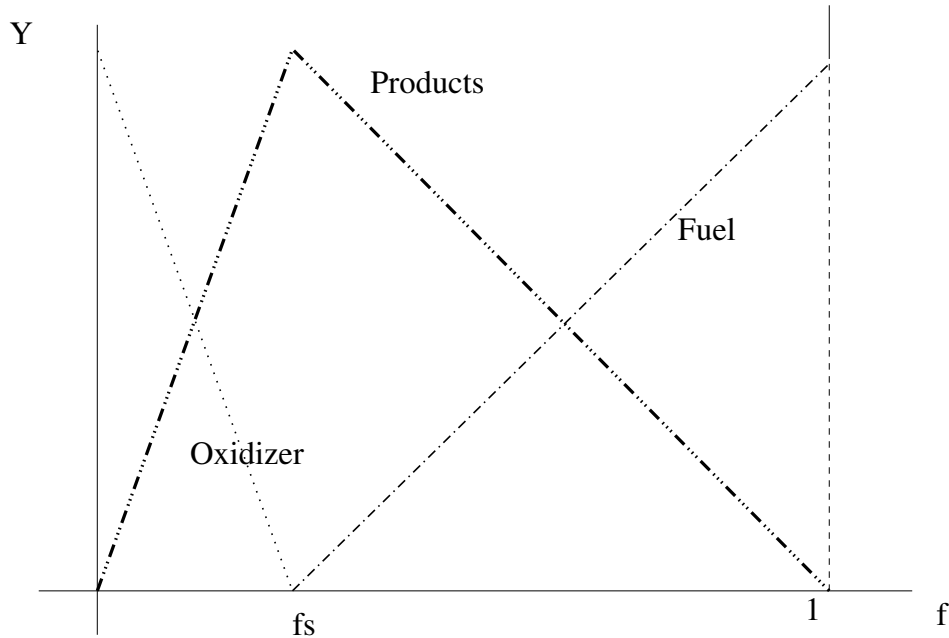


Figure II.9.1: Mass fraction of global species are piecewise linear with mixture fraction.

Where f_s is the stoichiometric mixture fraction, Y_s the concentrations in products of the complete reaction of a stoichiometric mixture (in such products, the chemical reaction is no more possible : inert). Beware to distinguish Y_{fuel} mass fraction of a species (depending on f) and Y_{fuel} mass fraction of species in the inlet condition for the fuel stream ($Y_{i,\text{fuel}} = Y_i(1)$ $Y_{i,\text{air}} = Y_i(0)$).

The diffusion model uses two equations for the mixture fraction and its variance. Both of them having no reaction term. The mean and the variance of the mixture fraction are used to fit parameter of a Probability Density Function, with a presumed form, for the mixture fraction. In *Code_Saturne* the

shape proposed by [BD78] with a rectangle and Dirac's peak is used (subroutines `copdf`, `cppdf`, `fupdf`).

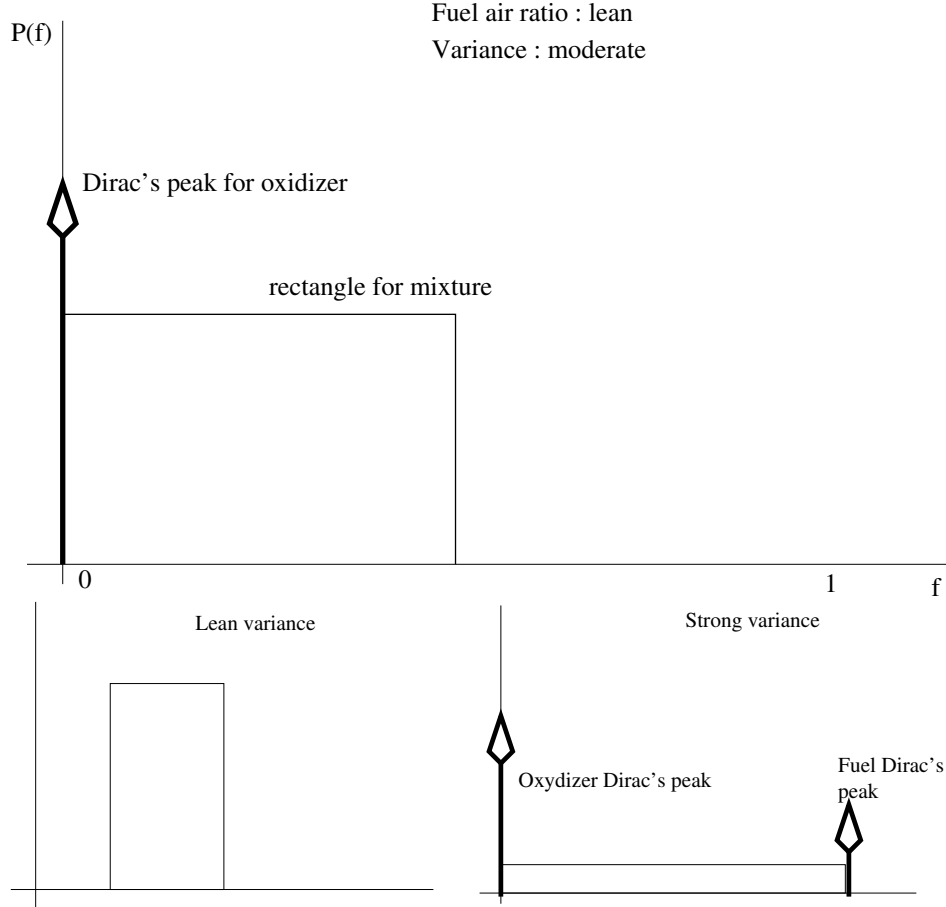


Figure II.9.2: Examples of presumed PDF: cheapest form.

The determination of the mean concentration is done by integrating the local concentration weighted by the probability density function. As a matter of fact, integrating the product of a piecewise linear function by a constant (height of the rectangle) is a very simple exercise: analytic solution is available (the original formulation [BD78] which uses β function was much more computationally expensive). In adiabatic condition, the specific enthalpy of the mixture is a linear function of the mixture fraction (the enthalpy is not modified by the reaction). As for premixed combustion, the following assumption is done "the hotter the gases, the worse the heat losses", so the enthalpy of pure oxidizer and fuel are supposed to be not modified in permeatic conditions, the enthalpy of products h_s (at the stoichiometric mixture fraction) is an unknown or auxiliary variable. The enthalpy of the mixture is supposed linear piecewise with f (like concentrations but with an unknown at f_s) and the resulting mean enthalpy (weighted by PDF) is linear in h_s . Fitting with the equation for the mean enthalpy (which takes in account radiation and other heat fluxes), h_s is determined and, consequently the temperature at f_s and the mean temperature can be computed.

As an example of the capabilities of the simple pdf used in *Code_Saturne*, computations for the determination of the value of this auxiliary variable are detailed hereafter.

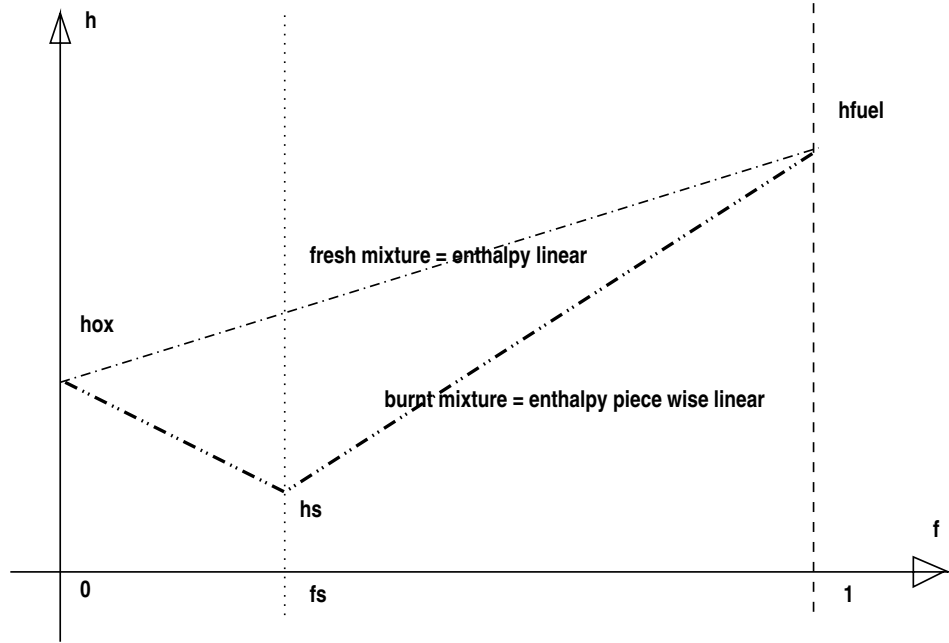


Figure II.9.3: Enthalpy of products is determined to take in account the heat losses.

$$\begin{aligned}
0 \leq f \leq f_s & \quad ; \quad h_\ell = h_{\text{Ox}} + (h_s - h_{\text{Ox}}) \frac{f}{f_s} \\
f_s \leq f \leq 1 & \quad ; \quad h_s = \frac{f_s \cdot h_{\text{fuel}} - h_s}{f_s - 1} + (h_s - h_{\text{fuel}}) \frac{f}{f_s - 1}
\end{aligned} \tag{II.9.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(f) \cdot P(f) df &= D_0 \cdot h_{\text{Ox}} + D_1 \cdot h_{\text{fuel}} \\
&+ \int_{f_{1,\ell} = \min(f_1, f_s)}^{f_{2,\ell} = \min(f_s, f_2)} h_\ell(f) \cdot H \cdot df \\
&+ \int_{f_{1,r} = \max(f_1, f_s)}^{f_{2,r} = \max(f_s, f_2)} h_r(f) \cdot H \cdot df
\end{aligned} \tag{II.9.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(f) \cdot P(f) df &= D_0 \cdot h_{\text{Ox}} + D_1 \cdot h_{\text{fuel}} \\
&+ H \cdot h_{\text{Ox}} \cdot (f_{2,\ell} - f_{1,\ell}) + H \cdot (h_s - h_{\text{air}}) \left\{ \frac{f_{2,\ell}^2 - f_{1,\ell}^2}{2 f_s} \right\} \\
&+ H \cdot \frac{f_s \cdot h_{\text{fuel}} - h_s}{f_s - 1} \cdot (f_{2,r} - f_{1,r}) + H \cdot (h_s - h_{\text{fuel}}) \left\{ \frac{f_{2,r}^2 - f_{1,r}^2}{2 (f_s - 1)} \right\}
\end{aligned} \tag{II.9.10}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 83/400
---------	--	--

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(f).P(f)df &= D_0.h_{\text{Ox}} + D_1.h_{\text{fuel}} \\
&+ \underbrace{H h_{\text{Ox}} (f_{2,\ell} - f_{1,\ell}) - H h_{\text{Ox}} \frac{(f_{2,\ell}^2 - f_{1,\ell}^2)}{2 f_s}}_{H_{\text{Ox}} ; 2 \text{ terms}} \\
&+ \underbrace{H h_{\text{fuel}} \frac{f_s (f_{2,r} - f_{1,r})}{(f_s - 1)} - H h_{\text{fuel}} \frac{(f_{2,r}^2 - f_{1,r}^2)}{2.(f_s - 1)}}_{H_{\text{fuel}} ; 2 \text{ terms}} \\
&+ \underbrace{H.h_s \left\{ \frac{(f_{2,\ell}^2 - f_{1,\ell}^2)}{2 f_s} - \frac{(f_{2,r} - f_{1,r})}{(f_s - 1)} + \frac{(f_{2,r}^2 - f_{1,r}^2)}{2 (f_s - 1)} \right\}}_{H^* ; \text{last terms}}
\end{aligned} \tag{II.9.11}$$

With h_ℓ enthalpy on the lean side of f_s , h_r enthalpy on the rich side; D_0 the Dirac's peak in pure air, D_1 Dirac's peak in pure fuel, f_1 begin of rectangle, f_2 end of rectangle, H height of rectangle.

This expression for enthalpy includes a last term linear in h_s , identification with the transported enthalpy (solved with source term for radiation and so on) allows to determine its value:

$$\int_0^1 h(f).P(f)df = \tilde{h} \quad \Leftrightarrow \quad h_s = \frac{\tilde{h} - [D_0.h_{\text{air}} + D_1.h_{\text{fuel}} + \{H_{\text{Ox}} + H_{\text{fuel}}\}]}{H^*} \tag{II.9.12}$$

9.3.3 Partial premix: Libby Williams models

Code_Saturne has been the test-bench for some versions of Libby-Williams model [LW00], like for the models implemented and then incremented by [RCP04] and [R05].

The Libby & Williams model have been developed to address the description of the combustor can of gas turbine in regime allowing a reduction of NOx production using (sometimes very) lean premix. By this way, the combustion occurs at moderate temperatures avoiding the hot spots which are favourable to thermal NOx production. Because of the moderate temperatures, the chemistry is no more so fast and the stability is questionable. To ensure it a diffusion flame called pilot takes place in the center of the combustor. So, if the main flow is premixed, both pure fuel and pure oxidiser are introduced in the combustor leading to continuous variation of the equivalence ratio (always the mixture fraction). This situation is clearly out of the range of both EBU and PDF models, moreover the limitation by the chemistry is needed (for stability studies).

Originally, Libby & Williams proposed a presumed PDF made of two Dirac's peaks, Ribert showed that this PDF could be determined with only the mean and the variance of the mixture fraction and a reactive variable (by now, the mass fraction of fuel is used). Then some undeterminations seem awkward and Robin *et al.* propose a four Dirac's peaks PDF whose parameters are determined with the same variables and the solved (transported) covariance (of the reactive variable and the mixture fraction) as an extra solved field. With the condition corresponding to every Dirac's peak, a global chemistry description is used (the source term for every variables is a weighting of the reaction fluxes).

With two peaks distribution, the two-variable PDF is restricted to one line, crossing the mean state and the slope of which is the ratio of variances (choice of the sign is user free, ... but relevant: expertise is needed). The correlation between variables is unity. On this line the distribution is supposed to obey a modified Curl model [Cur63].

With three or four peaks distribution, the whole concentration space is available and the determination of the covariance allows evolution of the correlation (with f and Yf , it has been shown that the correlation is positive in mixing layer and can become negative across the flame: the particle nearer of

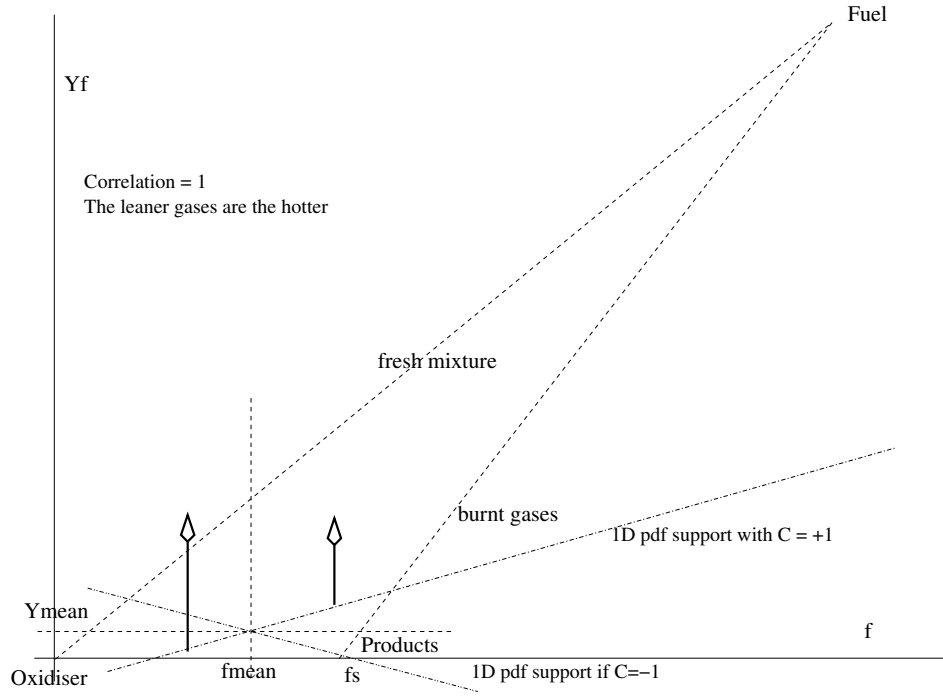


Figure II.9.4: PDF recommended by Libby & Williams: still undetermined.

stoichiometry being able to burn -then destroy Y_f - faster than the particles in poor regime).

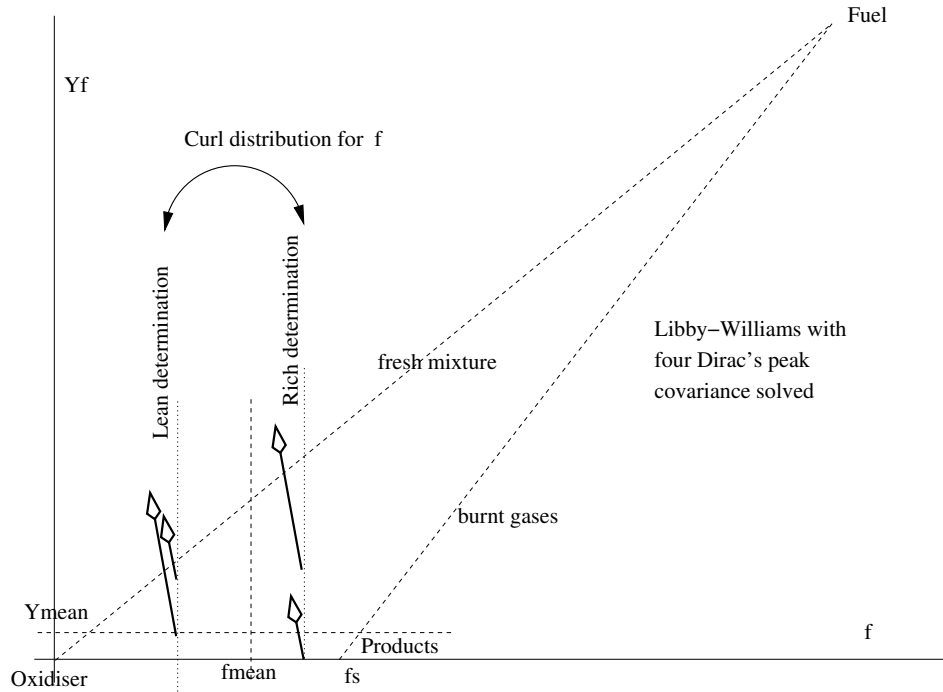


Figure II.9.5: PDF form in LWP approach: successive modified Curl distributions.

In adiabatic conditions, the temperature can be computed for every pair (f, Y_{fuel}) , allowing the determination of the kinetic constant.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 85/400
---------	--	--

As previously, with heat losses, it is assumed that the hottest gases have lost the more (of their thermal enthalpy), the enthalpy of the products at stoichiometric point ($f_s, 0$) is an auxiliary variable, the enthalpy being considered as a piecewise bilinear function. Fitting mean transported enthalpy and integrated ones, allows to determine the enthalpy of stoichiometric products, then the enthalpy and temperature in the peaks conditions and, *in fine* the reactions fluxes.

9.3.4 Numerical Recipies for PDF

Some applied mathematics are involved in pdf parameters determination (rectangle and modified Curl) and for integration (species mass fraction, temperature, density and so on).

Some tests, done by [Sap11] show weak discrepancies between species mass fraction with respect to the shape of the PDF (among Beta, rectangle and peaks, Curl; for similar mean during variance dissipation).

Rectangle and Dirac's peaks probability density function

This type of pdf is used in diffusion flames both for gas combustion or dispersed fuel ones (coal and heavy fuel oil). In gas mixture, the pdf is build for an equivalence ratio for fuel (inert scalar variable) ranging on $[0, 1]$. For dispersed fuel, due to vaporisation, or pyrolysis, and heterogeneous combustion two or three gaseous fuels are taken in account, each of them having its own inert scalar, so the PDF is build for an inert scalar which is the total of passive scalars for volatiles matter (coal and biomass) or hydrocarbon vapor (heavy fuel oil). The algorithm for pdf parameters determination, can be written in a general form on every variable's range.

If the allowed range for the variable is $[f_{\min}; f_{\max}]$, knowing the mean and variance of the variable allow to determine first the shape (alone rectangle, rectangle and one Dirac's peak at one boundary, two Dirac's peak at boundaries and rectangle) and then, the three pertinent parameters (three conditions given by momenta $m_0 = 1, m_1 = \text{mean}, m_2 = \text{mean}^2 + \text{variance}$).

1. For a lonesome rectangle Dirac's peak intensity is null, the three parameters are: the beginning and end values of the rectangle and its heighth.
2. For a rectangle with a Dirac's peak at one boundary (which is determined during the choice of shape), one of the rectangle edge is fixed at this boundary, so the three parameters are : the other rectangle edge, height of rectangle, intensity of the Dirac's peak.
3. For a two Dirac's peak distribution, both rectangle edges are at the boudaries, so the parameters are the rectangle height and the Dirac's peak intensity.

The choice between the four possible forms can be done by previous test on the variance. Defining v_1 and v_2 by:

$$\bar{f} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\bar{f}^2}{3} ; v_2 = \frac{\bar{f} \cdot (2 - 3\bar{f})}{3} \quad (\text{II.9.13})$$

$$\bar{f} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{(1 - \bar{f})^2}{3} ; v_2 = \frac{(1 - \bar{f}) \cdot (2 - 3(1 - \bar{f}))}{3} \quad (\text{II.9.14})$$

$$\forall \bar{f} \Rightarrow v_1 = \min \left(\frac{\bar{f}^2}{3}; \frac{(1 - \bar{f})^2}{3} \right) \quad (\text{II.9.15})$$

$$\forall \bar{f} \Rightarrow v_2 = \max \left(\frac{\bar{f} \cdot (2 - 3\bar{f})}{3}; \frac{(1 - \bar{f}) \cdot (2 - 3(1 - \bar{f}))}{3} \right) \quad (\text{II.9.16})$$

Depending on the value of variance and naming D_0 and D_1 , the Dirac's peak magnitude, f_2 and f_3 the beginning and end of the rectangle and h its height, the determination is:

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 86/400
---------	--	--

1. if the variance is lower than v_1 , the pdf is only made of a rectangle (symetrical with respect to the mean)

$$D_0 = D_1 = 0 ; f_2 = \tilde{f} - \sqrt{3\tilde{f}''^2} ; f_3 = \tilde{f} + \sqrt{3\tilde{f}''^2} \quad (\text{II.9.17})$$

2. if the variance is greater than v_2 , the pdf is made of two Dirac's peak and a rectangle (over all range); (be careful the mean of square is neither the variance nor the square of mean; but the sum of them)

$$f_2 = 0 ; f_3 = 1 ; D_0 = 3.\tilde{f}^2 - 4.\tilde{f} + 1 ; D_1 = 3.\tilde{f}^2 - 2.\tilde{f} \quad (\text{II.9.18})$$

3. if the variance is greater than v_1 and lower than v_2 , the pdf is made of only one Dirac's peak (in 0 if the mean is lower than one half in 1 otherwise) and a rectangle.

$$\tilde{f} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_1 = 0 ; f_2 = 0 ; f_3 = \frac{3.\tilde{f}^2}{2.\tilde{f}} ; D_0 = 1 - 2.\left(\frac{\tilde{f}}{f_3}\right) \quad (\text{II.9.19})$$

$$\tilde{f} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_0 = 0 ; f_3 = 1 ; f_2 = \frac{3.\tilde{f}^2 - 4.\tilde{f} + 1}{2.(\tilde{f} - 1)} ; D_1 = \frac{2.\tilde{f} - 1 - f_2}{1 - f_2}$$

4. every time, the height of the rectangle obeys the same relation :

$$h = \frac{1 - D_0 - D_1}{f_3 - f_2} \quad (\text{II.9.20})$$

Curl distribution

The Curl distribution is only composed of two Dirac's peaks. Such a distribution needs four parameters (two positions and two amplitudes), only two moments (mean and variance) are known, the completeness is the third, so an extra assumption is needed : the standard Curl distribution assumed amplitudes values (the mean for the richer, the remainder to one for the leaner), a modification of the Curl distribution is given by an extra constraint : use of recurrence relation between Beta function allows to determine the third moment (linked with skewness) and to modify amplitudes of peaks. In this *Code_Saturne* release, only regular Curl distribution is implemented and used (discrepancies in species mass fractions using the modified Curl are not worthy of this option introduction). Looking for P_1 and P_2 the amplitudes, and f_1 and f_2 the positions, with constraints from completeness, mean and variance, it comes :

$$P_1 + P_2 = 1 \Rightarrow P_2 = 1 - P_1 \quad (\text{II.9.21})$$

$$P_1.f_1 + P_2.f_2 = \tilde{f} \Rightarrow f_2 = \frac{\tilde{f} - P_1.f_1}{1 - P_1} \quad (\text{II.9.22})$$

$$P_1.f_1^2 + P_2.f_2^2 = \tilde{f}^2 = \tilde{f}^2 + \tilde{f}''^2 \Rightarrow \quad (\text{II.9.23})$$

$$f_1 = \tilde{f} - \sqrt{\tilde{f}''^2 \cdot \frac{1 - P_1}{P_1}} \quad (\text{II.9.24})$$

$$f_2 = \tilde{f} + \sqrt{\tilde{f}''^2 \cdot \frac{P_1}{1 - P_1}} \quad (\text{II.9.25})$$

f_1 and f_2 may be inside $[0, 1]$, the first proposal by Curl (in the context of liquid-liquid extraction, the interfacial mass flux does not modify mass of each phases) is:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \tilde{f}; P_2 = \tilde{f} \\ f_1 &= \tilde{f} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tilde{f}''^2}{\tilde{f} \cdot (1 - \tilde{f})}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.9.26})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 87/ 400
---------	---	--

Obviously, maximal value of variance induces Dirac's peak positionned at boundaries.

Formulae in (II.9.21) can be used to determine the peak's magnitude if any extra condition is retained. In the context of pdf, the Beta function have the fame of fairly good representation of micro-mixing, so the third momentum of a Beta distribution is easy to determine (thanks to recurrency), used as a constraint for a modified Curl model, it comes :

$$\widetilde{f^3} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + \beta + 2} \cdot \widetilde{f^2} \quad (\text{II.9.27})$$

$$\widetilde{f''^3} = 2 \cdot \widetilde{f''^2}^2 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \widetilde{f}}{\widetilde{f} \cdot (1 - \widetilde{f}) + \widetilde{f''^2}} \quad (\text{II.9.28})$$

$$P_1^2 \left\{ 4 + \frac{\widetilde{f''^3}^2}{\widetilde{f''^2}^3} \right\} - P_1 \left\{ 4 + \frac{\widetilde{f''^3}^2}{\widetilde{f''^2}^3} \right\} + 1 = 0 \quad (\text{II.9.29})$$

Some numerical evaluations don't show large discrepancies (among mass fraction or temperature) so this option is not currently available.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 88/400
---------	--	---

9.4 Coal, Biomass, Heavy Oil combustion

9.4.1 Introduction

Pulverised coal combustion is described (excluding grid burning) allowing the use of mixture of coals (or of coal and biomass) and a description of granulometry (as many classes of initial diameter as wished). After a particle enters the furnace, radiation increases its temperature.

1. As particle's temperature increases, evaporation of free water (if any) begins. During evaporation, the vapor pressure gradient extract some water from the particle. The interfacial mass flux brings some mass, water and enthalpy (computed for water vapour) then latent heat is taken from the particle's enthalpy so the heating is slowed (during evaporation, the water can't reach the boiling point). Fuel oil is supposed to be dry.
2. After drying is achieved, the temperature reaches higher level, allowing the pyrolysis phase to take place. The pyrolysis is described by two competitive reactions: the first one with a moderate activation energy is able to free peripherals atoms group from skeleton leaving to light gases and a big amount of char; the second one with an higher activation energy is able to break links deeper in the skeleton leaving to heavier gases (or tar) and less char (more porous). So a complete description needs two sets of three parameters (two kinetics ones and a partitioning one):

$$\text{Coal} = (k_{01}, T_{01}) \Rightarrow Y_1 \{\text{Light Volatiles}\} + (1 - Y_1) \{\text{Char}\},$$

$$\text{Coal} = (k_{02}, T_{02}) \Rightarrow Y_2 \{\text{Heavy Volatiles}\} + (1 - Y_2) \{\text{Char}\},$$

where Y_1 , the partitioning (or selectivity) factor of the "low temperature" reaction is less than Y_2 , the "high temperature" one. A practical rule is to consider that the same hydrogen can bring twice more carbon by the second reaction than by the first one. When ultimate analysis are available both for coal and for char, it is relevant to check partitioning coefficient (Y_i) and composition of volatiles matters (mainly ratio of Carbon monoxide and C/H in the hydrocarbon fraction): assumptions on volatiles composition gives partitioning coefficients; assumptions on Y_i determine volatiles equivalent formulae. Pyrolysis interfacial mass flux brings energy of volatile gases (computed at the particle's temperature) in which the formation of enthalpy of gaseous species differs from the coal one's, as a result, the enthalpy for pyrolysis reaction (the most often, moderate) is taken from particle energy.

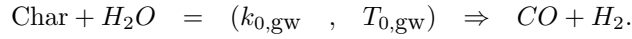
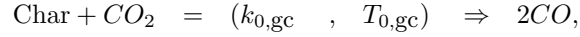
The heavy fuel oil undertakes a set of physico-chemical transformation: light hydrocarbons can evaporate while the heaviest undergo a pyrolysis. With a few data, only a temperature range is available for mass loss of droplets: the heat flux is shared out between warming of the remaining liquid and evaporation enthalpy. At the very end of these processes a solid particle is leaved, mainly made of a porous carbon similar to char.

3. After pyrolysis and evaporation, when every volatiles are burnt, oxygen is able to reach the surface of the char particle. So heterogenous combustion can take place: diffusion of oxygen from bulk, heterogeneous reaction (kinetically limited) and back diffusion of carbon monoxide. The heterogeneous oxidation interfacial mass flux is the difference of an incoming oxygen flux and an outgoing carbon monoxide mass flux, each of them at their own temperature. The incoming oxygen has a zero valued formation enthalpy (reference state) and the outgoing carbon monoxide has a negative formation enthalpy, as a result, the enthalpy liberated by the first oxidation of carbon is leaked in the particle energy, contributing to its heating. The heterogenous combustion is complete if all the carbon of the char particle is converted, leaving an ash particle. Unburnt carbon can leave the boiler as fly ash. The heterogeneous reaction is written as following:



EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 89/400
---------	--	--

4. In the same way, after pyrolysis vanishes, gasification can take place by :



This version is able to deal with many class of particles N_{classes} , each class being described by an initial diameter and a constituting coal. Every coal, among **nchar** is described by a complete set of parameters: immediate and ultimate analysis, low heating value (at user choice on raw, dry or pure) and kinetic parameters (*for the two competitive pyrolysis reaction and for heterogeneous reaction*). This allows to describe the combustion of a mixture of coals or of coal and every material following the same evolution kinetics (woods chips ...). It is, obviously, possible to mix fuels with (very) different proximate analysis, like dry hard coal and wet biomass.

Subroutines allowing the user to describe inlets are dedicated to standard combustion: some inlets are for coal (eventually blend) and a gaseous media, others for oxidizers. If needed, a deeper modification allows to describe co-combustion of coal and some gases ... described as volatile matter from a coal.

The heavy fuel oil injection is described by a thermodynamic data file and granulometry, neither blend nor coal / oil mixing is possible.

9.4.2 Enhancement of diffusion turbulent reaction for two phase combustion

With a Probability Density Function and the assumption of concentrations piecewise linear vs. the variable, it is quite easy to integrate and found the mean concentrations. For gas diffusion flame this is done by **d3pphy**, **d3pint**, it seems more relevant to explain the algorithm in a more complicated case: for coal, biomass and heavy fuel oil, in **multiphase gas combustion five reactions** can be considered.

- 1) gases issued from slow phenomena (*vs.* turbulent mixing) as heterogeneous combustion and gasification, both by CO_2 and H_2O are mixed with various oxidizers; if any gasification by H_2O has been undertaken, some H_2 is released. This (an industrial combustor is not a gasifier) amount is supposed to recombine as a reaction prior to mixing and main turbulent combustion.
- 2 and 3) Coal is assumed to undergo two competitive pyrolysis reactions, the first releasing organic compound summarized as CH_{x1} , the second releasing CH_{x2} (with $x1 > x2$), both of them releasing CO . The first reaction to occur in the gas phase is the partial dehydrogenation (lowering saturation) of CH_{x1} to produce water vapor and CH_{x2} . Then the CH_{x2} (produced by pyrolysis or by CH_{x1} partial oxydation) is converted to water vapor and carbon monoxide.
- 3 and 4) Heavy fuel oil is supposed to undergo a progressive evaporation, releasing a fuel vapor CH_x (obviously unsaturated, close to CH_2), CO , H_2S and a char particle. Two reactions are supposed to succeed. First, the conversion of CH_x to water vapor and CO . Then the oxidation of H_2S to water vapor and SO_2 .
4. 5) if conversion of CO to CO_2 is assumed to be fast, this complete reaction is also ruled by the variance dissipation. (Be careful, some CO (from heterogeneous oxidation and gasification) is still mixed with the local mean oxidiser).

Both for coal and heavy fuel oil, the assumption of a diffusion flamelet surrounding the particles is done. All of the reducing gases issued from fast phenomenon are supposed mixed (to constitute a local mean fuel) and the diffusion flamelet takes place between this mixture and the mixture of oxidisers (air, oxygen, recycled flue gas) and gases issued from slow phenomenon: water vapor (from drying), carbon monoxide (from heterogeneous combustion and gasification of char if CO oxidation is not fast),

hydrogen (product of gasification by water vapor); then the "mean local oxidizer" is no more unreactive and the recombination of hydrogen have to be done first. Depending on the composition of mean local fuels and oxidizer, stoichiometries can be computed for the five (or four) successive reactions, molar composition can be easily computed and weighted by the pdf (built on $[0, 1]$ for the sum of fast fuels).

If carbon monoxide final oxidation is not supposed to be fast, after this turbulent reaction, the amount of carbon dioxide is null, an equilibrium value is computed (with respect to the total amount of carbon and oxygen and to the enthalpy) and the value of carbon dioxide transported is compared with the equilibrium, according to direction of the discrepancy, a relaxation term is computed with a characteristic time (oxidation's one if the mass fraction is below the equilibrium, dissociation's one otherwise -situation encountered with exhaust gas recycling).

In this release, coal is not supposed to contain any sulphur and heavy fuel oil is supposed to release only one (unsaturated) hydrocarbon. The general subroutine is then feeded with some nil values (*e.g.* in heavy fuel computation, the tracer f_1 dedicated to saturated hydrocarbon is not resolved, and the call of the subroutine is done with a zero scalar).

This structure is supposed to allow further developments: coal, or biomass, with sulphur, detailed mechanism for heavy fuel oil decomposition (leading to both CH_{x1} and CH_{x2}), and so on.

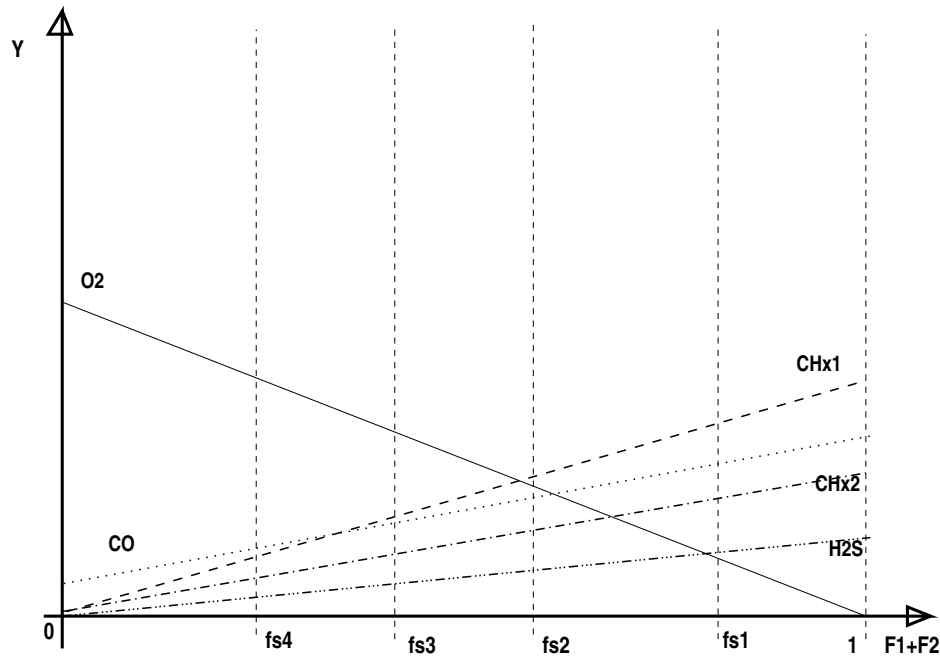


Figure II.9.6: Condensed Fuels before any gas combustion.

Before reaction between gases, only exist species coming from inlets or interfacial source term: CO in mean local fuel (*i.e.* $f_1 + f_2 = 1$) comes from devolatilisation, CO in mean local oxidizer (*i.e.* $f_1 + f_2 = 0$) comes from heterogeneous reactions of char.

During pulverised coal combustion, two kinds of volatile matters are considered and the sketch of concentrations during the three successive reactions is quite similar.

Every reaction (but, possibly the final conversion of CO to CO_2) are supposed to be fast compared to the turbulent mixing, but among these reactions some can be faster; here, a priority rule to access oxygen is established (the more eager –for oxygen– the specy, the faster the reaction).

The first reaction is a partial dehydrogenation of the light volatile CH_{x1} to form the species characteristic of heavy volatile CH_{x2} : in fs_1 , all of CH_{x1} (issued from the low temperature pyrolysis reaction) is

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 91/400
---------	--	--

converted, and the CH_{x2} (issued from the high temperature pyrolysis reaction) is incremented.

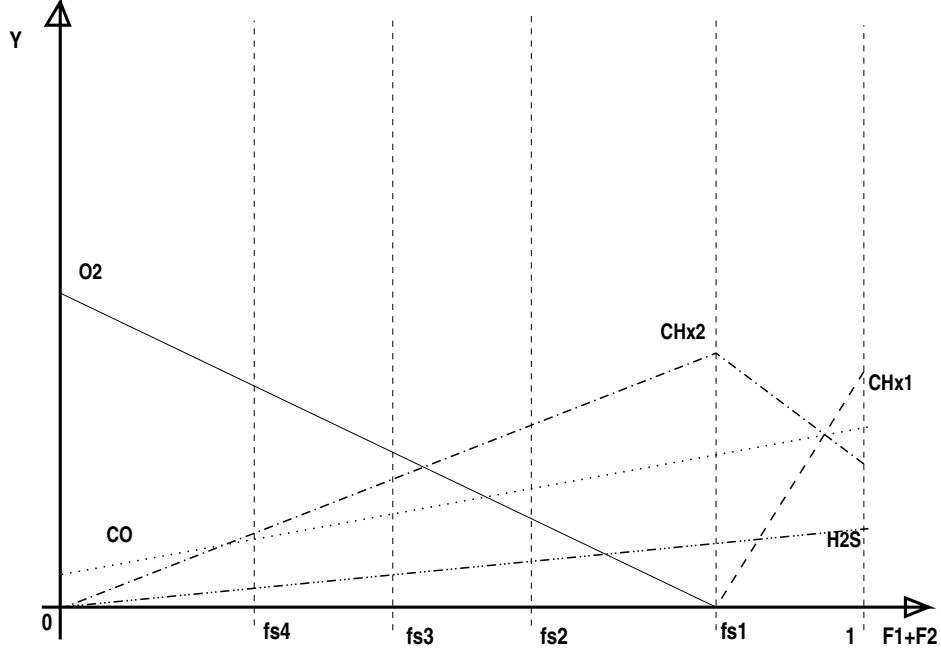
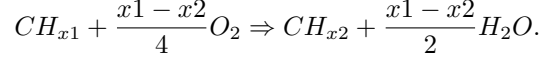
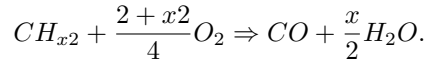


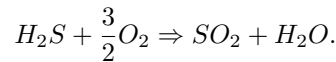
Figure II.9.7: Condensed Fuels after hydrocarbons conversion.

The oxygen and the hydrocarbon vapor have linear concentrations in $f(1+2)$ on $[0, 1]$. As long as the stoichiometry of the reaction is known, a simple equation allows to determine $fs2$ the stoichiometric point for the second reaction (where both oxygen and hydrocarbon vanish). The second reaction is the conversion of some hydrocarbon vapor to carbon monoxide and water vapor (not plotted in an optimistic attempt to lighten the sketch).

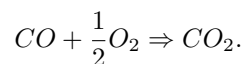


Then the rich area can't undergo any reaction (no oxygen available) if the PDF(f) is not zero before $Fs2$, then some CH_x is unburnt.

Some H_2S can be converted to SO_2 , the carbon monoxide existing between $fs2$ and 1 is protected from oxidation (the two first reactions have destroyed the free oxygen). Like previously, oxygen and hydrogen sulphide have concentrations linear in f on $[0, fs2]$ as long as the stoichiometry of the reaction is known, a simple equation allows to determine $fs3$ the stoichiometric point for the third reaction (where both oxygen and hydrogen sulphide vanish).



If the final conversion of carbon monoxide to carbon dioxide is assumed fast (with respect to variance dissipation) a last reaction is taken in account:



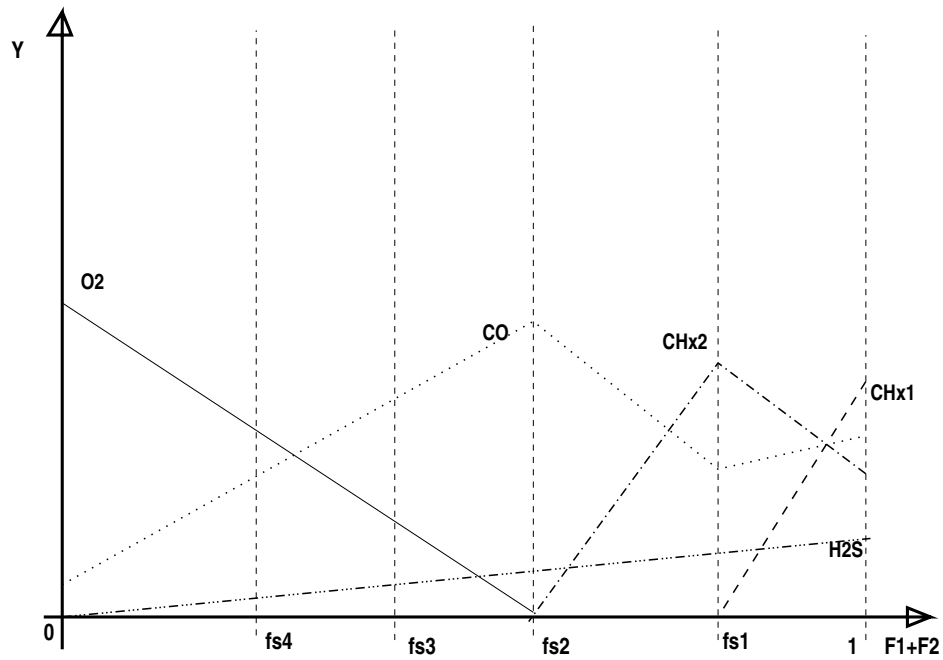


Figure II.9.8: Condensed Fuels after hydrocarbons oxidation.

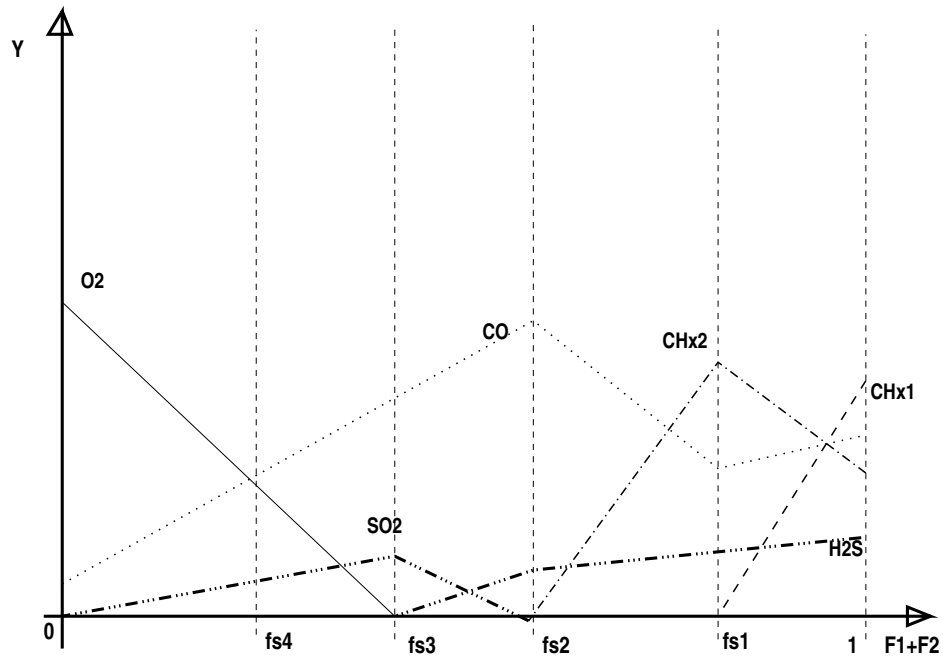


Figure II.9.9: Condensed fuels after H_2S oxidation.

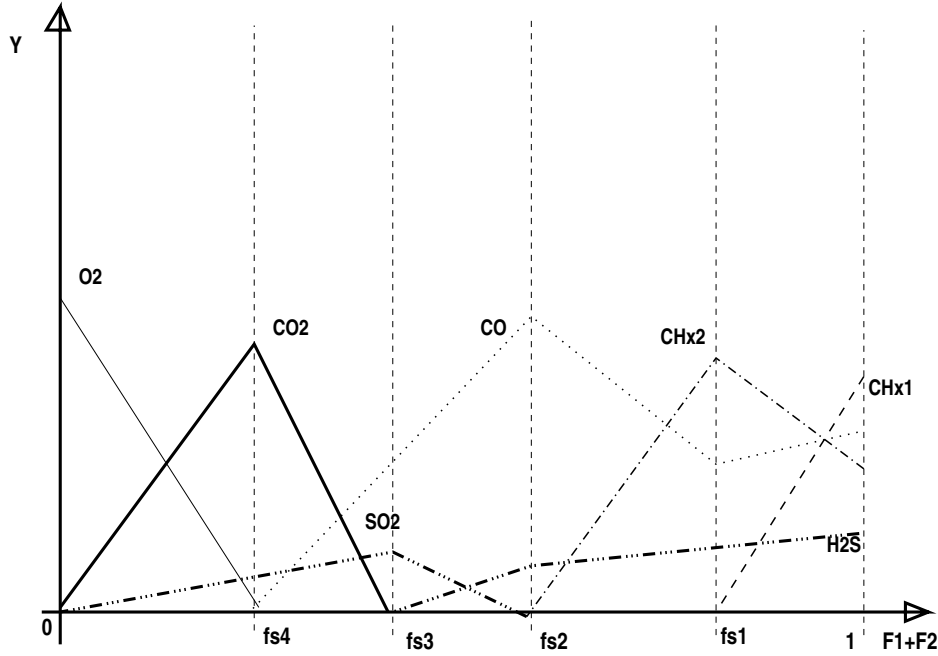


Figure II.9.10: Condensed Fuels after final oxidation of CO.

Comparisons of the PDF rectangle hedges $[f_{\text{deb}}, f_{\text{fin}}]$ and remarkable composition points $[0, f_{s4}, f_{s3}, f_{s2}, f_{s1}, 1]$ allows a simple integration: 1) Dirac's peak intensity are used to weight composition at boundaries, 2) the piece linear part is integrated with analytical formulae on each band:

1. rich range, here existing species with the higher calorific value:
 CH_x (in fuel case) or CH_{x2} (in coal case): $[\max(f_{\text{deb}}, f_{s1}); \min(f_{\text{end}}, 1)]$
2. upper-middle range CH_{x1} conversion: $[\max(f_{\text{deb}}, f_{s2}); \min(f_{\text{end}}, f_{s1})]$
3. middle range H_2S conversion: $[\max(f_{\text{deb}}, f_{s3}); \min(f_{\text{end}}, f_{s2})]$
4. working range, carbon monoxide consumption frees enthalpy : $[\max(f_{\text{deb}}, f_{s4}); \min(f_{\text{end}}, f_{s3})]$
5. poor range, only products and oxidisers: $[\min(f_{\text{deb}}, f_{s4}); \min(f_{\text{end}}, f_{s4})]$

For each band (eg. $[f_{si}, f_{sj}]$) concentrations can be written:

$$Y_e = Y_e(f_{si}) + \frac{f - f_{si}}{f_{sj} - f_{si}} \cdot (Y_e(f_{sj}) - Y_e(f_{si})).$$

Integration on the band $[b1, b2]$ (obviously $b1 \geq f_{si}$ and $b2 \leq f_{sj}$) gives the increment:

$$Y_e := Y_e + h_{\text{REC}} (b2 - b1) \cdot \left[\frac{Y_e(f_{si}) \cdot f_{sj} - Y_e(f_{sj}) \cdot f_{si}}{f_{sj} - f_{si}} + \frac{Y_e(f_{sj}) - Y_e(f_{si})}{f_{sj} - f_{si}} \cdot \frac{b1 + b2}{2} \right],$$

where h_{REC} is the height of the PDF's rectangle.

9.4.3 Specification of pyrolysis

Coal is currently known by its proximate and ultimate analysis. Ultimate analysis of char can be known or assumed pure carbone. The point is to determine the amount of volatile matter and their composition; the following assumptions are every time done:

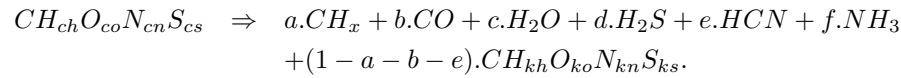
EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 94/400
---------	--	--

1. sulphur is released as hydrogen sulphide (H_2S),
2. nitrogen is released both in HCN and NH_3 , with a ratio which is an user's prescription

Three ways are available:

1. The volatile matter content determined during the proximate analysis is supposed to be representative of Y_1 selectivity in volatile of the first reaction (Kobayashi description involves two parallel reactions, the first has a low activation energy and produces light volatile matter, the second one has a high activation energy and produces heavy volatile matter). Oxygen is released as carbon monoxide. No water steam (linked water) among volatile matter. So the formulae for the mean hydrocarbon is determined as x_1 in CH_{x_1} . The heavy, unsaturated, volatile issued from the second reaction are characterised by x_2 as an half of x_1 ; with the same assumption for oxygen, Y_2 can be computed. User has to check for x_1 and x_2 likelihood (between 1 and 4).
2. When the proximate analysis is not known, x_1 is assumed to be equal to four (methane is a fairly good model for light volatiles) and x_2 is assumed to be equal to 2 (ethylene and other species with double bond are good models for unsaturated species), then selectivities Y_1 and Y_2 can be deduced ... and checked (under one).
3. Large amount of oxygen appears in the ultimate analysis of biomass and low rank coal (lignite or peat) then linked or bounded water is released during pyrolysis (a chemical mechanism taking place at higher temperature than the physical drying which releases the "free" water). In this case, an extra parameter have to be determined (number of water molecules released during pyrolysis), so the user may stipulate both x (in the formulae for hydrocarbon CH_x , as previously 4 and 2 respectively) and Y (the selectivity in volatile matter, the proximate analysis set Y_1 and Y_2 is assumed from empirical criterion, *e.g.* $(1 + Y_1)/2$).

Detail of computation: From ultimate analysis of coal (or heavy fuel oil) and char (if ultimate analysis of char is lacking, the pure carbon assumption is welcome), global formulae for the "monomer" (referring to one carbon, so $ch...$ cs and $kh...$ ks are easy to compute) can be deduced. Then, the reaction (pyrolysis and / or evaporation) transforming the original fuel in a mixture of gaseous ones and residual char can be summarized as:



The stoichiometric coefficient for char monomer being deduced from Carbon conservation, five equation can be written: four for the conservation of elements (H , O , N , S) and one defines the gas selectivity.

$$\begin{aligned} \text{Hydrogen budget } ch &= a.x + 2.c + 2.d + e + 3.f + (1 - a - b - e).kh, \\ \text{Oxygen budget } co &= b + c + (1 - a - b - e).ko, \\ \text{Nitrogen budget } cn &= e + f + (1 - a - b - e).kn, \\ \text{Sulphur budget } cs &= d + (1 - a - b - e).ks, \end{aligned}$$

mass ratio of gases or selectivity

$$a.(12 + x) + b.28 + c.18 + d.34 + e.27 + f.17 = Y.(12 + ch + 16.co + 14.cn + 32.cs).$$

But, eight unknown are involved (a , b , c , d , e , f , x , Y), so three extra conditions are needed to solve the linear system (if ax is considered as an auxiliary unknown instead of x):

1. User assumes the repartition between nitrogenated species by fixing reference numbers ei and fi . The equation $ei.f - f_i.e = 0$ can be added to the system.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 95/400
---------	--	--

2. if the proximate analysis can be used to determine the ratio of gases issued from an high rank coal or fuel, Y is know and c (number of water molecules issued from decomposition) can be assumed nil. Equations $Y = Y_i$ and $c = 0$ are added.
3. without relevant information about the selectivity, assumption have to be done on x (is the released hydrocarbon saturated or not?), and c can be again assumed nil. Equations $a.x_i - ax = 0$ and $c = 0$ are added.
4. oxygenated fuels (biomass, lignin) contains bounded water to be released during pyrolysis, so proximate analysis (for Y) and assumption about the kind of hydrocarbon (for x) are needed. Equations $a.x_i - ax = 0$ and $Y = Y_i$ are added.

Then a 8 times 8 linear system is defined and can be solved by regular algorithm.

9.4.4 Specification of granulometry

User has to choose the initial diameter of different classes and the sharing out of the inlet flow. The distribution is often known by some diameters (quantile or sieves) from which parameters of an assumed Rossin-Ramler law can be fitted (least squares). Then choosing the number of classes and flow partition allows computation of the initial diameter of each class. Obviously, the finest particles or droplets are responsible for the ignition and stability of the flamme and the biggest ones are responsible for unburnt carbon in ash. So two common descriptions are ten classes, each of them with a tenth of the flow, or five classes with (0.1 , 0.2 , 0.4 , 0.2 , 0.1) of the flow. The second way is nearly two times cheaper (in computer time) but includes the same extreme diameters.

By definition of the Rossin-Ramler law as used in granulometry, the mass fraction associated with particles finer than a diameter obeys:

$$P(d_i) = 1 - \exp \left[-\frac{d_i^n}{D_m^n} \right],$$

where, surprinsgly, n is not an integer (but a real) and D_m is the median diameter. When only two data are available (pass through two sieves, extreme deciles or quartiles) the determination of Rossin-Ramler law parameters is direct:

$$P(d_1) = 1 - \exp \left[-\frac{d_1^n}{D_m^n} \right], \quad (\text{II.9.30})$$

$$P(d_2) = 1 - \exp \left[-\frac{d_2^n}{D_m^n} \right]. \quad (\text{II.9.31})$$

The logarithm forms of (Eqs. II.9.30-II.9.31) are the following expressions:

$$\left(\frac{d_1}{D_m} \right)^n = -\log(1 - P_1), \quad (\text{II.9.32})$$

$$\left(\frac{d_2}{D_m} \right)^n = -\log(1 - P_2). \quad (\text{II.9.33})$$

The logarithm forms of (Eqs. II.9.32-II.9.33) are:

$$n \cdot [\log(d_1) - \log(D_m)] = \log[-\log(1 - P_1)], \quad (\text{II.9.34})$$

$$n \cdot [\log(d_2) - \log(D_m)] = \log[-\log(1 - P_2)]. \quad (\text{II.9.35})$$

Using the expressions (Eqs. II.9.34-II.9.35) we obtain:

$$n = \frac{\log \left[\frac{\log(1 - P_1)}{\log(1 - P_2)} \right]}{\log \left[\frac{d_1}{d_2} \right]} \quad (\text{II.9.36})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 96/400
---------	--	--

and D_m is easily deduced.

When more data are available, the second logarithm relation gives a cloud of couple $(\log(d_i), \log[-\log(1 - P_i)])$ among which a linear fit is looked for $(n, n \cdot \log(D_m))$:

$$\begin{aligned} n \cdot \log(d_i) - [n \cdot \log(D_m)] &= \log[-\log(1 - P_i)], \\ a \cdot x_i + b &= y_i. \end{aligned} \quad (\text{II.9.37})$$

Least square formulae are then used ... after a data transformation (two logarithm) relevant for the distance.

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}, \quad (\text{II.9.38})$$

where N is the number of data.

$$\begin{aligned} n &= \frac{N \sum_{i=1}^N \log(d_i) \cdot \log[-\log(1 - P_i)] - \sum_{i=1}^N \log(d_i) \cdot \sum_{i=1}^N \log[-\log(1 - P_i)]}{N \sum_{i=1}^N \log(d_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \log(d_i) \right)^2}, \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}, \\ -n \cdot \log(D_m) &= \frac{\sum_{i=1}^N \log[-\log(1 - P_i)] \cdot \sum_{i=1}^N \log(d_i)^2 - \sum_{i=1}^N \log(d_i) \cdot \sum_{i=1}^N \log(d_i) \cdot \log[-\log(1 - P_i)]}{N \sum_{i=1}^N \log(d_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \log(d_i) \right)^2}. \end{aligned}$$

After this laborious identification of parameters (done using Excel), the determination of the mean diameter of each mass class is obtained from the definition of the rossin-Ramler law:

$$d_i = D_m [-\log(1 - P_i)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}. \quad (\text{II.9.39})$$

As an example, if the user chooses the (recommended) sharing out $[0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1]$, the corresponding diameter are deduced from the *mean cumulated mass* as:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 0.1 \quad ; \quad \Sigma_1 = 0.1 \quad ; \quad 1 - MCM_1 &= 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow d_1 = D_m [-\log(0.95)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ \Delta_2 = 0.2 \quad ; \quad \Sigma_2 = 0.3 \quad ; \quad 1 - MCM_2 &= 1 - \frac{0.1 + 0.3}{2} = 0.80 \Rightarrow d_2 = D_m [-\log(0.80)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ \Delta_3 = 0.4 \quad ; \quad \Sigma_3 = 0.7 \quad ; \quad 1 - MCM_3 &= 1 - \frac{0.3 + 0.7}{2} = 0.50 \Rightarrow d_3 = D_m [-\log(0.50)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ \Delta_4 = 0.2 \quad ; \quad \Sigma_4 = 0.9 \quad ; \quad 1 - MCM_4 &= 1 - \frac{0.7 + 0.9}{2} = 0.20 \Rightarrow d_4 = D_m [-\log(0.20)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ \Delta_5 = 0.1 \quad ; \quad \Sigma_5 = 1.0 \quad ; \quad 1 - MCM_5 &= 1 - \frac{0.9 + 1.0}{2} = 0.05 \Rightarrow d_5 = D_m [-\log(0.05)]^{\left(\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

With such a symmetrical mass distribution, the diameter of the central class is the median diameter of the Rossin-Ramler (*i.e.* half of the mass is contained in more tiny particles).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 97/400
---------	--	---

9.4.5 Special attention paid to variance

With the gaz phase combustion model, everything is quite simple: two variables are relevant, the mean and the variance of the mixture fraction. With the two phase combustion model, a lot of mixture fractions are defined and the pdf model is constructed for the sum of the two mixture fractions related with volatiles. So the source term related with the square of the gradient of the mean can't be computed as for regular variance (the `gradcel` subroutine is called for the sum).

In *Code_Saturne* homogeneous two phase flow, only one velocity is defined, and all variables refer to the bulk (sum of gaseous and condensed phase), but the pdf has to be defined only in the gas phase. So phasic mean and variance have to be defined, with the special difficulties of variables undefined in the condensed phase (f_i is a mixture fraction in gas on mixture: kg coming from i/kg of mixture):

$$\tilde{f} = X_1.f^* + X_2.0 \quad \Rightarrow \quad f^* = \frac{\tilde{f}}{1 - X_2}, \quad (\text{II.9.40})$$

$$\tilde{f}^2 = X_1.(f^{*2} + f''^{2*}) + X_2.0 \quad \Rightarrow \quad f^{*2} + f''^{2*} = \frac{\tilde{f}^2}{1 - X_2}, \quad (\text{II.9.41})$$

$$f''^{2*} = \frac{\tilde{f}^2}{1 - X_2} - \left(\frac{\tilde{f}}{1 - X_2} \right)^2, \quad (\text{II.9.42})$$

$$f''^{2*} = \frac{(\tilde{f})^2 + \tilde{f}''^2}{1 - X_2} - \left(\frac{\tilde{f}}{1 - X_2} \right)^2, \quad (\text{II.9.43})$$

$$f''^{2*} = \frac{\tilde{f}''^2}{1 - X_2} - \frac{X_2.(\tilde{f})^2}{(1 - X_2)^2}, \quad (\text{II.9.44})$$

$$f''^{2*} = \frac{\tilde{f}''^2 - \frac{X_2}{X_1}.(\tilde{f})^2}{X_1}. \quad (\text{II.9.45})$$

Only this phasic variance (the part of the variance in the gas phase) is able to dissipate: so, the second part of the source term for variance has to be modified.

Last but not least, mass flux crossing the interface (pyrolysis fluxes) are made of pure volatile matter and mixes with a gas at any value of mixture fraction mean. So the interfacial flux constitutes a source term for the mean and for the variance, following Escaich [Esc11], the closure would be:

$$S_{\tilde{f}^2} = \Gamma. (f_{\text{CL}} - \tilde{f}). (2.f_{\Gamma} - f_{\text{CL}} - \tilde{f}), \quad (\text{II.9.46})$$

in which, Γ is the mass flux, f_{Γ} is the value of the mixture fraction in the flux (1 for pyrolysis or fuel evaporation), f_{CL} is the value of the mixture fraction in the boundary layer ... to be closed by a relevant assumption: from laminar or turbulent diffusion (to do in `coal_variance_source_term` or `fuel_variance_source_term`, not available for regular users).

With an assumption of laminar diffusion around each particle able to transport the mass flux:

$$f_{\text{CL}} = 1 - (1 - \tilde{f}) \exp \left[\frac{\Gamma}{2\pi D d \rho} \right].$$

When mass flux is huge, the diffusion can't stay regular around each inclusion: if the variance is maximal (intermittency assumption), the boundary layer can't be no more distinguished from the mean, if the variance vanish, the boundary layer is quiet and made of outing gases:

$$f_{\text{CL}} = f_{\Gamma} + (\tilde{f} - f_{\Gamma}) \frac{\tilde{f}''^2}{\tilde{f}.(1 - \tilde{f})}.$$

This special assumption allows a term source for variance easy to implicit in order to avoid overshoot

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 98/400
---------	--	---

(the variance have a maximal value related to the mean):

$$S_{\gamma'^2} = \Gamma \cdot (f_\Gamma - \tilde{f})^2 \left\{ 1 - \left[\frac{\tilde{f}'^2}{\tilde{f} (1 - \tilde{f})} \right]^2 \right\}.$$

9.4.6 Nitrogen oxides (NOx)

Nitrogen oxides are a key pollutant, an accurate prediction is difficult but the relative effect of modification (of fuel, of staggering, and so on) is a reachable goal. Hereafter, the two main ways of nitrogen oxides formation are supposed to be thermal NOx (reaction between molecular nitrogen and radical oxygen activated at the higher temperature) and fuel NOx (resulting from the oxidation of nitrogen originating from fuel) are described and taken in account in the *Code_Saturne* model for diphasic combustion. The third way, resulting of reaction between the molecular nitrogen and hydrocarbon radicals is assumed negligible in diphasic combustion; its contribution is worthy of attention only for gas combustion (especially in dry low NOx combustor for gas turbine).

Thermal NOx

In the Zeldovich mechanism, the rate of the key reaction, between molecular nitrogen and radical oxygen, has a simple expression thanks to an assumption of equilibrium applied on oxygen dissociation, leading to:

$$\begin{aligned} N_2 + O_2 &\Rightarrow 2 NO, \\ W_{1NO} &= 3.4 \cdot 10^{12} \cdot \exp \left[\frac{-66\,900}{RT} \right] \cdot [N_2] \cdot [O_2]^{1/2}. \end{aligned}$$

This production term has to be evaluated in each fluid particle because it is not only non linear (with respect to mixture fraction) but submitted to segregation: the hottest particles are near the stoichiometric point ... where oxygen is exhausted (and vice versa). As a consequence, simplest approximations, neglecting covariances, are not satisfying:

$$\widetilde{W}_{1NO} \neq k_0 \cdot \exp \left[\frac{E}{RT} \right] \cdot [\tilde{N}_2] \cdot [\tilde{O}_2]^{1/2}.$$

Taking in account only the mean temperature, the contribution of hottest fluids particles disappears and nitrogen oxide formation is under estimated.

The source term for thermal NOx has to be integrated following the example of others turbulents variables (like species mass fractions). In the turbulent oxydation model, mass fraction of species are known linear piecewise functions, the oxygen fraction is positive only between the mean local oxidizer and fs3 the stoichiometric point for the "last" reaction (H_2S conversion), the post conversion of carbon monoxide to carbon dioxide is assumed to result from a relaxation to the thermodynamical equilibrium computed with mean values. The stoichiometric point corresponding to this last reaction is no more necessary to the turbulent computation but for temperature evaluation: as, by now, the mean local oxidiser includes some carbon monoxide (originating from heterogeneous reactions involving char), it can't be no more supposed unreactive, assuming a linear profile for oxygen, and carbon monoxide, between the local mean oxidiser and the point where hydrocarbon oxidation is finished, the mass fraction in the local mean oxidizer are auxilliary unknowns the value of which is determinated by equalizing the transported value for the carbon monoxide (which involves the effect of relaxation to equilibrium) and its integrated value (taking in account the local pdf).

Assuming the entalpy piecewise linear with the enthalpy in fs4 considered as an auxilliary unknown, which can be determined by equalizing the integrated enthalpy and the transported one (the tranport equation of which includes radiation losses), then the temperature piecewiselinear with respect to

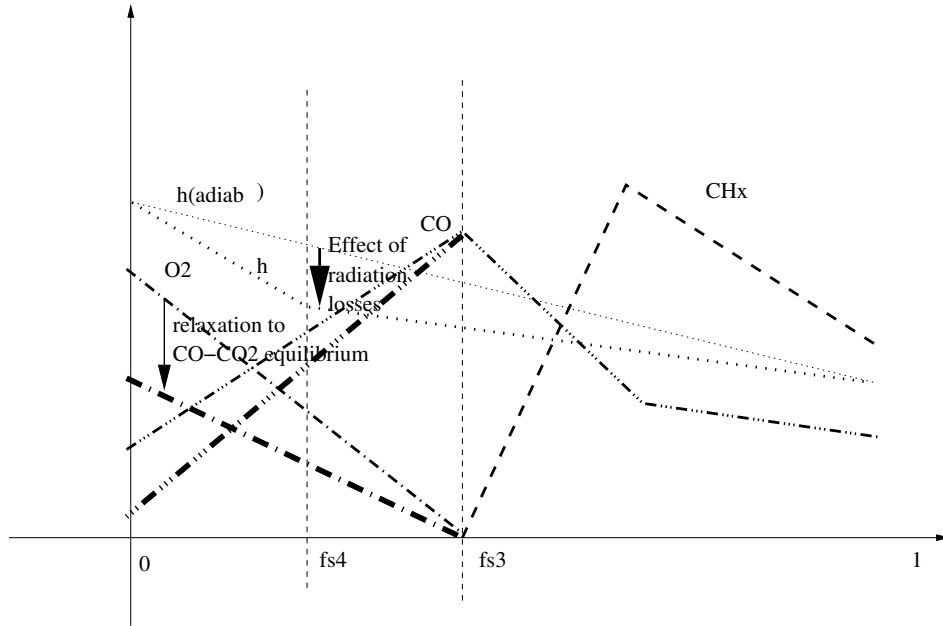
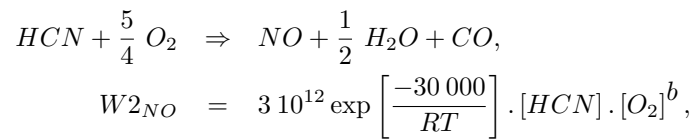


Figure II.9.11: Mass fractions of reactive species, turbulent reaction then kinetical relaxation, enthalpy with radiation losses.

the mixture fraction, the numerical integration of the source term is now available, using a regular trapezium method with 200 points (between the pdf's rectangle beginning and the minimum of $fs3$ and pdf's rectangle end).

Fuel NOx

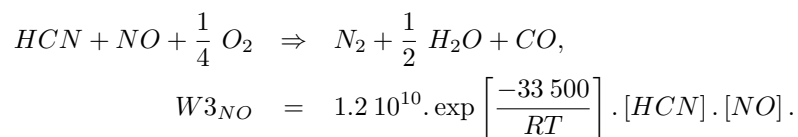
The nitrogen included in the organic part of the fuel (can be a significant part of some biomass, like agricultural residues, oil cake and so on) evolves to HCN . This reducing form of nitrogen can be oxydised either by oxygen or by nitrogen oxide:



with:

$$b = \begin{cases} 1 & \text{if } [O_2] < 0.0025, \\ \frac{0.018 - [O_2]}{0.018 - 0.0025} & \text{if } 0.0025 < [O_2] < 0.018, \\ 0 & \text{if } 0.018 < [O_2]. \end{cases}$$

In the last case, NO is reduced to nitrogen: the fuel nitrogen contributes to destroy even thermal NO .



EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 100/400
---------	--	--

9.4.7 Conservation Equations for two phase flow combustion

The bulk, made of gases and particles, is assumed to be modelled with only one pressure and velocity. Scalars for the bulk are:

- Bulk density

$$\rho_m = \alpha_1 \rho_1 + \sum_{i=1}^{N_{classes}} \alpha_{2,i} \rho_2. \quad (\text{II.9.47})$$

- Bulk velocity

$$\underline{u}_m = \frac{\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 + \sum_{i=1}^{N_{classes}} \alpha_{2,i} \rho_2 \underline{u}_{2,i}}{\rho_m}. \quad (\text{II.9.48})$$

- Bulk enthalpy

$$H_m = \frac{\alpha_1 \rho_1 H_1 + \sum_{i=1}^{N_{classes}} \alpha_{2,i} \rho_2 H_{2,i}}{\rho_m}. \quad (\text{II.9.49})$$

- Bulk pressure

$$P_m = P_1. \quad (\text{II.9.50})$$

Mass fractions of gaseous medium (x_1^*) and of particles (x_2^*) are defined by:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho_m}, \\ x_2^* &= \frac{\sum_{i=1}^{N_{classes}} \alpha_{2,i} \rho_2}{\rho_m}. \end{aligned}$$

By default, the slipping velocity between particles and gases is supposed negligible compared to this mean velocity, that is to say that the velocity of the continuous phase (gas phase) \underline{u}_1 and the velocities of the particle classes $\underline{u}_{2,i}$ are equal to the bulk velocity \underline{u}_m , then budget equations for the bulk can be written as following: (II.9.51-II.9.53):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \text{div} (\rho_m \underline{u}_m) = 0, \quad (\text{II.9.51})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \underline{u}_m) + \text{div} (\underline{u}_m \otimes \rho_m \underline{u}_m) = \text{div} \left[\mu_T (\underline{\nabla} \underline{u}_m + \underline{\nabla} \underline{u}_m^T)^D - \frac{2}{3} q_m^2 \underline{1} \right] - \underline{\nabla} P_m + \rho_m \underline{g} \quad (\text{II.9.52})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m H_m) + \text{div} (\rho_m \underline{u}_m H_m) = \text{div} (\mu_T \underline{\nabla} H_m) + S_{m,R}, \quad (\text{II.9.53})$$

where the turbulent dynamic viscosity of the bulk is $\mu_T = \rho_m D_m^T$.

With the (velocity) homogeneity assumption, mainly budget equation for bulk characteristic are pertinent. So transport equation for the scalar Y_k , where k is the phase, can be written:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m x_k^* Y_k) + \text{div} (\rho_m \underline{u}_m x_k^* Y_k) = \text{div} (\mu_T \underline{\nabla} (x_k^* Y_k)) + S_{Y_k} + \Gamma_{Y_k}. \quad (\text{II.9.54})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 101/400
---------	--	---

If drift of the particle class to the bulk is taken into account, equation (II.9.54) reads:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m x_k^* Y_k) + \text{div} (\rho_m \underline{u}_k x_k^* Y_k) = \text{div} (\mu_T \nabla (x_k^* Y_k)) + S_{Y_k} + \Gamma_{Y_k}, \quad (\text{II.9.55})$$

with \underline{u}_k to be either modelled with the drop velocity or transported.

Particles enthalpy: $x_2^* H_2$

Enthalpy of droplets (J in particles/kg bulk) is the product of solid phase mass fraction ($kg\ liq/kg$ bulk) by the specific enthalpy of solid ($kg\ solid/kg$ bulk). So the budget equation for liquid enthalpy has six source terms:

$$\begin{aligned} \Pi_2' + S_{2,R} - \Gamma_{\text{evap}} H_{H_2O, \text{ vap}}(T_2) & - \Gamma_{\text{devol}_1} H_{\text{MV}_1}(T_2) - \Gamma_{\text{devol}_2} H_{\text{MV}_2}(T_2) \\ & + \Gamma_{\text{het}} \left(\frac{M_O}{M_C} H_{O_2}(T_1) - \frac{M_{CO}}{M_C} H_{CO}(T_2) \right), \end{aligned}$$

with

- Π_2' : heat flux between phases,
- $S_{2,R}$: radiative source term for droplets,
- $\Gamma_{\text{evap}} H_{H_2O, \text{ vap}}(T_2)$ the vapor flux leaves at particle temperature (H_{vap} includes latent heat),
- $\Gamma_{\text{dvol}_1} H_{\text{MV}_1}(T_2)$ the light volatile matter flux leaves at particle temperature (H_{vap} includes latent heat),
- $\Gamma_{\text{dvol}_2} H_{\text{MV}_2}(T_2)$ the heavy volatile matter flux leaves at particle temperature (H_{vap} includes latent heat),
- $\Gamma_{\text{het}}(\dots)$ heterogenous combustion induces reciprocal mass flux: oxygen arriving at gas temperature and carbon monoxide leaving at char particle one.

Continuous phase enthalpy $x_1 H_1$ and bulk enthalpy H_m

Budget equation for the specific enthalpy of the mixture (gas + particles) admits only one source term for radiative effects $S_{m,R}$:

$$S_{m,R} = S_{1,R} + S_{2,R}, \quad (\text{II.9.56})$$

with contributions of each phase liable to be described by different models (*e.g.* wide band for gases, black body for particles).

In order to be conservative even with drift is taken into account, $x_1 H_1$ is transported rather than H_m , which is deduced from the identity $H_m = x_1 H_1 + x_2 H_2$.

Therefore, source terms on $x_1 H_1$ are computed using $S_{1,R} - S_{x_2 H_2}$, with a specific care on the opposite source terms of $x_2 H_2$ so that it is exact even with the time stepping.

Dispersed phase mass fraction: x_2^*

In budget equation for the mass fraction of the dispersed phase (first droplets, then char particles, at last ashes) the source terms are interfacial mass fluxes (first evaporation, then net flux for heterogeneous combustion):

$$- \Gamma_{\text{evap}} - \Gamma_{\text{het}} - \Gamma_{\text{gas}, H_2O} - \Gamma_{\text{gas}, CO_2}. \quad (\text{II.9.57})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 102/400
---------	--	---

The fuel is described by only one amount (for each diameter class) under a percentile of the initial mass (or diameter), the droplet is supposed to become a char particle. Under a more little diameter the particle is supposed to become an ash particle (inert).

$$-\Gamma_{\text{pyrol1}} - \Gamma_{\text{pyrol2}} - \Gamma_{\text{het}} - \Gamma_{\text{gas, } H_2O} - \Gamma_{\text{gas, } CO_2}. \quad (\text{II.9.58})$$

The coal or biomass particles are described by three mass component: water (free: available for drying), reactive coal (available for pyrolysis), char (available for heterogeneous oxidation and gasification). The mass of ash is computed with respect to the number of particles, initial size and initial amount of ashes. The sum of these four component is the amount of each class (initial diameter and kind of coal).

Number of particles: N_p^*

No source term in the budget equation for number of droplets or solid particles: a droplet became a particle (eventually a tiny flying ash) but never vanish (all particles have to get out).

Mean of the passive scalar for light volatile: F_1

This scalar represents the amount of matter released by the first (low activation energy) pyrolysis reaction. It is a mass fraction of gaseous matter (in hydrocarbon form or carbon oxide one). So the source term in its budget is only the pyrolysis mass flux:

$$\Gamma_{\text{pyrol}}. \quad (\text{II.9.59})$$

Mean of the passive scalar for heavy volatile: F_2

This scalar represents the amount of matter which has leaved the droplet as fuel vapour or the particle by the second (high activation energy reaction), whatever it happens after. It's a mass fraction of gaseous matter (in hydrocarbon form or carbon oxide ones). So the source term in its budget is only evaporation or pyrolysis mass flux:

$$\Gamma_{\text{pyrol1}} \quad \text{or} \quad \Gamma_{\text{evap}}. \quad (\text{II.9.60})$$

Mean of the passive scalar for oxidizers: F_3 to F_5

Budget equation for the three different oxidizers taken in account don't have any source term.

Mean of the passive scalar for steam from drying: F_6

Budget equation for the water steam issued from drying of coal or biomass has one source term:

$$\Gamma_{\text{dry}}. \quad (\text{II.9.61})$$

Mean of the passive scalar for carbon from char oxidation: F_7

Budget equation for F_7 has for source term the mass flux due to heterogeneous combustion (mass flux of carbon monoxide minus oxygene mass flux). As for F_1 , oxidation in the gaseous phase does not modify this *passive* scalar:

$$\Gamma_{\text{het}}. \quad (\text{II.9.62})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 103/400
---------	--	--

Mean of the passive scalar for gasification by the carbon dioxide: F_8

Budget equation for F_8 has for source term the mass flux due to heterogeneous combustion (mass flux of carbon monoxide minus oxygene mass flux). As for F_1 , oxidation in the gaseous phase does not modify this *passive* scalar:

$$\Gamma_{\text{gas}, CO_2}. \quad (\text{II.9.63})$$

Mean of the passive scalar for gasification by steam: F_9

Budget equation for F_9 have for one source term the mass flux due to heterogeneous combustion (mass flux of carbon monoxide minus oxygene mass flux). As for F_1 , oxidation in the gaseous phase does not modify this *passive* scalar:

$$\Gamma_{\text{gas}, H_2O}. \quad (\text{II.9.64})$$

Droplets enthalpy: $x_2^* H_2$

Enthalpy of droplets (J in droplets/kg bulk) is the product of liquid phase mass fraction (kg liq/kg bulk) by the specific enthalpy of liquid (kg liq/kg bulk). So the budget equation for liquid enthalpy has four source terms:

$$\Pi'_2 + S_{2,R} - \Gamma_{\text{evap}} H_{\text{vap}}(T_2) + \Gamma_{\text{het}} \left(\frac{M_O}{M_C} H_{O_2}(T_1) - \frac{M_{CO}}{M_C} H_{CO}(T_2) \right) \quad (\text{II.9.65})$$

with

- Π'_2 : heat flux between phases
- $S_{2,R}$: radiative source term for droplets
- $\Gamma_{\text{evap}} H_{\text{vap}}(T_2)$ the vapor flux leaves at droplet temperature (H_{vap} includes latent heat)
- $\Gamma_{\text{het}}(\dots)$ heterogenous combustion induces reciprocal mass flux: oxygen arriving at gas temperature and carbone monoxide leaving at char particle one.

Dispersed phase mass fraction: x_2^*

In budget equation for the mass fraction of the dispersed phase (first droplets, then char particles, at last ashes) the source terms are interfacial mass fluxes (first evaporation, then net flux for heterogeneous combustion):

$$- \Gamma_{\text{evap}} - \Gamma_{\text{het}}. \quad (\text{II.9.66})$$

Chapter 10

Groundwater flows

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 105/400
---------	--	---

10.1 Introduction

The Hydrogeology module of *Code_Saturne* is a numerical model for water flow and solute transport in continuous porous media, based on the Darcy law for flow calculation, and on the classical convection-diffusion equation for transport. It allows to simulate steady or unsteady flows, saturated or not, with scalar or tensorial permeabilities, and transport with dispersion, sorption and radioactive decay. Any law, even unlinear, is acceptable for dependances between moisture content, permeability and hydraulic head.

For the solving of the flow, the Richards equation is used, derived from the Darcy law and the conservation of mass. In the general case, this equation is non-linear and must be solved by a Newton scheme.

From this flow, the transport equation is solved, taking into account convection and diffusion, both slightly modified due to the specificities of underground transport.

Physical concepts and equations developed in this module are detailed hereafter.

10.2 Groundwater flows

10.2.1 Continuity Equation

The expression of the mass conservation for the water contained in a volume Ω of the subsurface, delimited by a surface boundary $\partial\Omega$, can be written:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S} = \int_{\Omega} \rho Q_s d\Omega \quad (\text{II.10.1})$$

with:

- θ is the moisture content (also called saturation) $[L^3.L^{-3}]$;
- ρ is the density of water $[M.L^{-3}]$;
- \underline{u} is the water velocity $[L.T^{-1}]$;
- Q_s is a volumetric source term $[L^3.T^{-1}]$.

By assuming a constant density of water ρ and using Gauss theorem, the equation simplifies to the following local expression:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div} (\underline{q}) = Q_s \quad (\text{II.10.2})$$

As seen in section 10.3, the moisture content can be determined from the pressure head.

10.2.2 Darcy Law

The momentum conservation equation in a continuous porous medium is expressed through Darcy law, an empirical relationship which shows the proportionality between the velocity of the water \underline{u} and the gradient of the soil water potential. This means that motion of water in a porous medium is due to both the gradient of water pressure and gravity. The following equation describes the pressure head h , which is equivalent to the water pressure but expressed in a length unit [L]:

$$h = \frac{p}{\rho g} + A, \quad (\text{II.10.3})$$

with A a constant such that $h = 0$ at the atmospheric pressure, as a convention. We also introduce the hydraulic head H :

$$H = h + z. \quad (\text{II.10.4})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 106/400
---------	--	---

Darcy law was initially established for mono-dimensional flows in saturated isotropic conditions. It binds darcian velocity \underline{q} , which is the product of the real flow velocity \underline{u} and the moisture content θ of the medium, to the gradient of hydraulic head. To represent anisotropic conditions and multidimensional flows, it has to be extended to a tensorial relationship:

$$\underline{q} = \theta \underline{u} = -K \underline{\nabla} H = -K \underline{\nabla} (h + z) \quad (\text{II.10.5})$$

where K can be scalar or tensoriel. It is called hydraulic conductivity. By abuse of langage, we also call it permeability, but in a rigorous sense the hydraulic conductivity is deduced from the permeability of the soil and the properties of the water. It varies in unsaturated conditions, and depends on the nature of the soil and the pressure head h (see section 10.3). Notice that the constant A has no importance in the Darcy equation, neither in the following of the development.

10.2.3 Richards equation

Richards equation is obtained by substitution of the velocity expression given in equation (II.10.5) directly into the continuity equation II.10.2:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \text{div} (K(h) \underline{\nabla} H) + Q_s \quad (\text{II.10.6})$$

10.3 Soil-water relationships

To close Richards equation, two extra relationships have to be given to link the hydraulic conductivity and the moisture content to the pressure head. The relationship between the moisture content and the pressure head is usually derived from the *soil water retention* curve, which is determined experimentally. The Hydrogeology module permits to define any model of that kind. In the following we denote θ_s the porosity of the soil and θ_r the residual moisture content, which is fraction of water that cannot be removed from the soil.

In saturated conditions, we have $\theta = \theta_s$ everywhere, thus θ only depends on the nature of the soil. As for the permeability, it usually does not depend on the pressure head in this case, and is also constant for a given soil.

In unsaturated conditions, the laws used to analytically derive soil hydraulic properties are usually highly non-linear. The Richards' equation is thus a non-linear second order partial differential equation in unsaturated conditions. The method chosen to solve it involves an iterative process used to linearise the equation as described in section 10.4. Let us give the example of the Van Genuchten model with Mualem condition, wich is the most commonly used:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} [1 + |\alpha h|^n]^{-m} & \text{if } h < 0 \\ 1 & \text{if } h \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.10.7})$$

with n and m two constant parameters.

$$K = \begin{cases} K_0 S_e^L \left(1 - \left(1 - S_e^{1/m}\right)^m\right)^2 & \text{if } h < 0 \\ K_0 & \text{if } h \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.10.8})$$

with K_0 a constant not depending on the moisture content. Notice that if $h > 0$, then we have a saturated soil. That is because we chose, as a convention (and as explained in section 10.2.2), to define the pressure head such that it vanishes at the atmospheric pressure. When the soil is saturated, the permeability is equal to K_0 , depending only on the soil.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 107/400
---------	--	--

10.4 Solving of the Richards equation

In the general case, the laws connecting the hydraulic properties are non-linear. We will have to implement an iterative process for solving the Richards equation. First, we define the soil capacity C :

$$C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}, \quad (\text{II.10.9})$$

which can be derived from the soil law linking θ and h . A classical way to solve Richard's equation (II.10.6) is to first transform it with the approximation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \simeq C(h) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (\text{II.10.10})$$

so that it becomes:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \simeq \text{div} (K(h) \underline{\nabla}(h + z)) + Q_s, \quad (\text{II.10.11})$$

this last formulation being called the *h-based* formulation. The equation (II.10.11) can be written (recalling that $H = h + z$):

$$C(H - z) \frac{\partial H}{\partial t} \simeq \text{div} (K(H - z) \underline{\nabla}(H)) + Q_s, \quad (\text{II.10.12})$$

and then discretized in time:

$$C(H^n - z) \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} \simeq \text{div} (K(H^{n+1} - z) \underline{\nabla}(H^{n+1})) + Q_s. \quad (\text{II.10.13})$$

The complete implicitation of the right hand term is made for ensuring stability. The explicitation of the capacity C is chosen after testing different options and noticing that implicitation does not improve the results. We will now linearize the equation (II.10.13) and define sub-iterations to solve it. Suppose that we seek unknown variable H^{n+1} at the sub-iteration $k + 1$ from its value at sub-iteration k . We write:

$$C(H^n - z) \frac{H^{n+1, k+1} - H^n}{\Delta t} \simeq \text{div} (K(H^{n+1, k} - z) \underline{\nabla}(H^{n+1, k+1})) + Q_s. \quad (\text{II.10.14})$$

The equation (II.10.14), whose unknown is $H^{n+1, k+1}$, is a transport equation without convection, which can be solved by the usual routines of *Code_Saturne*.

But the approximation (II.10.10) does not ensure a rigorous conservation of mass after discretization, because we do **not** have:

$$C(h^n) \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} = \frac{\theta(h^{n+1}) - \theta(h^n)}{\Delta t}.$$

Anyway, it is still possible to define the exact residual:

$$R(h^n, h^{n+1}) = C(h^n) \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} - \frac{\theta(h^{n+1}) - \theta(h^n)}{\Delta t} \quad (\text{II.10.15})$$

and to mix it into the discretized and linearized formulation (II.10.14) at the sub-iteration k , to obtain:

$$C(H^n - z) \frac{H^{n+1, k+1} - H^n}{\Delta t} \simeq \text{div} (K(H^{n+1, k} - z) \underline{\nabla}(H^{n+1, k+1})) + Q_s + R(H^n - z, H^{n+1, k} - z). \quad (\text{II.10.16})$$

As equation (II.10.14), this can be solved by the usual routines of *Code_Saturne*. Then the sub-iterations, if they converge, lead to the exact solution of:

$$\frac{\theta(h^{n+1}) - \theta(h^n)}{\Delta t} = [\text{div} (K(h^{n+1}) \underline{\nabla}(H^{n+1}))]^D + Q_s, \quad (\text{II.10.17})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 108/400
---------	--	---

where exponent D represents the spatial discretization of gradient - divergent operator in *Code_Saturne*. This discrete operator is rigorously conservative, thus the global volume of water:

$$\int_D \theta d\Omega,$$

where D denotes the entire domain, is conserved in a discrete sense (provided that there is no physical loss at the boundaries).

10.4.1 Finite Volume method in *Code_Saturne* for the operator-diffusive terms

In *Code_Saturne*, the integral on a cell Ω of the term $\text{div} (K \underline{\nabla} Y)$ is discretized this way:

$$\int_{\Omega} \text{div} (K \underline{\nabla} Y) d\Omega \simeq \sum_{f \in \mathcal{F}_i} K_f \underline{\nabla}_f Y \cdot \underline{S}_f, \quad (\text{II.10.18})$$

where \mathcal{F}_i is the set of the faces of cell i . For each face f , K_f is the face diffusivity (calculated from the diffusivities at centers of the adjacent cells, with an harmonic or arithmetic mean), $\underline{\nabla}_f Y$ is the gradient of Y at the face center, and \underline{S}_f is a vector normal to the face, whose size is the surface of the face, directed towards the outside of the cell Ω . There are two ways of calculating the term $\underline{\nabla}_f Y \cdot \underline{S}_f$: a simple one (*i.e.* without reconstruction) and an accuracy one (*i.e.* with reconstruction). In the general case, two adjacent cells of *Code_Saturne* can be represented like in the picture below, where two cells i and j are separated by a face denoted f_{ij} : The variables are known at centers of the cells, *i.e.* at points I and J . But to get a rigorous estimation of the normal gradient at the center of the face f_{ij} , we need values at points I' and J' :

$$\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{S}_{ij} = \frac{Y_{J'} - Y_{I'}}{I'J'}. \quad (\text{II.10.19})$$

The face gradient without reconstruction is calculated by the approximation:

$$\underline{\nabla}_{f_{ij}} Y \cdot \underline{S}_{ij} = \frac{Y_J - Y_I}{IJ}. \quad (\text{II.10.20})$$

The less the vector IJ is orthogonal to the face f_{ij} , the more this approximation is wrong. But it has the advantage to be easy and quick to deduce from the variables at cell centers, with a linear relation, and to depend only on the variables of the adjacent cells. The face gradient with reconstruction is calculated following the relation (II.10.19), thanks to the relations:

$$Y_{I'} = Y_I + \underline{\nabla} Y_I \cdot \underline{II'}. \quad (\text{II.10.21})$$

$$Y_{J'} = Y_J + \underline{\nabla} Y_J \cdot \underline{JJ'}. \quad (\text{II.10.22})$$

Thus, the calculation of the face gradient with reconstruction requires a calculation of the gradients of Y at cell centers, which can be done by several methods. Depending on the choosen method, the relation between the values of Y at cell centers and the gradient at cell centers can be nonlinear and require a large stencil of cells. We will see in section 10.4.2 how the laplacian is solved in *Code_Saturne*, in order to get the solution with the accurate definition of the face gradients but to keep the simple definition for matrix inversions.

10.4.2 Solving of the linear sub-iteration in *Code_Saturne*

The sub-iteration (II.10.16) can be rewritten:

$$f_s \delta_H - \text{div} (\mu \underline{\nabla} \delta_H) = Q_H, \quad (\text{II.10.23})$$

where:

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 109/400
---------	--	---

- $\delta_H = H^{n+1, k+1} - H^{n+1, k}$ is the unknown;
- $f_s = \frac{C(H^n - z)}{\Delta t}$, not depending on the unknown;
- $\mu = K(H^{n+1, k} - z)$ is the diffusion coefficient, tensorial if the permeability is tensorial. It does not depend on the unknown;
- Q_H is the second member, not depending on the unknown.

We have:

$$Q_H = Q_s + R(H^n - z, H^{n+1, k} - z) - \text{div} \left(K(H^{n+1, k} - z) \underline{\nabla}(H^{n+1, k}) \right). \quad (\text{II.10.24})$$

Now, let us denote E_n the following operator, that applies on any discrete field x :

$$E_n(x) = f_s x - [\text{div} (\mu \underline{\nabla} x)]^D, \quad (\text{II.10.25})$$

where exponent D represents the spatial discretization of gradient - divergent operator in *Code_Saturne*. This operator is linear but, when using the reconstruction of the non-orthogonalities, it is difficult to invert (see section 10.4.1). Thus, we also define EM_n , that is the equivalent of E_n but without taking into account the reconstruction of non-orthogonalities. Now, we write the discretisation of the equation (II.10.23) in the form:

$$E_n(x) = Q_H, \quad (\text{II.10.26})$$

where x is the unknown. In order to solve it, we define the sequence $(x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ that is calculated following these iterations:

- $EM_n(\delta x^{m+1}) = -E_n(\delta x^m) + Q_H$;
- $x^{m+1} = x^m + \delta x^{m+1}$;
- $x^0 = \text{initial guess}$.

With that method, we only invert the simple matrix EM_n . If the iterations converge, we get the solution of (II.10.26) with an arbitrary precision, and with a precise definition of the discrete diffusive operator. This is the standard way of dealing with the diffusion problem in *Code_Saturne*. See documentation on routine *codits*, for example, for further details.

10.4.3 Determination of the velocity field

Theoretically, the darcy velocity field \underline{q} of the flow just has to be calculated from the pressure head field, thanks to the Darcy relation (II.10.5). This can be done with the routine of *Code_Saturne* that calculates the gradient of a variable at cell centers from the values of this variable at cell centers. However, this simple way of getting the velocity field is only used for posttreatment purpose, and not used in the transport equation, for the reasons given below.

In *Code_Saturne*, the integral on a cell Ω of the convection term $\text{div} (Y \underline{q})$, where \underline{q} is a velocity field and Y a transported variable, is discretized this way:

$$\int_{\Omega} \text{div} (Y \underline{q}) d\Omega \simeq \sum_{f \in \mathcal{F}_i} Y_f \underline{q}_f \cdot \underline{S}_f, \quad (\text{II.10.27})$$

where \mathcal{F}_i is the set of faces for cell i . For each face f , Y_f is the value of Y at the center of face \mathcal{F}_i (calculated from the values of Y at centers of the adjacent cells, with an arithmetic mean), \underline{q}_f is the velocity at face center, and \underline{S}_f is a vector normal to the face, whose size is the surface of the face, directed towards the outside of the cell Ω . Thus the term $\underline{q}_f \cdot \underline{S}_f$ is the mass flux at face center.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 110/400
---------	--	---

These mass fluxes at face centers could be deducted from the velocity values at cell centers, but this method would not ensure the exact coherence of these mass fluxes with the continuity equation (II.10.2). To ensure this coherence, let us write the discrete continuity equation:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\partial t} + [\text{div}(\underline{q})]^D = Q_s, \quad (\text{II.10.28})$$

where exponent D corresponds to the discrete operator for convection, described above. Mixing the discrete Richards equation (II.10.17) and the discrete continuity equation (II.10.28), we want to have:

$$[\text{div}(K(h^{n+1})\underline{\nabla}(H^{n+1}))]^D = [\text{div}(\underline{q})]^D. \quad (\text{II.10.29})$$

Exponent D still represents discretisation of operators. Taking into account equation (II.10.18) and equation (II.10.27), this leads for each face f of the domain to:

$$K(h^{n+1})_f \underline{\nabla}_f H^{n+1} \cdot \underline{S}_f = \underline{q}_f \cdot \underline{S}_f. \quad (\text{II.10.30})$$

This gives the good value for $\underline{q}_f \cdot \underline{S}_f$, available from the solving of Richards equation.

So, for the purpose of discrete coherence between flow and transport equations (which is important for the precision of the computation and coherence of the results), we deduct the mass fluxes used in the transport equation from the normal gradients of the pressure head H calculated in the solving of Richards equation, instead of deducting them from the velocity values at cell centers.

10.4.4 Convergence criterion

Two choices are available for the convergence criterion of the loop over sub-iterations k (from section 10.4). The first possibility is to continue the loop until two successive pressure head fields are close enough, *i.e.*

$$\|h^{n+1, k+1} - h^{n+1, k}\|^{L2} \leq \epsilon,$$

where the value of ϵ is given by the user. The second possibility is to impose such a condition on the velocity field of the flow, *i.e.*

$$\|u_x^{n+1, k+1} - u_x^{n+1, k}\|^{L2} + \|u_y^{n+1, k+1} - u_y^{n+1, k}\|^{L2} + \|u_z^{n+1, k+1} - u_z^{n+1, k}\|^{L2} \leq \epsilon,$$

where we denoted u_x , u_y and u_z the components of \underline{u} over the three spatial directions. This last choice imposes to calculate the velocity field at the end of each sub-iteration. Both of these options are available in the module.

10.4.5 Cases without gravity

If we don't want to take into account the gravity, then the Darcy law writes:

$$\underline{u} = -K\underline{\nabla}h, \quad (\text{II.10.31})$$

and the Richards equation becomes:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \text{div}(K(h) \underline{\nabla}(h)) + Q_s, \quad (\text{II.10.32})$$

which is solved exactly the same way, except that the solved variable is h instead of H . The user of the module must be careful to adapt the initial conditions, boundary conditions and soil-laws accordingly.

10.5 Groundwater Transfers

10.5.1 Introduction

The transport of a contaminant in variably saturated porous media is treated by the Hydrogeology module, based on the transport solver already present in *Code_Saturne*, with few specific developments.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 111/400
---------	--	--

10.5.2 Advection/dispersion/diffusion/decay equation

We assume hereafter that the contaminant only exists in the liquid phase and is potentially sorbed on the solid matrix. We also assume that the transport phenomena in the liquid phase are advection, kinematic dispersion and molecular diffusion. The classical transport equation in variably saturated flow is:

$$\frac{\partial(R\theta c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \underline{q}_i c}{\partial x_i} + Q_s c_r - \lambda R \theta c \quad (\text{II.10.33})$$

where:

- R is the delay factor, representing sorption phenomena [-];
- θ is the moisture content [$L^3.L^{-3}$];
- c is the contaminant concentration in the liquid phase [$M.L^{-3}$];
- \underline{q} refers to the darcian velocity, which is a result of the solving of the Richards equation (see section 10.4.3) [$L.T^{-1}$];
- λ is a first-order decay coefficient [$M.L^{-3}.T^{-1}$];
- Q_s refers to the volumetric flow source/sink, from the Richards equation (II.10.6) [$M^3.T^{-1}$];
- c_r is the source/sink concentration [$M.L^{-3}$];
- D_{ij} is the dispersion tensor. It contains both the kinematic dispersion and the molecular diffusion [$L^2.T^{-1}$].

We note the following differences with the standard formulation of the transport equation in *Code_Saturne*:

- the presence of the delay factor R and the moisture content θ in the unsteady term;
- the tensorial diffusivity D_{ij} .

The delay factor R is given by:

$$R = 1 + \frac{\rho k_d}{\theta} \quad (\text{II.10.34})$$

- θ is the moisture content [$L^3.L^{-3}$];
- ρ is the *bulk* density [$M.L^{-3}$];
- K_d is the contaminant distribution coefficient [$L^3.M^{-1}$]

10.5.3 Kinematic dispersion

Kinematic dispersion results from the existence of a very complex and unknown velocity field which is not taken into account for advection (the average Darcy velocity is considered instead). It results in a kinematic dispersion tensor denoted D_k , whose main directions of anisotropy are the direction of the flow and two directions orthogonal to the flow. This tensor can be inferred from two parameters named longitudinal and transversal dispersion coefficients (m.s-1), denoted α_l and α_t , and from the amplitude of the velocity darcy field. In an orthonormal frame such that the first direction is the direction of the flow, this kinematic dispersion tensor writes:

$$D_k = |\underline{q}| \begin{pmatrix} \alpha_l & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_t & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_t \end{pmatrix} \quad (\text{II.10.35})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 112/400
---------	--	--

Physically, The coefficients α_l and α_t are representative of the size of the biggest heterogeneities on the solute path. Their determination is empirical.

10.5.4 Molecular diffusion

Molecular diffusion is due to Brownian motion of solute molecules that tends to reduce the differences of concentration in different points of a continuous medium. It is already taken into account in the standard transport equation of *Code_Saturne*. In porous media, molecular diffusion occurs in the whole fluid phase but not in the solid medium. Hence, the diffusion coefficient is, in the general case, proportional to the moisture content θ . It is denoted d_m .

10.5.5 Dispersion tensor

Finally, the dispersion tensor D_{ij} is the cumulation of the kinematic dispersion tensor D_k and the molecular diffusion scalar. In a frame independant of the flow, it can be written:

$$D_{ij} = \alpha_t |\underline{q}| \delta_{ij} + (\alpha_l - \alpha_t) \frac{q_i q_j}{|\underline{q}|} + d_m \delta_{ij}, \quad (\text{II.10.36})$$

where:

- δ_{ij} refers to the Kronecker symbol $[-]$;
- α_l is the longitudinal dispersivity $[L]$;
- α_t is the transversal dispersivity $[L]$;
- d_m is the water molecular diffusion $[L^2.T^{-1}]$;
- \underline{q}_i refers to the darcian velocity in the direction i $[L.T^{-1}]$;
- $|\underline{q}|$ is the norm of the darcian velocity $[-]$.

Finally, the tensor is symetric (*i.e.* $D_{ij} = D_{ji}$) and can be expressed as:

- $D_{xx} = \alpha_l \frac{q_x^2}{|\underline{q}|} + \alpha_t \frac{q_y^2}{|\underline{q}|} + \alpha_t \frac{q_z^2}{|\underline{q}|} + d_m$;
- $D_{yy} = \alpha_t \frac{q_x^2}{|\underline{q}|} + \alpha_l \frac{q_y^2}{|\underline{q}|} + \alpha_t \frac{q_z^2}{|\underline{q}|} + d_m$;
- $D_{zz} = \alpha_t \frac{q_x^2}{|\underline{q}|} + \alpha_t \frac{q_y^2}{|\underline{q}|} + \alpha_l \frac{q_z^2}{|\underline{q}|} + d_m$;
- $D_{xy} = (\alpha_l - \alpha_t) \frac{q_x q_y}{|\underline{q}|}$;
- $D_{xz} = (\alpha_l - \alpha_t) \frac{q_x q_z}{|\underline{q}|}$;
- $D_{yz} = (\alpha_l - \alpha_t) \frac{q_y q_z}{|\underline{q}|}$.

10.5.6 Specificities of the groundwater transport equation in relation to the standard transport equation

The general method developed in *Code_Saturne* for the treatment of the transport equation is kept; just a few changes in the definition of the general matrix to invert and of the right hand side have been done, in order to take into account the presence of the moisture content and delay in the unsteady

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 113/ 400
---------	--	---

term, and to give to the user the opportunity to define a dispersion tensor. More specifically, as values at iterations n and $n + 1$ of moisture content and delay are available for the transport calculation at iteration n , we can discretize the unsteady term this way:

$$\frac{\partial(R\theta c)}{\partial t} \simeq \frac{R^{n+1} \theta^{n+1} c^{n+1} - R^n \theta^n c^n}{\Delta t}, \quad (\text{II.10.37})$$

which ensures global discrete mass conservation of the tracer.

Chapter 11

Magneto-Hydro Dynamics

See § [A](#).

Chapter 12

Lagrangian particle tracking

See § [A](#).

Chapter 13

Cavitation modelling

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 117/400
---------	--	--

13.1 System equations

The cavitation model is based on an homogeneous mixture model. In this model, the physical properties, the density ρ and the dynamic viscosity μ , of the mixture depends on a resolved void fraction α and constant reference properties ρ_l , μ_l for the liquid phase and ρ_v , μ_v for the gas phase, following the relations:

$$\rho = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l, \quad (\text{II.13.1})$$

$$\mu = \alpha \mu_v + (1 - \alpha) \mu_l. \quad (\text{II.13.2})$$

In this model, it is assumed that the mixture dynamic is ruled by the classical incompressible Navier–Stokes equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0, \quad (\text{II.13.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \rho \underline{u}) = -\underline{\nabla} P + \underline{\text{div}} \underline{\tau}. \quad (\text{II.13.4})$$

Eq. (II.13.4) corresponds to the momentum equation in Eq. (I.2.11) where the volume source terms have been removed for brevity and $\Gamma \equiv 0$ for the mass source term.

Using (II.13.1), the mass equation can be splitted into:

$$\frac{\partial(\alpha \rho_v)}{\partial t} + \text{div}(\alpha \rho_v \underline{u}) = \Gamma_V, \quad (\text{II.13.5})$$

$$\frac{\partial((1 - \alpha) \rho_l)}{\partial t} + \text{div}((1 - \alpha) \rho_l \underline{u}) = -\Gamma_V, \quad (\text{II.13.6})$$

with Γ_V representing the vaporization (resp. condensation) source (resp. sink) term, appearing with an opposite sign in the liquid part of the density budget.

Using the fact that the reference densities ρ_v and ρ_l are constant, Eqs. (II.13.5) and (II.13.6) can be easily written in the form:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha \underline{u}) = \frac{\Gamma_V}{\rho_v}, \quad (\text{II.13.7})$$

$$\text{div}(\underline{u}) = \Gamma_V \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right). \quad (\text{II.13.8})$$

It is seen that the mass equation of the mixture Eq. (II.13.1) has been splitted into two equations: one simple convection equation which can be used to solve the void fraction and one equation structurally similar to the one solved at the correction step of the predictor-corrector solver of *Code_Saturne* (see Appendix O). The global resolution scheme of the cavitation module is thus the following:

1. Prediction of the velocity using Eq. (II.13.4) (see Appendix N).
2. Correction of the velocity using Eq. (II.13.8) (see Appendix O).
3. Resolution of the void fraction using Eq. (II.13.7).
4. Update physical properties of the mixture using Eqs. (II.13.1) and (II.13.2).

13.2 Vaporization source term

In the cavitation module of *Code_Saturne*, the Γ_V source term is modeled using the Merkle model:

$$\Gamma_v(\alpha, P) = m^+ + m^-,$$

with:

$$m^+ = -\frac{C_{prod} \rho_l \min(P - P_V, 0) \alpha (1 - \alpha)}{0.5 \rho_l u_\infty^2 t_\infty}, \quad m^- = -\frac{C_{dest} \rho_v \max(P - P_V, 0) \alpha (1 - \alpha)}{0.5 \rho_l u_\infty^2 t_\infty}, \quad (\text{II.13.9})$$

and $C_{prod} = 1000$, $C_{dest} = 50$ empirical constants, $t_\infty = l_\infty / u_\infty$ a reference time scale and P_V the reference saturation pressure. l_∞ , u_∞ and P_V may be provided by the user.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 118/400
---------	--	--

13.3 Time stepping

At each time step n , the global resolution scheme follows successively the steps 1 to 4 described above (§13.1). In this resolution scheme, the physical properties are updated at the end of the time step n .

Prediction step The procedure is almost identical to the classical one described at Appendix N. Only the discretization of the time derivative at the l.h.s of Eq. (II.13.4) is modified in order to take into account that the mixture density is updated at the end of the time step. In the cavitation algorithm, the time derivative at time step $n + 1$ is discretized by:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) \simeq \frac{\rho^n \tilde{\underline{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \underline{u}^n}{\Delta t^n},$$

with $\tilde{\underline{u}}^{n+1}$ the predicted velocity at time step $n + 1$.

Correction step With the Merkle model described above (§13.2), the correction step equation of the cavitation model writes:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Delta t^n}{\rho} \underline{\nabla} \delta P \right) = \operatorname{div}(\tilde{u}) - \Gamma_V(\alpha, P).$$

In this equation, the pressure in the cavitation source term is taken implicit while the void fraction is explicit:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Delta t^n}{\rho} \underline{\nabla} (\delta P)^{n+1} \right) = \operatorname{div}(\tilde{u}^{n+1}) - \Gamma_V(\alpha^n, P^{n+1}) \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right).$$

Void fraction resolution The time discretization of Eq. (II.13.8) is:

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(\alpha^{n+\theta} \underline{u}^{n+\theta}) = \frac{1}{\rho_v} \Gamma_V(\alpha^n, P^{n+1}). \quad (\text{II.13.10})$$

In this equation, the cavitation source term is discretized with the time scheme as the one used at the correction step in order to ensure the exact mass conservation (it is recalled that the void fraction transport equation and correction step are two part of the mixture mass conservation equation, Eq. (II.13.3)).

Part III

Appendices

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 120/400
---------	--	--

Calling tree

Each sub-section of this document is associated with an important subroutine. The full list of the subroutines described here is the following: `bilsc2` `clptur` `clsyvt` `codits` `condli` `covofi` `gradmc` `gradrc` `inimas` `itrmas` `matrix` `navstv` `predvv` `resopv` `turbke` `turrij` `viscfa` `visort` `visecv`.

The table 1 presents their sequence within a time step. This calling tree is only partial. In particular, it does not account for the number of calls to each subroutine. Also, for the sake of clarity, no reference has been made to the subroutines dedicated to the gradient calculation (`gradmc`, `gradrc`), which are called very often. For the same reason, the calls to `bilsc2` (advection fluxes) and `matrix` (matrix calculation) which are made from within `codits` (treatment of an advection equation with source terms) have not been reported.

The sub-sections where important information can be found are indicated below:

Calculation of gradients

`gradrc`
`gradmc`

Least square method

`gradmc`

Convective schemes

`bilsc2`

Wall-laws (for velocity and temperature)

`clptur`
`condli`

System solve (incremental method)

`codits`

Calculation of the values at the faces (not exhaustive)

`viscfa`
`visort`

Finally, for the reader wishing to become more familiar with the methods implemented in *Code_Saturne*, it is recommended to begin with the study of the advection equation for a scalar (`covofi`) which is solved iteratively using an incremental method (`codits`). It will then be useful to look at `navstv` which briefly presents the solution of the system made up of the mass and momentum equations.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 121/ 400
---------	--	---

Calculation of the physical properties

Boundary Conditions

condli	
clptur	“turbulent” conditions at the wall
clsyvt	symmetry conditions for the vectors and the tensors

Navier-Stokes solution

navstv	
Velocity prediction	
predvv	
visecv	momentum source terms related to the transposed gradient of the velocity
viscfa	calculation of the viscosity at the faces
codits	iterative solution of the system using an incremental method
Pressure correction	
resopv	
viscfa	calculation of the time step at the faces...
visort	...according to the selected options
matrix	calculation of the Poisson equation matrix
inimas	initialisation of the mass flow rate
itrmas	update of the mass flow rate
Velocity correction	
	standard method

$k - \varepsilon$ model

turbke	
viscfa	preliminary steps before...
bilsc2	...source terms coupling
viscfa	calculation of the viscosity at the faces
codits	iterative solution of the systems using an incremental method

Reynolds stress model

turrij	
visort	calculation of the viscosity at the faces
codits	iterative solution of the systems using an incremental method

Equations for the scalars

covofi	
viscfa	calculation of the viscosity at the faces
codits	iterative solution of the systems using an incremental method

Table 1: Partial and simplified calling tree associated with the successive stages within a time step.

Part IV

Base module

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 123/ 400
---------	--	---

A- bilsc2 routine

Function

In this subroutine, called by `codits` and `turbke`, the contributions to the explicit budget of the reconstructed (on non-orthogonal meshes and if the user chooses to) convective and diffusive terms of the right-hand side of a convection/diffusion equation for a scalar a are computed. These terms write¹:

$$\mathcal{B}_\beta((\rho \underline{u})^n, a) = \underbrace{-\operatorname{div}((\rho \underline{u})^n a)}_{\text{convective part}} + \underbrace{\operatorname{div}(\beta \underline{\nabla} a)}_{\text{diffusive part}} \quad (\text{IV.A.1})$$

with ρ , \underline{u} , β and a the variables at time t^n .

Discretization

Convective Part

Using the notations adopted in the subroutine `navstv`, the explicit budget corresponding to the integration over a cell Ω_i of the convective part $-\operatorname{div}((\rho \underline{u})^n a)$ of \mathcal{B}_β can be written as a sum of the numerical fluxes F_{ij} calculated at the faces of the internal cells, and the numerical fluxes $F_{b_{ik}}$ calculated at the boundary faces of the computational domain Ω . Let's take $Neigh(i)$ the set of the centres of the neighbouring cells of Ω_i and $\gamma_b(i)$ the set of the centres of the boundary faces of Ω_i (if they exist). Thus we can write

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div}((\rho \underline{u})^n a) d\Omega = \sum_{j \in Neigh(i)} F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} F_{b_{ik}}((\rho \underline{u})^n, a)$$

with :

$$F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) = [(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}] a_{f,ij} \quad (\text{IV.A.2})$$

$$F_{b_{ik}}((\rho \underline{u})^n, a) = [(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}] a_{f_{b_{ik}}} \quad (\text{IV.A.3})$$

where $a_{f,ij}$ and $a_{f_{b_{ik}}}$ represent the values of a at the internal and boundary faces of Ω_i , respectively.

Before presenting the different convection schemes available in *Code_Saturne*, we define:

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}} \text{ defined at the internal faces only and}$$

$$\underline{u}_{K'} = \underline{u}_K + (\underline{\operatorname{grad}} \underline{u})_K \cdot \underline{KK'} \text{ at the first order in space, for } K = I \text{ or } J$$

The value of the convective flux F_{ij} depends on the numerical scheme. Three different types of convection schemes are available in this subroutine:

¹They appear on the right-hand side of the incremental system for cell I of the momentum prediction step: $\mathcal{EM}(\delta \underline{u}^{k+1}, I) = \mathcal{E}(\underline{u}^{n+1/2,k}, I)$ (see `navstv` for more details)

- a 1st order upwind scheme:

$$F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) = F_{ij}^{upstream}((\rho \underline{u})^n, a)$$

$$\text{où : } a_{f,ij} = \begin{cases} a_I & \text{si } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ a_J & \text{si } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases}$$

- a centered scheme:

$$F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) = F_{ij}^{centered}((\rho \underline{u})^n, a)$$

with : $a_{f,ij} = \alpha_{ij} a_{I'} + (1 - \alpha_{ij}) a_{J'}$

- a Second Order Linear Upwind scheme (SOLU):

$$F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) = F_{ij}^{SOLU}((\rho \underline{u})^n, a)$$

$$\text{with : } a_{f,ij} = \begin{cases} a_I + \underline{IF} \cdot (\nabla a)_I & \text{si } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ a_J + \underline{JF} \cdot (\nabla a)_J & \text{si } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases}$$

The value of $F_{b_{ik}}$ is calculated as :

$$a_{f, b_{ik}} = \begin{cases} a_I & \text{if } (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \geq 0 \\ a_{b_{ik}} & \text{if } (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} < 0 \end{cases}$$

$a_{b_{ik}}$ is the boundary value directly computed from the prescribed boundary conditions.

REMARK 1

When a centered scheme is used, we actually write (to ensure first order discretization in space for a)

$$a_{f,ij} = \alpha_{ij} a_I + (1 - \alpha_{ij}) a_J + \frac{1}{2} [(\nabla a)_I + (\nabla a)_J] \cdot \underline{OF}$$

A factor $\frac{1}{2}$ is used for numerical stability reasons.

REMARK 2

A slope test (which may introduce non-linearities in the convection operator) allows to switch from the centered or SOLU scheme to the first order upwind scheme (without blending). Additionally, in standard mode $a_{f,ij}$ is computed as a weighted average between the upstream value and the centered value (blending), according to users' choice (variable **BLENCV** in the subroutine **usini1**).

Diffusive Part

Similarly, the diffusive part writes :

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\beta \nabla a) d\Omega = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} D_{ij}(\beta, a) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{b_{ik}}(\beta, a)$$

¹Extrapolation of the upwind value at the faces centre.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 126/400
---------	--	--

with:

$$D_{ij}(\beta, a) = \beta_{ij} \frac{a_{J'} - a_{I'}}{I'J'} S_{ij} \quad (\text{IV.A.4})$$

and :

$$D_{b_{ik}}(\beta, a) = \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_{I'}}{I'F} S_{b_{ik}} \quad (\text{IV.A.5})$$

using the same notations as before, and with S_{ij} and $S_{b_{ik}}$ being the norms of vectors \underline{S}_{ij} , and $\underline{S}_{b_{ik}}$ respectively.

Implementation

In the following, the reader is reminded of the role of the variables used in the different tests: • IRCFLP, from array IRCFLU ; indicates for the considered variables whether or not the convective and diffusive fluxes are reconstructed

= 0 : no reconstruction

= 1 : reconstruction

• ICONVP, from array ICONV ; indicates if the considered variables is convected or not.

= 0 : no convection

= 1 : convection

• IDIFFP, from array IDIFF ; indicates if the diffusion of the considered variables is taken into account or not.

= 0 : no diffusion

= 1 : diffusion

• IUPWIN indicates locally, in `bilsc2` (to avoid unnecessary calculations) whether a pure upwind scheme is chosen or not for the considered variables to be convected.

= 0 : no pure upwind

= 1 : pure upwind is used

• ISCHCP, from array ISCHCV ; indicates which type of second order convection scheme is used on orthogonal meshes for the considered variable to convect (only useful if `BLENCV` > 0).

= 0 : we use the SOLU scheme (Second Order Linear Upwind)

= 1 : we use a centered scheme

In both cases the blending coefficient `BLENCV` needs to be given in `usini1`.

• `BLENCV`, from array `BLENCV` ; indicates the percentage of centered or SOLU convection scheme that one wants to use. This weighting coefficient is between 0 and 1.

• `ISSTPP`, from array `ISSTPC` ; indicates if one wants to remove the slope test that switches the convection scheme from second order to upwind if the test is positive.

= 0 : a slope test is systematically used

= 1 : no slope test

Computation of the gradient $\underline{G}_{c,i}$ of variable a

The computation of the gradient of variable a is necessary for the computation of the explicit budget. `grdccl` is called everytime this gradient is needed, and it is stored in the array (`DPDX`, `DPDY`, `DPDZ`). The computation of the gradient is necessary in the following situations: • if the convection is activated with a non pure upwind scheme (`ICONVP` \neq 0 and `IUPWIN` = 0) **and**,

if we want to reconstruct the fluxes (`IRCFLP` = 1),

or if we want to use the SOLU scheme (`ISCHCP` = 0),

or if we use the slope test (`ISSTPP` = 0),

or :

- if there is diffusion and we want to reconstruct the fluxes (`IDIFFP` \neq 0 and `IRCFLP` = 1).

In all other cases, the array (`DPDX`, `DPDY`, `DPDZ`) is set to zero.

Computation of the upwind gradient $\underline{G}_{c,i}^{amount}$ of variable a

$\underline{G}_{c,i}^{amount}$ refers to the upwind gradient of variable a , for cell Ω_i . It is stored in the array (DPDXA, DPDYA, DPDZA). We also define the scalars a_{ij}^{amount} and $a_{b_{ik}}^{amount}$ as:

$$|\Omega_i| \underline{G}_{c,i}^{upwind} \stackrel{def}{=} \sum_{j \in Neigh(i)} a_{ij}^{upwind} \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} a_{b_{ik}}^{upwind} \underline{S}_{b_{ik}} \quad (\text{IV.A.6})$$

After initializing it to zero, $\underline{G}_{c,i}^{amount}$ **is only computed** when the user wishes to compute a **convection term with a centered or SOLU method, and a slope test**.

- For each cell Ω_i , the face values a_{IF} (variable PIF) and a_{JF} (variable PJF), are computed as:

$$\begin{aligned} a_{IF} &= a_I + \underline{IF} \cdot (\nabla a)_I \\ a_{JF} &= a_J + \underline{JF} \cdot (\nabla a)_J \end{aligned}$$

Depending on the sign s_{ij}^n of the mass flux $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}$, we give a_{IF} or a_{JF} the value a_{ij}^{upwind} of the expression $\sum_{j \in Neigh(i)} a_{ij}^{upwind} \underline{S}_{ij}$.

$$a_{ij}^{upwind} = \begin{cases} a_I + \underline{IF} \cdot (\nabla a)_I & \text{si } s_{ij}^n = 1 \\ a_J + \underline{JF} \cdot (\nabla a)_J & \text{si } s_{ij}^n = -1 \end{cases}$$

- The boundary terms are computed in a classic manner as follows (keeping the same notations as in the other subroutines):

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \gamma_b(i)} a_{b_{ik}}^{upwind} \underline{S}_{b_{ik}} &= \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} a_{I'}) \underline{S}_{b_{ik}} \\ &= \sum_{k \in \gamma_b(i)} [\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} a_I + B_{b,ik} \underline{II'} \cdot \underline{G}_{c,i}] \underline{S}_{b_{ik}} \end{aligned}$$

$(A_{b,ik}, B_{b,ik})_{k \in \gamma_b(i)}$ are stored in the arrays (COEFAP, COEFBP). The vector $\underline{II'}$ is stored in the array (DIIPBX, DIIPBY, DIIPBZ). The surfaces $(\underline{S}_{b_{ik}})_{k \in \gamma_b(i)}$ are stored in the array SURFBO.

Summation of the numerical convective and diffusive fluxes

The contributions to the explicit budget $[-\text{div}((\rho \underline{u})^n a) + \text{div}(\beta \nabla a)]$ are computed and added to the right-hand side array **SMBR**, which has already been initialized before the call to **BILSC2** (with the explicit source terms for instance, etc.).

The variable **FLUX** gathers the convective and diffusive parts of the numerical fluxes. It is computed in a classic manner, first on the internal faces, and then on the boundary faces. The indices i and j are represented by **II** and **JJ**, respectively.

In order to take into account (when necessary) the sign s_{ij}^n of the mass flux $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}$, the following equations are used :

For any real b , we have :

$$\begin{cases} b &= b^+ + b^- \text{ with } b^+ = \max(b, 0), \quad b^- = \min(b, 0) \\ |b| &= b^+ - b^- \\ b^+ &= \frac{1}{2} [b + |b|] \\ b^- &= \frac{1}{2} [b - |b|] \end{cases}$$

In this subroutine, b represents the mass flux **FLUMAS(IFAC)** on an internal face **IFAC** (**FLUMAB(IFAC)** for a boundary face **IFAC**) ; b^+ is stored in **FLUI** and b^- in **FLUJ**.

- for an internal face ij (IFAC)

We calculate :

$$\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} F_{ij}((\rho \underline{u})^n, a) - \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} D_{ij}(\beta, a) = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left([(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}] a_{f,ij} - \beta_{ij} \frac{a_{I'} - a_{I'}}{I'J'} S_{ij} \right)$$

The above sum corresponds to the numerical operation:

$$\begin{aligned} \text{FLUX} &= \text{ICONVP} \cdot [\text{FLUI} \cdot \text{PIF} + \text{FLUJ} \cdot \text{PJF}] \\ &+ \text{IDIFFP} \cdot \text{VISCF}(\text{IFAC}) \cdot [\text{PIP} - \text{PJP}] \end{aligned} \quad (\text{IV.A.7})$$

The above equation does not depend on the chosen convective scheme, since the latter only affects the quantities PIF (face value of a used when b is positive) and PJF (face value of a used when b is négative). PIP represents $a_{I'}$, PJP $a_{J'}$ and VISCF(IFAC) $\beta_{ij} \frac{S_{ij}}{I'J'}$.

The treatment of diffusive part is identical (either with or without reconstruction). Consequently, only the numerical scheme relative to the convection differs.

- for a boundary face ik (IFAC)

We compute the terms :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} F_{b_{ik}}((\rho \underline{u})^n, a) - \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{b_{ik}}(\beta, a) = \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left([(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}] a_{f_{b_{ik}}} - \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_{I'}}{I'F} S_{b_{ik}} \right)$$

with:

$$\begin{aligned} a_{I'} &= a_I + \underline{II'} \cdot \underline{G}_{c,i} \\ a_{b_{1ik}} &= \text{INC} A_{b,ik} + B_{b,ik} a_{I'} \\ a_{b_{ik}} &= \text{INC} A_{b,ik}^{diff} + B_{b,ik}^{diff} a_{I'} \end{aligned}$$

The coefficients $(A_{b,ik}, B_{b,ik})_{k \in \gamma_b(i)}$ (resp. $(A_{b,ik}^{diff}, B_{b,ik}^{diff})_{k \in \gamma_b(i)}$) represent the boundary conditions associated with a (resp. the diffusive fluxes ² of a).

The above sum corresponds to the numerical operation:

$$\begin{aligned} \text{FLUX} &= \text{ICONVP} \cdot [\text{FLUI} \cdot \text{PVAR}(\text{II}) + \text{FLUJ} \cdot \text{PFAC}] \\ &+ \text{IDIFFP} \cdot \text{VISCb}(\text{IFAC}) \cdot [\text{PIP} - \text{PFACD}] \end{aligned} \quad (\text{IV.A.8})$$

where PFAC represents $a_{b_{1ik}}$, PIP $a_{I'}$, PFACD $a_{b_{ik}}$ and VISCb(IFAC) $\beta_{b_{ik}} \frac{S_{b_{ik}}}{I'F}$.

This treatment is common to all schemes, because boundary values only depend on boundary conditions, and because a very simplified expression of $F_{b_{ik}}$ is used (upwind) ³.

We still have to compute, when the convection option is activated ($\text{ICONVP} = 1$), the values of variables PIF and PJF, for any internal face IFAC between cell Ω_i and Ω_j .

Calculation of the flux in pure upwind IUPWIN = 1

In this case, there is no reconstruction since only the values PVAR(II) and PVAR(JJ) at the cell centres are needed.

$$\begin{aligned} \text{PIF} &= \text{PVAR}(\text{II}) \\ \text{PJF} &= \text{PVAR}(\text{JJ}) \end{aligned} \quad (\text{IV.A.9})$$

The variable INFAC counts the number of calculations in pure upwind, in order to be printed in the listing file. In order to obtain the global numerical flux FLUX (convective + diffusive) associated, the following operations are performed :

²see `clptur` for more details. The difference is actually only effective when the $k-\epsilon$ model is used, and for the velocity only.

³Actually, $a_{f_{b_{ik}}}$ is a_I if $(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \geq 0$, $a_{b_{1ik}}$ otherwise.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 129/400
---------	--	---

- calculation of vectors \underline{II}' and \underline{JJ}' ,
- calculation of the face gradient (DPXF, DPYF, DPZF) with the half-sum of the cell gradients $\underline{G}_{c,i}$ et $\underline{G}_{c,j}$,
- calculation of the reconstructed (if necessary) values $a_{I'}$ and $a_{J'}$ (variables PIP and PJP, respectively) given by :

$$a_{K'} = a_K + \text{IRCFLP} \cdot \underline{KK'} \cdot \frac{1}{2} (\underline{G}_{c,i} + \underline{G}_{c,j}) \quad K = I \text{ et } J \quad (\text{IV.A.10})$$

- calculation of the quantities FLUI and FLUJ,
- calculation of the flux FLUX using (IV.A.7).

The computation of the sum in SMBR is straight-forward, following (IV.A.1) ⁴.

Calculation of the flux with a centered or SOLU scheme (IUPWIN = 0)

The two available second order schemes on orthogonal meshes are the centered scheme and the SOLU scheme.

In both cases, the following operations are performed:

- calculation of the vector \underline{II}' , the array (DIIPFX, DIIPFY, DIIPFZ) and the vector \underline{JJ}' , the array (DJJPFZ, DJJPFY, DJJPFZ)
- calculation of the face gradient (DPXF, DPYF, DPZF) half-sum of the cell gradients $\underline{G}_{c,i}$ and $\underline{G}_{c,j}$,
- calculation of the possibly reconstructed (if IRCFLP = 1) values $a_{I'}$ and $a_{J'}$ (variables PIP and PJP, respectively) given by :

$$a_{K'} = a_K + \text{IRCFLP} \cdot \underline{KK'} \cdot \frac{1}{2} (\underline{G}_{c,i} + \underline{G}_{c,j}) \quad K = I \text{ and } J \quad (\text{IV.A.11})$$

- calculation of FLUI and FLUJ.

■ without slope test (ISSTPP = 1)

- ★ with a centered scheme (ISCHCP = 1)

The values of the variables PIF and PJF are equal, and calculated using the weighting coefficient α_{ij} as follows:

$$\begin{aligned} P_{IF} &= \alpha_{ij} \cdot P_{I'} + (1 - \alpha_{ij}) \cdot P_{J'} \\ P_{JF} &= P_{IF} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.12})$$

- ★ with a SOLU scheme (ISCHCP = 0)

After calculating the vectors \underline{IF} and \underline{JF} , the values of the variables PIF and PJF are computed as follows:

$$\begin{aligned} P_{IF} &= P_I + \underline{IF} \cdot \underline{G}_{c,i} \\ P_{JF} &= P_J + \underline{JF} \cdot \underline{G}_{c,j} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.13})$$

PIF and PJF are systematically reconstructed in order to avoid using pure upwind, *i.e.* this formulae is applied even when the user chooses not to reconstruct (IRCFLP = 0).

■ with slope test (ISSTPP = 0)

The procedure is quite similar to the one described in the previous paragraph. There is, in addition to the previous procedure, a slope test that makes under certain conditions the scheme switch locally (but systematically) from the chosen centered or SOLU scheme to a pure upwind scheme.

- ↪ calculation of the slope test

Equation (IV.A.6) writes on an internal cell Ω_i , with $s_{ij}^n = \text{sgn}[(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}]$:

⁴taking into account the negative sign of \mathcal{B}_β .

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{G}_{c,i}^{upwind} &= \sum_{j \in Neigh(i)} a_{ij}^{upwind} \underline{S}_{ij} \\
&= \sum_{j \in Neigh(i)} \left[\frac{1}{2} (s_{ij}^n + 1) \quad a_{IF} + \frac{1}{2} (s_{ij}^n - 1) a_{JF} \right] \underline{S}_{ij} \\
&= \sum_{j \in Neigh(i)} \left[\frac{1}{2} (s_{ij}^n + 1) \quad (a_I + \underline{IF} \cdot (\nabla a)_I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (s_{ij}^n - 1) (a_I + \underline{JF} \cdot (\nabla a)_J) \right] \underline{S}_{ij}
\end{aligned}$$

On a cell Ω_i with neighbours $(\Omega_j)_{j \in Neigh(i)}$, the classic slope test consists in locating where a variable a is non-monotonic by studying the sign of the scalar product of the cell gradients of $\underline{G}_{c,i}$ and $\underline{G}_{c,j}$. If this product is negative, we switch to an upwind scheme, if it is positive, we use a centered or SOLU scheme.

Another technique which also ensures the monotonicity of the solution is to apply this criterion to the upwind gradients $\underline{G}_{c,k}^{amount}$ or to their normal projection on face $(\underline{G}_{c,k}^{amount} \cdot \underline{S}_{kl})$.

We then study the sign of the product $\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount}$ or of the product $(\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij}) \cdot (\underline{G}_{c,j}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij})$. The slope test implemented is based on the first quantity, $\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount}$ (the second one was abandoned because it was found to be less general). The choice of a slope test based on $\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount}$ comes from the following line of argument in one-dimension ⁵:

Let's take p a second order in x polynomial function. Its value at points $I-1, I, I+1$ of coordinates x_{I-1}, x_I and x_{I+1} are p_{I-1}, p_I , and p_{I+1} , respectively. To simplify, we suppose that I is the origin O ($x_I = 0$), and that the grid spacing h is constant, which results in $x_{I+1} = -x_{I-1} = h$. Additionally, we suppose that the velocity is orientated from point I towards point $I+1$, i.e. $s_{ij}^n = 1$. Therefore we consider the points $I-1, I$ and $I+1$ for the face ij which is located between I and $I+1$.

The sign of the product $p'(x_{I-1}) \cdot p'(x_{I+1})$ indicates the monotonicity of function p . If this product is positive, the function is monotonic and we use a centered or a SOLU scheme, otherwise, we switch to an upwind scheme. By identifying the polynomial coefficients using the equations $p(x_{I-1}) = p_{I-1}$, $p(x_I) = p_I$, $p(x_{I+1}) = p_{I+1}$, we obtain :

$$\begin{aligned}
p'(x_{I-1}) &= + \frac{p_{I+1} - p_{I-1}}{2h} + \left[\frac{p_I - p_{I-1}}{h} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right] \\
p'(x_{I+1}) &= + \frac{p_{I+1} - p_{I-1}}{2h} - \left[\frac{p_I - p_{I-1}}{h} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right]
\end{aligned} \tag{IV.A.14}$$

or after simplification :

$$\begin{aligned}
p'(x_{I-1}) &= G_{c,i} + \left(G_{c,i}^{amount} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right) \\
p'(x_{I+1}) &= G_{c,i} - \left(G_{c,i}^{amount} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right)
\end{aligned} \tag{IV.A.15}$$

We know that :

- $\frac{p_{I+1} - p_I}{h}$ represents the upwind derivative at point $I+1$, directly accessible by the values of p in the neighbouring cells of face ij ,
- $\frac{p_{I+1} - p_{I-1}}{2h}$ represents the centered derivative (in finite volume) at point I , namely $G_{c,i}$,
- $\frac{p_I - p_{I-1}}{h}$ represents the value of the upwind derivative (in finite volume) at point I , namely $G_{c,i}^{amount}$.

The slope test relative to $p'(x_{I-1}) \cdot p'(x_{I+1})$ reduces to studying the sign of \mathcal{TP}_{1d} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TP}_{1d} &= \left(G_{c,i} + \left[G_{c,i}^{amount} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right] \right) \cdot \left(G_{c,i} - \left[G_{c,i}^{amount} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right] \right) \\
&= |G_{c,i}|^2 - \left(G_{c,i}^{amount} - \frac{p_{I+1} - p_I}{h} \right)^2
\end{aligned} \tag{IV.A.16}$$

⁵Information on the second derivative would permit to study more finely the behaviour and the strong variations of a .

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 131/400
---------	--	---

Using a similar line of argument, a possible extension to higher dimensions consists in replacing the values $G_{c,k}$ and $G_{c,k}^{amount}$ by $(\underline{G}_{c,k} \cdot \underline{S}_{kl})$ and $(\underline{G}_{c,k}^{amount} \cdot \underline{S}_{kl})$ respectively. After simplifications, this leads us to the formulae \mathcal{TP}_{3d}^+ :

$$\mathcal{TP}_{3d}^+ = (\underline{G}_{c,i} \cdot \underline{S}_{ij})^2 - (\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} - \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij})^2 \quad (\text{IV.A.17})$$

for $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} > 0$.

Similarly, we can deduce a \mathcal{TP}_{3d}^- associated with $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0$, defined by :

$$\mathcal{TP}_{3d}^- = (\underline{G}_{c,j} \cdot \underline{S}_{ij})^2 - (\underline{G}_{c,j}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} - \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij})^2 \quad (\text{IV.A.18})$$

We introduce the variables TESTI, TESTJ and TESTIJ computed as:

$$\begin{aligned} \text{TESTI} &= \underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} \\ \text{TESTJ} &= \underline{G}_{c,j}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} \\ \text{TESTIJ} &= \underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.19})$$

The quantity TESQCK corresponding to \mathcal{TP}_{3d} , is computed dynamically, depending on the sign of the mass flux s_{ij}^n .

\rightsquigarrow consequently :

$$\begin{aligned} &\diamond \text{ if } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} > 0 \text{ and} \\ &\quad \underbrace{(\underline{G}_{c,i} \cdot \underline{S}_{ij})^2 - (\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} - \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij})^2}_{\text{TESQCK}} < 0 \text{ or } (\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount}) < 0, \\ &\text{or :} \\ &\diamond \text{ if } (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \text{ and} \\ &\quad \underbrace{(\underline{G}_{c,j} \cdot \underline{S}_{ij})^2 - (\underline{G}_{c,j}^{amount} \cdot \underline{S}_{ij} - \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij})^2}_{\text{TESQCK}} < 0 \text{ or } (\underline{G}_{c,i}^{amount} \cdot \underline{G}_{c,j}^{amount}) < 0, \end{aligned}$$

then we switch to a pure upwind scheme:

$$\begin{aligned} \text{PIF} &= \text{PVAR}(\text{II}) \\ \text{PJF} &= \text{PVAR}(\text{JJ}) \end{aligned} \quad (\text{IV.A.20})$$

and INFAC is incremented.

\diamond otherwise :

the centered or the SOLU scheme values are used as before :

★ with a centered scheme (ISCHCP = 1)

The values of the variables PIF and PJF are equal and calculated using the weighting coefficient α_{ij} :

$$\begin{aligned} P_{IF} &= \alpha_{ij} \cdot P_{I'} + (1 - \alpha_{ij}) \cdot P_{J'} \\ P_{JF} &= P_{IF} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.21})$$

★ with a SOLU scheme (ISCHCP = 0)

After calculating the vectors \underline{IF} and \underline{JF} , the values of the variables PIF and PJF are computed as follows:

$$\begin{aligned} P_{IF} &= P_I + \underline{IF} \cdot \underline{G}_{c,i} \\ P_{JF} &= P_J + \underline{JF} \cdot \underline{G}_{c,j} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.22})$$

PIF and PJF are systematically reconstructed in order to avoid using pure upwind, *i.e.* this formulae is applied even when the user chooses not to reconstruct (IRCFLP = 0).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 132/400
---------	--	--

Whether the slope test is activated or not, when the centered or the SOLU schemes are activated, a blending coefficient (BLENC_P) between 0 and 1, provided by the user, enables to blend, if desired, the chosen scheme and the pure upwind scheme following the formulae:

$$\begin{aligned} P_{IF} &= \text{BLENC}_P P_{IF}^{(\text{centre ou SOLU})} + (1 - \text{BLENC}_P) P_{II} \\ P_{JF} &= \text{BLENC}_P P_{JF}^{(\text{centre ou SOLU})} + (1 - \text{BLENC}_P) P_{JJ} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.23})$$

- calculation of FLUI and FLUJ,
- calculation of the flux FLUX using equation (IV.A.7).

The computation of the sum in SM_{BR} is straight-forward, following (IV.A.1)⁶

REMARK

For more information on the convection schemes and the slope test in *Code_Saturne* (version 1.1), the reader is referred to EDF internal report EDF HI-83/04/020 (F. Archambeau, 2004).

⁶taking into account the negative sign of \mathcal{B}_β .

Points to treat

- **Convection scheme**

↪ Upwind scheme

As all first-order schemes, it is robust, but introduces severe numerical diffusion.

↪ Centered or SOLU scheme

This type of schemes can generate numerical oscillations, that can cause the calculation to blow up. It can also lead to physical scalars taking unphysical values.

Considering these limitations, other schemes are currently being tested and implemented in order to improve the quality of the schemes available to the users.

- **Diffusion scheme**

The formulae :

$$D_{ij}(\beta, a) = \beta_{ij} \frac{a_{J'} - a_{I'}}{I'J'} S_{ij} \quad (\text{IV.A.24})$$

is second-order accurate only for $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$. A possible correction may be to write :

$$\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{S}_{ij} = (\underline{\nabla} a)_{ij} = \frac{a_{J'} - a_{I'}}{I'J'} \cdot \underline{S}_{ij} + \left(\frac{1}{2} - \alpha_{ij}\right) [(\underline{\nabla} a)_{I'} - (\underline{\nabla} a)_{J'}] \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{IV.A.25})$$

with a gradient limiter and a computation of β_{ij} which does not alter the order of accuracy.

- **Implementation**

In order to improve the CPU time, an effort on loops can be done. More particularly, there is a test IF inside of a loop on variable IFAC that needs to be checked.

- **Calculation of the gradient used during the reconstruction of the diffusive fluxes**

Why do we use $\frac{1}{2} (\underline{G}_{c,i} + \underline{G}_{c,j})$ instead of $\underline{G}_{c,k}$, for $k = i$ or for $k = j$ in the reconstructed values $a_{I'}$ or $a_{J'}$ of (IV.A.10) and (IV.A.11)?

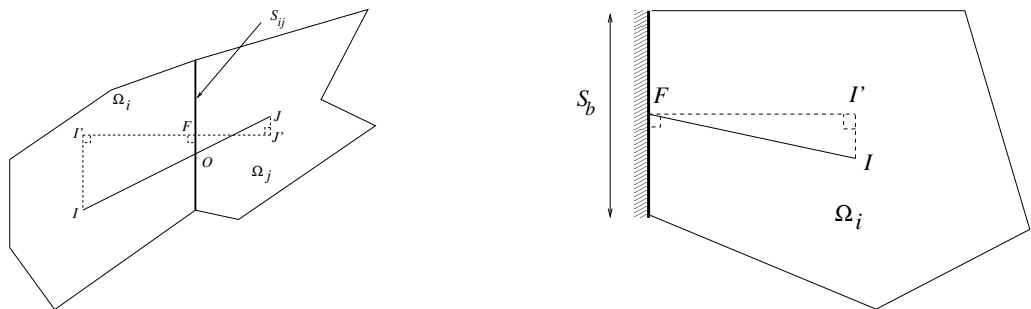


Figure IV.A.1: Definition of the geometric entities for internal (left) and a boundary faces (right).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 135/ 400
---------	--	---

B- clptur routine

Function

This subroutine is dedicated to the calculation of the wall boundary conditions. The notations introduced in `CONDLI` for the general boundary conditions will be used.

The wall boundary conditions refer to all the boundary conditions for the velocity, the turbulent variables (k , ε , R_{ij}), the temperature when it has a prescribed value at the wall (or the enthalpy and more generally the *VarScalaire*¹ to treat at the wall by using a similarity law for the associated boundary layer). For the *VarScalaire* in particular, when the boundary conditions at the wall are of Neumann type (homogeneous or not), they are treated in `condli` and don't present them here. In particular, the boundary conditions of the *VarScalaire* are not treated here because their treatment at the wall is of homogeneous Neumann type.

We present the calculation of the pair of coefficients A_b and B_b which are used during the computation of certain discretized terms of the equations to solve, and which allow in particular to determine a value associated with the boundary faces $f_{b,int}$ (at a point located at the "centre" of the boundary face, the barycentre of its vertices) using the formulae $f_{b,int} = A_b + B_b f_{I'}$ ($f_{I'}$ is the value of the variable at point I' , the projection of the centre of the boundary cell onto the line normal to the boundary face and passing through its centre : see figure IV.B.1).

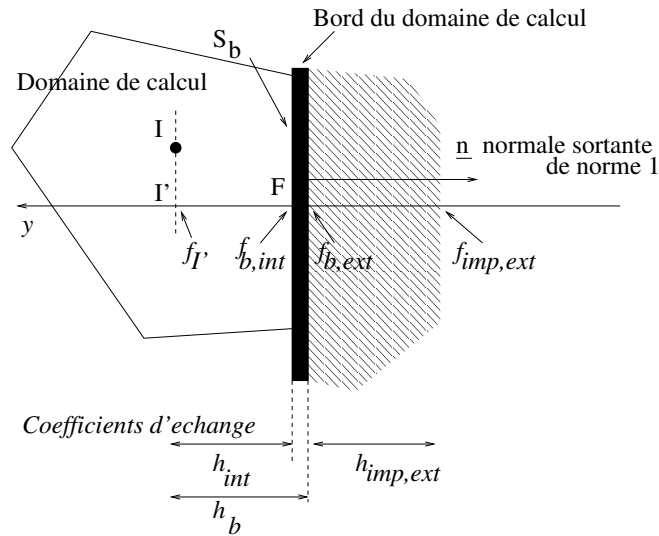


Figure IV.B.1: Boundary cell.

Discretisation

• Notations

¹As in `condli` the *VarScalaire* are any solution of a convection-diffusion equation apart from the velocity, the pressure and the turbulent variables k , ε and R_{ij} . More specifically, the name *VarScalaire* can refer to the temperature, the enthalpy or a passive scalar.

The velocity of the wall is noted \underline{v}_p . We assume it is projected onto the plane tangent to the wall (if it is not, then the code projects it).

The velocity of the fluid is noted \underline{u} . Index I , I' or F denotes the point at which the velocity is estimated. The component tangent to the wall writes u_τ . The fluid velocity in the coordinate system attached to the wall ("relative" velocity) writes $\underline{u}^r = \underline{u} - \underline{v}_p$.

The orthonormal coordinate system attached to the wall writes $\hat{\mathcal{R}} = (\underline{\tau}, \underline{\tilde{n}}, \underline{b})$.

- $\underline{\tilde{n}} = -\underline{n}$ is the unit vector orthogonal to the wall and directed towards the interior of the computational domain.
- $\underline{\tau} = \frac{1}{\|\underline{u}_{I'}^r - (\underline{u}_{I'}^r \cdot \underline{\tilde{n}})\underline{\tilde{n}}\|} [\underline{u}_{I'}^r - (\underline{u}_{I'}^r \cdot \underline{\tilde{n}})\underline{\tilde{n}}]$ is the unit vector parallel to the projection of the relative velocity at I' , $\underline{u}_{I'}^r$, in the plane tangent to the wall (*i.e.* orthogonal to $\underline{\tilde{n}}$) : see figure IV.B.1.
- \underline{b} is the unit vector which completes the positively oriented coordinate system.

The dimensionless limit distance which separates the viscous sublayer from the logarithmic region writes y_{lim}^+ . Its value is $1/\kappa$ (with $\kappa = 0,42$) in general (to ensure the continuity of the velocity gradient) and 10.88 in LES (to ensure the continuity of the velocity).

In the case of the **two velocity scale model**,

- u_k is the friction velocity at the wall obtained from the turbulent kinetic energy. We write u^* the friction velocity at the wall calculated from the equation $\frac{u_{\tau,I'}^r}{u^*} = f(y_k^+)$.
- y_k^+ represents a dimensionless wall distance, $y_k^+ = \frac{u_k I' F}{\nu}$ (ν is the molecular kinematic viscosity taken at the centre I of the boundary cell). The function f gives the ideal shape of the velocity profile. It is piecewisely approximated by the logarithmic law $f(z) = f_1(z) = \frac{1}{\kappa} \ln(z) + 5,2$ for $z > y_{lim}^+$ and by the linear law $f(z) = f_2(z) = z$ otherwise.
- The two velocity scale u_k and u^* are simple to compute but their computation requires the knowledge of the turbulent kinetic energy k_I at the centre of cell adjoint to the boundary face (with the $R_{ij} - \varepsilon$ model, we use half the trace of the Reynolds stress tensor).
- The two velocity scale model is the default model in *Code_Saturne*. It often permits, and in particular in cases with heat transfer, to reduce the effects of certain flaws associated to the $k - \varepsilon$ model.

Later on, we will use u^* and u_k for the boundary conditions of the velocity and scalars (in particular the temperature).

Two velocity scale model

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = C_\mu^{\frac{1}{4}} k_I^{\frac{1}{2}} \\ u^* \text{ is solution of } \left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_{\tau,I'}^r}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y_k^+) + 5,2 & \text{for } y_k^+ > y_{lim}^+ \\ \frac{u_{\tau,I'}^r}{u^*} = y_k^+ & \text{for } y_k^+ \leq y_{lim}^+ \end{array} \right. \\ \text{with } C_\mu = 0,09 \quad y_k^+ = \frac{u_k I' F}{\nu} \text{ and } \kappa = 0,42 \end{array} \right. \quad (\text{IV.B.1})$$

In the case of the **one velocity scale model**,

we write u^* the only friction velocity at the wall solution of the equation $\frac{u_{\tau,I'}^r}{u^*} = f(y^+)$. y^+ represents a dimensionless wall distance $y^+ = \frac{u^* I' F}{\nu}$ (ν is the molecular kinematic viscosity taken at the centre I

of the boundary cell). The function f gives the ideal shape of the velocity profile, as in the case of the two velocity scale model. One can note that this friction velocity, calculated using a more complicated approach (Newton method), can however be obtained without making any reference to the turbulent variables (k , ε , R_{ij}). For convenience in the case of the one velocity scale model, we write $u_k = u^*$.

Later on, we will use u^* and u_k for the boundary conditions of the velocity and scalars (in particular the temperature).

Modèle à une échelle de vitesse

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = u^* \\ u^* \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_{\tau, I'}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5,2 & \text{pour } y^+ > y_{lim}^+ \\ \frac{u_{\tau, I'}}{u^*} = y^+ & \text{pour } y^+ \leq y_{lim}^+ \end{array} \right. \\ \text{avec } y^+ = \frac{u^* I' F}{\nu} \text{ et } \kappa = 0,42 \end{array} \right. \quad (\text{IV.B.2})$$

Remark : Hereafter, we provide three exemples based on the two velocity scale model.

- In this way, one can implement a specific wall function :

$$\frac{u_{\tau, I'}}{u^*} = g(y^+)$$

by simply imposing $u^* = u_{\tau, I'} / g(y^+)$.

- It is also possible to use a rough-wall wall function such as :

$$\frac{u_{\tau, I'}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\xi}\right) + 8,5$$

where ξ is the height of the roughness elements at the wall : one just has to impose $u^* = u_{\tau, I'} / \left[\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\xi}\right) + 8,5 \right]$, y being deduced from y^+ , available as an argument, by the equation $y = y^+ \frac{\nu}{u_k}$.

- Even a more general correlation could be used of Colebrook type :

$$u^* = u_{deb} / \left[-4\sqrt{2} \log_{10} \left(\frac{2,51}{2\sqrt{2}D_H^+} + \frac{\xi}{3,7D_H} \right) \right]$$

where D_H^+ is the hydraulic diameter made dimensionless using u_k , ν , u_{deb} the mean streamwise velocity and $\frac{\xi}{D_H}$ the relative roughness.

• Boundary conditions for the velocity in $k - \varepsilon$

We first consider the boundary conditions used in the case of calculation using the $k - \varepsilon$ model. Indeed these cases are the most complex and general.

The boundary conditions are necessary to prescribe at the boundary the correct tangential stress $\sigma_\tau = \rho_I u^* u_k$ in the momentum equation² (ρ_I is the density at the centre of cell I). The term which requires boundary conditions is the one containing the velocity derivative in the normal direction to the wall³ : $(\mu_I + \mu_{t, I}) \underline{\text{grad}} \underline{u} \underline{n}$. It appears on the right-hand side of the usual momentum equation (see `bilsc2` and `predvv`).

²Proposition de modification des conditions aux limites de paroi turbulente pour le Solveur Commun dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$ standard, rapport EDF HL-81/00/019/A, 2000, M. Boucker, J.-D. Mattei.

³The transpose gradient term is treated in `visecv` and thus will not be considered here.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 139/400
---------	--	---

In the case where the $k - \varepsilon$ model tends to surestimate the production of turbulent kinetic energy, the length scale of the model, $L_{k-\varepsilon}$, can become significantly larger than the maximum theoretical length scale of the turbulent boundary layer eddies L_{theo} . We write :

$$\begin{cases} L_{k-\varepsilon} = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \\ L_{\text{theo}} = \kappa I' F \end{cases} \quad (\text{IV.B.3})$$

In the case where $L_{k-\varepsilon} > L_{\text{theo}}$, we thus have $\mu_{t,I} > \mu_t^{lm}$ with $\mu_{t,I}$ the turbulent viscosity of the $k - \varepsilon$ model at point I and $\mu_t^{lm} = \rho_I L_{\text{theo}} u_k$ the turbulent viscosity of the mixing length model. Additionally, the tangential stress can write by making the turbulent viscosity appear :

$$\sigma_\tau = \rho_I u^* u_k = \frac{u^*}{\kappa I' F} \underbrace{\rho_I \kappa I' F u_k}_{\mu_t^{lm}} \quad (\text{IV.B.4})$$

The viscosity scale introduced in the stress thus contradicts the one deduced from the neighbouring turbulence calculated by the model. Consequently we prefer to write the stress, by using the velocity scale of the $k - \varepsilon$ model when it is lower than the limit L_{theo} :

$$\sigma_\tau = \frac{u^*}{\kappa I' F} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \quad (\text{IV.B.5})$$

One can then use this value to calculate the diffusive flux which depends upon it in the Navier-Stokes equations :

$$(\mu_I + \mu_{t,I}) \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \underline{n} = -\sigma_\tau \underline{\tau}. \quad (\text{IV.B.6})$$

But the velocity gradient (face gradient) is computed in the code as :

$$(\mu_I + \mu_{t,I}) \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \underline{n} = \frac{(\mu_I + \mu_{t,I})}{I' F} (\underline{u}_F - \underline{u}_{I'}) \quad (\text{IV.B.7})$$

Using (IV.B.6) and (IV.B.7) we obtain the value of \underline{u}_F to be prescribed, referred to as $\underline{u}_{F,flux}$ (conservation of the momentum flux) :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{F,flux} &= \underline{u}_{I'} - \frac{\overline{I' F}}{\mu_I + \mu_{t,I}} \sigma_\tau \underline{\tau} \\ &= \underline{u}_{I'} - \frac{u^*}{\kappa (\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \underline{\tau} \end{aligned} \quad (\text{IV.B.8})$$

In reality, an extra approximation is made. It consists in imposing a zero normal velocity at the wall and in using equation (IV.B.8) projected on the plane parallel to the wall :

$$\underline{u}_{F,flux} = \left[u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa (\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \right] \underline{\tau} \quad (\text{IV.B.9})$$

Moreover, if the value obtained for y^+ is lower than y_{lim}^+ a no-slip condition is applied. Finally, one can also make the wall velocity appear in the final expression :

$$\begin{cases} \underline{u}_{F,flux} = \underline{v}_p & \text{if } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{u}_{F,flux} = \underline{v}_p + \left[u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa (\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \right] \underline{\tau} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{IV.B.10})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 140/400
---------	--	---

A first pair of coefficients A_{flux} and B_{flux} can then be deduced (for each component of the velocity separately) and it is used only to compute the tangential stress dependent term (see `bilsc2`) :

Coefficients associated with the "flux" boundary conditions of the velocity ($k - \varepsilon$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_{flux} = \underline{v}_p \\ \underline{A}_{flux} = \underline{v}_p + \left[u_{\tau,I'}^* - \frac{u^*}{\kappa(\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \right] \underline{\tau} \end{array} \right. \text{ if } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{B}_{flux} = 0 \end{array} \right. \text{ otherwise} \quad (\text{IV.B.11})$$

We saw above how to impose a boundary condition to compute directly the stress term. Further analysis is necessary to calculate correctly the velocity gradients. We want to find a boundary face value which permits to obtain, with the chosen expression for the gradient, the value the turbulent production as close as possible to its theoretical value (determined by using the logarithmic law), in order to evaluate the normal derivative the tangential velocity. Thus, we define (at point I) :

$$P_{théo} = \rho_I u^* u_k \left\| \frac{\partial u_\tau}{\partial \underline{n}} \right\|_I = \rho_I \frac{u_k (u^*)^2}{\kappa I' F} \quad (\text{IV.B.12})$$

Moreover, the dominant term of the production computed in cell I is, in classical situations (y is the coordinate on the axis whose direction vector is $\underline{\tilde{n}}$),

$$P_{calc} = \mu_{t,I} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial y} \right)_I^2 \quad (\text{IV.B.13})$$

The normal gradient of the tangential velocity (cell gradient) is calculated in the code using finite volume, and its expression on regular orthogonal meshes is (see the notations on figure [IV.B.2](#)) :

$$P_{calc} = \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,G} - u_{\tau,F}}{2d} \right)^2 = \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,I} + u_{\tau,J} - 2u_{\tau,F}}{4d} \right)^2 \quad (\text{IV.B.14})$$

We then assume that $u_{\tau,J}$ can be obtained from $u_{\tau,I}$ and from the normal gradient of u_τ calculated in G from the logarithmic law :

$$u_{\tau,J} = u_{\tau,I} + IJ \cdot (\partial_y u_\tau)_G + \mathcal{O}(IJ^2) \approx u_{\tau,I} + IJ \cdot \left[\partial_y \left(\frac{u^*}{\kappa} \ln(y^+) + 5, 2 \right) \right]_G = u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa 2d} \quad (\text{IV.B.15})$$

and thus we obtain :

$$\begin{aligned} P_{calc} &= \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,I} + u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa 2d} - 2u_{\tau,F}}{4d} \right)^2 \\ &= \mu_{t,I} \left(\frac{2u_{\tau,I} + 2 \frac{u^*}{2\kappa} - 2u_{\tau,F}}{4d} \right)^2 = \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,I} + \frac{u^*}{2\kappa} - u_{\tau,F}}{2d} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.B.16})$$

We then use [\(IV.B.12\)](#) and [\(IV.B.16\)](#) to impose that the calculated production is equal to the theoretical production. The preceding formulae are extended with no precaution to non-orthogonal meshes (the velocity at I is then simply computed at I'). The following expression for $u_{\tau,F}$ is then obtained :

$$u_{\tau,F,grad} = u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa} \left(2 \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k I' F}{\mu_{t,I}}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV.B.17})$$

Additionally, we force the gradient to remain as stiff as the one given by the normal derivative of the theoretical velocity profile (logarithmic) at I' :

$\partial_y u_\tau = \partial_y \left(\frac{u^*}{\kappa} \ln(y^+) + 5, 2 \right) = \frac{u^*}{\kappa I' F}$, thus :

$$u_{\tau,F,grad} = u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa} \max \left(1, 2 \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k I' F}{\mu_{t,I}}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV.B.18})$$

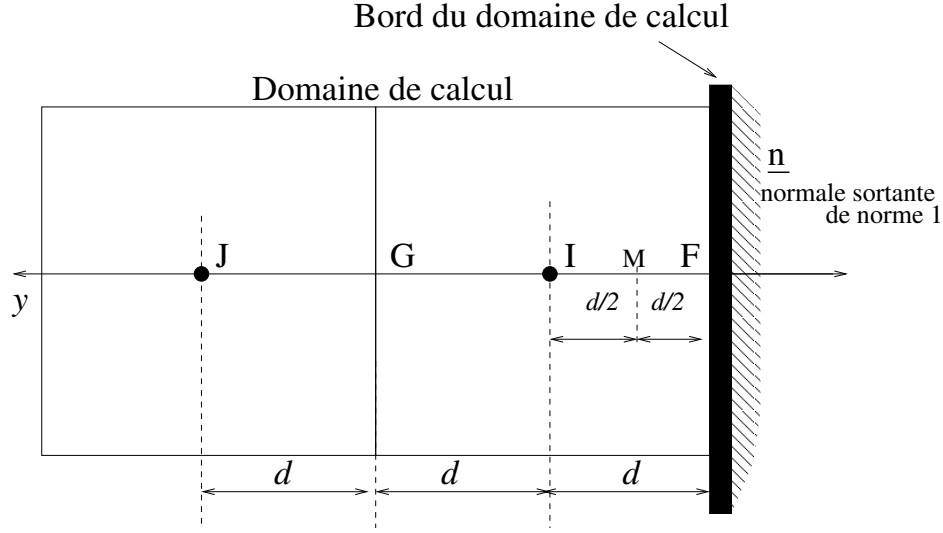


Figure IV.B.2: Cellule de bord - Maillage orthogonal.

Finally, we clip the velocity at the wall with a minimum value calculated assuming that we are in the logarithmic layer :

$$u_{\tau,F,grad} = \max \left(u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln(y_{lim}^+) + 5, 2 \right), u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa} \left[\max \left(1, 2 \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k I' F}{\mu_{t,I}}} - \frac{1}{2} \right) \right] \right) \quad (\text{IV.B.19})$$

The normal derivative at the wall is prescribed to zero. If the y^+ value at the wall is lower than y_{lim}^+ , a no-slip condition is prescribed. Finally, one can also make explicit the velocity of the wall in the final expression :

$$\begin{aligned} &\text{"Gradient" boundary conditions of the velocity}(k - \varepsilon) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{F,grad} = \underline{v}_p \quad \text{if } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{u}_{F,grad} = \underline{v}_p + \\ \left\{ \max \left(u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln(y_{lim}^+) + 5, 2 \right), u_{\tau,I'}^r - \frac{u^*}{\kappa} \left[\max \left(1, 2 \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k I' F}{\mu_{t,I}}} - \frac{1}{2} \right) \right] \right) \right\} \underline{\tau} \text{ otherwise} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.B.20})$$

A second pair of coefficients A_{grad} and B_{grad} can then be deduced (for each velocity component separately). It is used when the velocity gradient is necessary (except for the terms depending on the tangential shear, those being treated in `bilsc2` using A_{flux} and B_{flux}) :

$$\begin{aligned} &\text{Coefficients associated to the "gradient" boundary conditions of} \\ &\quad \text{the velocity}(k - \varepsilon) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_{grad} = \underline{v}_p \quad \text{if } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{A}_{grad} = \underline{v}_p + \\ \left\{ \max \left(u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln(y_{lim}^+) + 5, 2 \right), u_{\tau,I'}^r - \frac{u^*}{\kappa} \left[\max \left(1, 2 \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k I' F}{\mu_{t,I}}} - \frac{1}{2} \right) \right] \right) \right\} \underline{\tau} \text{ otherwise} \end{array} \right\} \\ \underline{B}_{grad} = \underline{0} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.B.21})$$

• Boundary conditions of the velocity in $R_{ij} - \varepsilon$

The boundary conditions of the velocity with the $R_{ij} - \varepsilon$ model are more simple, since there are only of one type. Keeping the same notations as above, we want the tangential velocity gradient (calculated

at I , and to be used to evaluate the turbulent production) to be consistent with the logarithmic law giving the ideal tangential velocity profile. The theoretical gradient is :

$$G_{\text{theo}} = \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial y} \right)_{I'} = \frac{u^*}{\kappa I' F} \quad (\text{IV.B.22})$$

The normal gradient of the tangential velocity (cell gradient) is calculated in the code using finite volumes, and its expression in the case of regular orthogonal meshes is (see notations in figure IV.B.2) :

$$G_{\text{calc}} = \frac{u_{\tau,G} - u_{\tau,F}}{2d} = \frac{u_{\tau,I} + u_{\tau,J} - 2u_{\tau,F}}{4d} \quad (\text{IV.B.23})$$

We then assume that $u_{\tau,J}$ can be obtained from $u_{\tau,I}$ and from the normal gradient of u_τ calculated in G from the logarithmic law (see equation (IV.B.15)) $u_{\tau,J} = u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa 2d}$ and we thus obtain :

$$G_{\text{calc}} = \frac{u_{\tau,I} + u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa 2d} - 2u_{\tau,F}}{4d} = \frac{2u_{\tau,I} + 2 \frac{u^*}{2\kappa} - 2u_{\tau,F}}{4d} = \frac{u_{\tau,I} + \frac{u^*}{2\kappa} - u_{\tau,F}}{2d} \quad (\text{IV.B.24})$$

We then use the equations (IV.B.22) and (IV.B.24) to derive an expression for $u_{\tau,F}$ (the preceeding formulae are extended with no precaution to the case non-orthogonal meshes, the velocity at I being simply computed at I') :

$$u_{\tau,F} = u_{\tau,I'} - \frac{3u^*}{2\kappa} \quad (\text{IV.B.25})$$

The normal derivative at the wall is prescribed to zero. If the value obtained for y^+ at the wall is lower than y_{lim}^+ , a no-slip condition is prescribed. Finally, one can also make explicit the velocity of the wall in the final expression :

$$\begin{cases} \underline{u}_F = \underline{v}_p & \text{if } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{u}_F = \left[u_{\tau,I'}^r - \frac{3u^*}{2\kappa} \right] \underline{\tau} + \underline{v}_p & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{IV.B.26})$$

Un couple de coefficients A et B s'en déduit (pour chaque composante de vitesse séparément) :

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{v}_p & \text{si } y^+ \leq y_{lim}^+ \\ \underline{A} = \left[u_{\tau,I'}^r - \frac{3u^*}{2\kappa} \right] \underline{\tau} + \underline{v}_p & \text{sinon} \\ \underline{B} = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{IV.B.27})$$

A pair of coefficients A_{grad} and B_{grad} can be deduced from the above equation (for each velocity component separately).

• Boundary conditions of the velocity in laminar

When no turbulence model is activated, we implicitly use a one velocity scale model (there is no turbulent variables to compute u_k), and the same conditions ⁴ as in $R_{ij} - \varepsilon$ are used : the model degenerates automatically.

⁴In other words; the boundary conditions are given by (IV.B.26) and (IV.B.27).

• **Boundary conditions for k and ε (standard $k - \varepsilon$ model)**

We impose k with a Dirichlet condition using the friction velocity u_k (see equation (IV.B.1)) :

$$k = \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.B.28})$$

We want to impose the normal derivative of ε from of the following theoretical law (see the notations in figure IV.B.2) :

$$G_{\text{theo},\varepsilon} = \frac{\partial (u_k^3 / (\kappa y))}{\partial y} \quad (\text{IV.B.29})$$

We use point M to impose a boundary condition with a higher order of accuracy in space. Indeed, using the simple expression $\varepsilon_F = \varepsilon_I + d\partial_y\varepsilon_I + O(d^2)$ leads to first order accuracy. A second order accuracy can be reached using the following Taylor series expansion:

$$\begin{cases} \varepsilon_M &= \varepsilon_I - \frac{d}{2}\partial_y\varepsilon_I + \frac{d^2}{8}\partial_y^2\varepsilon_I + O(d^3) \\ \varepsilon_M &= \varepsilon_F + \frac{d}{2}\partial_y\varepsilon_F + \frac{d^2}{8}\partial_y^2\varepsilon_F + O(d^3) \end{cases} \quad (\text{IV.B.30})$$

By substracting these twxo expression, we obtain

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I - \frac{d}{2}(\partial_y\varepsilon_I + \partial_y\varepsilon_F) + O(d^3) \quad (\text{IV.B.31})$$

Additionally, we have

$$\begin{cases} \partial_y\varepsilon_I &= \partial_y\varepsilon_M + d\partial_y^2\varepsilon_M + O(d^2) \\ \partial_y\varepsilon_F &= \partial_y\varepsilon_M - d\partial_y^2\varepsilon_M + O(d^2) \end{cases} \quad (\text{IV.B.32})$$

The sum of these last two expressions gives $\partial_y\varepsilon_I + \partial_y\varepsilon_F = 2\partial_y\varepsilon_M + O(d^2)$ and, using equation (IV.B.31), we finally obtain a second order approximation for ε_F :

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I - d\partial_y\varepsilon_M + O(d^3) \quad (\text{IV.B.33})$$

The theoretical value (see equation IV.B.29) is then used in order to evaluate $\partial_y\varepsilon_M$ and thus the value to prescribe at the boundary is obtained ($d = I'F$) :

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I + d \frac{u_k^3}{\kappa (d/2)^2} \quad (\text{IV.B.34})$$

This expression is extended to non-orthogonal mesh without any precautions (which is bound to deteriorate the spatial accuracy of the method).

Additionally, the velocity u_k is set to zero for $y^+ \leq y_{lim}^+$. Consequently, the value of k and the flux of ε are both zero.

Finally we have :

Boundary conditions for k and ε

$$\begin{cases} k_F &= \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \\ \varepsilon_F &= \varepsilon_{I'} + I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2)^2} \end{cases} \quad (\text{IV.B.35})$$

with $u_k = 0$ if $y^+ \leq y_{lim}^+$

and the associated pair of coefficients

Coefficients associated to the boundary conditions of k et ε

$$\begin{cases} A_k = \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} & \text{and } B_k = 0 \\ A_\varepsilon = I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2)^2} & \text{and } B_\varepsilon = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.B.36})$$

with $u_k = 0$ if $y^+ \leq y_{lim}^+$

• **Boundary conditions for R_{ij} and ε (standard $R_{ij} - \varepsilon$ model)**

The boundary conditions for the Reynolds stresses in the coordinate system attached to the wall write (\hat{R} refers to the local coordinate system) :

$$\partial_{\tilde{n}} \hat{R}_{\tau\tau} = \partial_{\tilde{n}} \hat{R}_{\tilde{n}\tilde{n}} = \partial_{\tilde{n}} \hat{R}_{bb} = 0 \quad \text{et } \hat{R}_{\tau\tilde{n}} = -u^* u_k \quad \text{et } \hat{R}_{\tau b} = \hat{R}_{\tilde{n}b} = 0 \quad (\text{IV.B.37})$$

Additionally, if the value obtained for y^+ is lower than y_{lim}^+ , all Reynolds stresses are set to zero (we assume that the turbulent stresses are negligible compared to the viscous stresses).

Although it is done systematically in the code, expressing the above boundary conditions in the computation coordinate system is relatively complex (rotation of a tensor): the reader is referred to the documentation of `clsyvt` where more details are provided. In what follows, the boundary conditions will only be presented in the local coordinate system.

Thus we want to impose the boundary values :

Boundary conditions of R_{ij}

$$\begin{cases} \text{if } y^+ \leq y_{lim}^+ & \hat{R}_{\alpha\alpha,F} = \hat{R}_{\alpha\beta,F} = 0 \\ \text{otherwise} & \begin{cases} \hat{R}_{\alpha\alpha,F} = \hat{R}_{\alpha\alpha,I'} \text{ with } \alpha \in \{\tau, \tilde{n}, b\} \text{ (without summation)} \\ \hat{R}_{\tau\tilde{n}} = -u^* u_k \text{ and } \hat{R}_{\tau b} = \hat{R}_{\tilde{n}b} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{IV.B.38})$$

For the dissipation, the boundary condition applied is identical to the one applied with the $k - \varepsilon$ model :

Boundary conditions of ε ($R_{ij} - \varepsilon$)

$$\begin{cases} \varepsilon_F = \varepsilon_{I'} + I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2)^2} \\ \text{with } u_k = 0 \text{ if } y^+ \leq y_{lim}^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.39})$$

These boundary conditions can be imposed explicitly (by default, ICLPTR=0) or (semi-)implicitly (ICLPTR=1). The standard option (explicit) leads to the following values⁵ of the coefficients A and B :

⁵It can be noticed that the value of ε is not reconstructed at I' . We thus wish to improve the "stability" since ε has a very steep gradient at the wall ($\varepsilon \approx \frac{1}{y}$), and thus only weak reconstruction errors at I' could lead to important deterioration of the results. However, it would be necessary to check if stability is altered with the gradient reconstruction of `gradrc`.

Coefficients associated to the explicit boundary conditions of R_{ij} et ε

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } y^+ \leq y_{lim}^+ : \\ \quad A_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = A_{\hat{R}_{\alpha\beta}} = 0 \quad \text{and } B_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = B_{\hat{R}_{\alpha\beta}} = 0 \\ \text{Otherwise :} \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = (R_{\alpha\alpha})_I & \text{and } B_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = 0 \\ A_{\hat{R}_{\tau\tilde{n}}} = -u^* u_k & \text{and } B_{\hat{R}_{\tau\tilde{n}}} = 0 \\ A_{\hat{R}_{\tau b}} = A_{\hat{R}_{\tilde{n}b}} = 0 & \text{and } B_{\hat{R}_{\tau b}} = B_{\hat{R}_{\tilde{n}b}} = 0 \end{array} \right. \quad \text{with } \alpha \in \{\tau, \tilde{n}, b\} \text{ (without summation)} \\ \text{And for all cases :} \\ \quad A_\varepsilon = \varepsilon_I + I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2)^2} \text{ and } B_\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

with $u_k = 0$ if $y^+ \leq y_{lim}^+$

(IV.B.40)

The semi-implicit option leads to the following values for the coefficients A and B . They differ from the preceding ones, only as regards as the diagonal Reynolds stresses and dissipation. In the general case, impliciting of some components of the tensor in the local coordinate system leads to partially impliciting all the components in the global computation coordinate system :

**Coefficients associated to the semi-implicit boundary conditions of
sur les variables R_{ij} et ε**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } y^+ \leq y_{lim}^+ : \\ \quad A_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = A_{\hat{R}_{\alpha\beta}} = 0 \quad \text{and } B_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = B_{\hat{R}_{\alpha\beta}} = 0 \\ \text{Sinon :} \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = 0 & \text{and } B_{\hat{R}_{\alpha\alpha}} = 1 \\ A_{\hat{R}_{\tau\tilde{n}}} = -u^* u_k & \text{and } B_{\hat{R}_{\tau\tilde{n}}} = 0 \\ A_{\hat{R}_{\tau b}} = A_{\hat{R}_{\tilde{n}b}} = 0 & \text{and } B_{\hat{R}_{\tau b}} = B_{\hat{R}_{\tilde{n}b}} = 0 \end{array} \right. \quad \text{with } \alpha \in \{\tau, \tilde{n}, b\} \text{ (without summation)} \\ \text{And for all cases :} \\ \quad A_\varepsilon = I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2)^2} \text{ and } B_\varepsilon = 1 \end{array} \right.$$

with $u_k = 0$ if $y^+ \leq y_{lim}^+$

(IV.B.41)

• **Boundary conditions of the *VarScalaire*s**

Only the boundary conditions when a boundary value is imposed (at the wall or away from the wall with a possible external exchange coefficient) are treated here. The reader is referred to the notations in figure IV.B.1 and to the general presentation provided in `condli` (in what follows only the most essential part of the presentation is repeated).

The conservation of the normal flux at the boundary for variable f writes :

$$\underbrace{h_{int}(f_{b,int} - f_{I'})}_{\phi_{int}} = \underbrace{h_b(f_{b,ext} - f_{I'})}_{\phi_b} = \begin{cases} \underbrace{h_{imp,ext}(f_{imp,ext} - f_{b,ext})}_{\phi_{real\ imposed}} & \text{(Dirichlet condition)} \\ \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{real\ imposed}} & \text{(Neumann condition)} \end{cases} \quad (\text{IV.B.42})$$

The above two equation are rearranged in order to obtain the value of the numerical flux $f_{b,int} = f_F$ to impose at the wall boundary face, according to the values of $f_{imp,ext}$ and $h_{imp,ext}$ set by the user, and to the value of h_b set by the similarity laws detailed hereafter. The coefficients A and B can then be readily derived, and are presented here.

Boundary conditions of the *VarScalaire*s

$$f_{b,int} = \underbrace{\frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{imp,ext}}_A + \underbrace{\frac{h_{int} + h_{imp,ext}(h_r - 1)}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{I'}}_B \quad \text{with } h_r = \frac{h_{int}}{h_b} \quad (\text{IV.B.43})$$

Similarity principle : calculation of h_b .

The only remaining unknown in expression (IV.B.43) is the value of h_b , since h_{int} has a numerical value which is coherent with the face gradient computation options detailed in `condli` ($h_{int} = \frac{\alpha}{I'F}$). The value of h_b must relate the flux to the values $f_{I'}$ and $f_{b,ext}$ by taking into account the boundary layer (the profile of f is not always linear) :

$$\phi_b = h_b (f_{b,ext} - f_{I'}) \quad (\text{IV.B.44})$$

The following considerations are presented using the general notations. In particular, the Prandtl-Schmidt number writes $\sigma = \frac{\nu \rho C}{\alpha}$. When the considered scalar f is the temperature, we have (see `condli`)

- $C = C_p$ (specific heat capacity),
- $\alpha = \lambda$ (molecular conductivity),
- $\sigma = \frac{\nu \rho C_p}{\lambda} = Pr$ (Prandtl number),
- $\sigma_t = Pr_t$ (turbulent Prandtl number),
- $\phi = \left(\lambda + \frac{C_p \mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y}$ (flux in Wm^{-2}).

The reference "Convection Heat Transfer", Vedat S. Arpaci and Poul S. Larsen, Prentice-Hall, Inc was used.

The flux at the wall writes for the scalar f (the flux is positive if it enters the fluid domain, as shown by the orientation of the y axis) :

$$\phi = - \left(\alpha + C \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial f}{\partial y} = -\rho C \left(\frac{\alpha}{\rho C} + \frac{\mu_t}{\rho \sigma_t} \right) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{IV.B.45})$$

Similarly for the temperature, with $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ and $a_t = \frac{\mu_t}{\rho \sigma_t}$, we have :

$$\phi = -\rho C_p (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{IV.B.46})$$

In order to make f dimensionless, we introduce f^* defined using the flux at the boundary ϕ_b :

$$f^* = - \frac{\phi_b}{\rho C u_k} \quad (\text{IV.B.47})$$

For the temperature, we thus have :

$$T^* = - \frac{\phi_b}{\rho C_p u_k} \quad (\text{IV.B.48})$$

We then divide both sides of equation (IV.B.45) by ϕ_b . For the left-hand side, we simplify using the conservation of the flux (and thus the fact that $\phi = \phi_b$). For the right-hand side, we replace ϕ_b by its value $-\rho C u_k f^*$. With the notations :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad y^+ = \frac{y u_k}{\nu} \quad f^+ = \frac{f - f_{b,ext}}{f^*} \quad (\text{IV.B.49})$$

we have :

$$1 = \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_t} \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial f^+}{\partial y^+} \quad (\text{IV.B.50})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 148/400
---------	--	---

One can remark at this stage that with the notations used in the preceeding, h_b can be expressed as a function of $f_{I'}^+$:

$$h_b = \frac{\phi_b}{f_{b,ext} - f_{I'}} = \frac{\rho C u_k}{f_{I'}^+} \quad (\text{IV.B.51})$$

In order to compute h_b , we integrate equation (IV.B.50) to obtain $f_{I'}^+$. The only difficulty then consists in prescribing a variation law $\mathcal{K} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_t} \frac{\nu_t}{\nu}$.

In the fully developed turbulent region (far enough from the wall, for $y^+ \geq y_2^+$), a mixing length hypothesis models the variations of ν_t :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| = \kappa y u^* \quad (\text{IV.B.52})$$

Additionally, the molecular diffusion of f (or the conduction when f represents the temperature) is negligible compared to its turbulent diffusion : therefore we neglect $\frac{1}{\sigma}$ compared to $\frac{1}{\sigma_t} \frac{\nu_t}{\nu}$. Finally we have ⁶ :

$$\mathcal{K} = \frac{\kappa y^+}{\sigma_t} \quad (\text{IV.B.53})$$

On the contrary, in the near-wall region (for $y^+ < y_1^+$) the turbulent contribution becomes negligible compared to the molecular contribution and we thus neglect $\frac{1}{\sigma_t} \frac{\nu_t}{\nu}$ compared to $\frac{1}{\sigma}$.

It would be possible to restrict ourselves to these two regions, but Arpaci and Larsen suggest the model can be improved by introducing an intermediate region ($y_1^+ \leq y^+ < y_2^+$) in which the following hypothesis is made :

$$\frac{\nu_t}{\nu} = a_1 (y^+)^3 \quad (\text{IV.B.54})$$

where a_1 is a constant whose value is obtained from experimental correlations :

$$a_1 = \frac{\sigma_t}{1000} \quad (\text{IV.B.55})$$

Thus the following model is used for \mathcal{K} (see a sketch in figure B) :

$$\mathcal{K} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \text{if } y^+ < y_1^+ \\ \frac{1}{\sigma} + \frac{a_1 (y^+)^3}{\sigma_t} & \text{if } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ \frac{\kappa y^+}{\sigma_t} & \text{if } y_2^+ \leq y^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.56})$$

The values of y_1^+ and y_2^+ are obtained by calculating the intersection points of the variations laws used for \mathcal{K} .

The existence of an intermediate region depends upon the values of σ . Let's first consider the case where σ cannot be neglected compared to 1. In practise we consider $\sigma > 0,1$ (this is the common case when scalar f represents the air or the water temperature in normal temperature and pressure conditions). It is assumed that $\frac{1}{\sigma}$ can be neglected compared to $\frac{a_1 (y^+)^3}{\sigma_t}$ in the intermediate region. We thus obtain :

$$y_1^+ = \left(\frac{1000}{\sigma} \right)^{\frac{1}{3}} \quad y_2^+ = \sqrt{\frac{1000\kappa}{\sigma_t}} \quad (\text{IV.B.57})$$

⁶We make the approximation that the definitions of y^+ from u^* and u_k are equivalent.

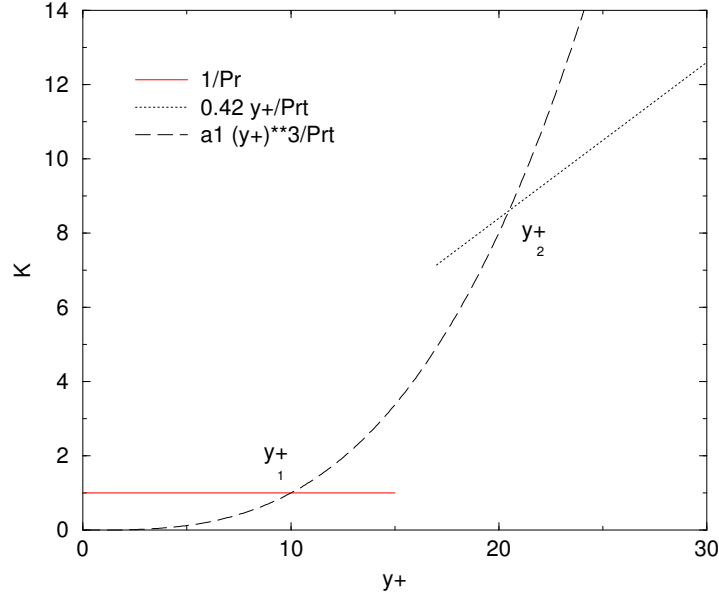


Figure IV.B.3: $(a + a_t)/\nu$ as a function of y^+ obtained for $\sigma = 1$ and $\sigma_t = 1$.

The dimensionless equation (IV.B.50) is integrated under the same hypothesis and we obtain the law of f^+ :

$$\begin{cases} f^+ = \sigma y^+ & \text{if } y^+ < y_1^+ \\ f^+ = a_2 - \frac{\sigma_t}{2a_1(y^+)^2} & \text{if } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ f^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln(y^+) + a_3 & \text{if } y_2^+ \leq y^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.58})$$

where a_2 and a_3 are integration constants, which have been chosen to obtain a continuous profile of f^+ :

$$a_2 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} \quad a_3 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma_t}{2\kappa} \left(1 + \ln \left(\frac{1000\kappa}{\sigma_t} \right) \right) \quad (\text{IV.B.59})$$

Let's now study the case where σ is much smaller than 1. In practise it is assumed that $\sigma \leq 0,1$ (this is for instance the case for liquid metals whose thermal conductivity is very large, and who have Prandtl number of values of the order of 0.01). The intermediate region then disappears and the coordinate of the interface between the law used in the near-wall region and the one used away from the wall is given by :

$$y_0^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa\sigma} \quad (\text{IV.B.60})$$

The dimensionless equation (IV.B.50) is then integrated under the same hypothesis, and the law of f^+ is obtained :

$$\begin{cases} f^+ = \sigma y^+ & \text{if } y^+ \leq y_0^+ \\ f^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right) + \sigma y_0^+ & \text{if } y_0^+ < y^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.61})$$

To summarize, the computation of h_b

$$h_b = \frac{\phi_b}{f_{b,ext} - f_{I'}} = \frac{\rho C u_k}{f_{I'}^+} \quad (\text{IV.B.62})$$

is performed by calculating $f_{I'}^+$ from $y^+ = y_{I'}^+$ using the following laws.

If $\sigma \leq 0, 1$, a two-layer model is used :

$$\begin{cases} f^+ = \sigma y^+ & \text{if } y^+ \leq y_0^+ \\ f^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln\left(\frac{y^+}{y_0^+}\right) + \sigma y_0^+ & \text{if } y_0^+ < y^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.63})$$

with

$$y_0^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa \sigma} \quad (\text{IV.B.64})$$

If $\sigma > 0, 1$, a three-layer model is used :

$$\begin{cases} f^+ = \sigma y^+ & \text{if } y^+ < y_1^+ \\ f^+ = a_2 - \frac{\sigma_t}{2 a_1 (y^+)^2} & \text{if } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ f^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln(y^+) + a_3 & \text{if } y_2^+ \leq y^+ \end{cases} \quad (\text{IV.B.65})$$

with

$$y_1^+ = \left(\frac{1000}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}} \quad y_2^+ = \sqrt{\frac{1000\kappa}{\sigma_t}} \quad (\text{IV.B.66})$$

and

$$a_2 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} \quad a_3 = 15\sigma^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma_t}{2\kappa} \left(1 + \ln\left(\frac{1000\kappa}{\sigma_t}\right)\right) \quad (\text{IV.B.67})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 151/400
---------	--	--

Points to treat

The use of HFLUI/CPP when ISCSTH is 2 (case with radiation) needs to be checked (CPP is actually 1 in this case).

The boundary conditions of the velocity are based on derivations focusing on only one term of the tangential stress $(\mu_I + \mu_{t,I})(\underline{\text{grad}} \underline{u}) \underline{n}$ without taking into account the transpose gradient.

In order to establish the boundary conditions of the velocity in $k - \varepsilon$ based on the constraint , a projection onto the plane tangent to the wall and an arbitrary zero normal velocity are introduced.

The hypothesis made in order to establish formulae for the different types of boundary conditions (dissipation, velocities) are based on the assumption that the mesh is orthogonal at the wall. This assumption is extended without any caution to the case of non-orthogonal meshes.

The one velocity scale (`cs_wall_functions.c`) wall function requires solving an equation using a Newton algorithm. The computational cost of the latter is low. One can also used a 1/7 power law (Werner et Wengle) which yields results which are as accurate as the logarithmic law in the logarithmic region, and which permits analytical resolutions (chosen option in LES mode). Be careful however, since with this law, the intersection with the linear law is slightly different, which thus requires some adaptations (intersection around 11.81 instead of 10.88 for the law adopted here $U^+ = 8,3 (y^+)^{\frac{1}{7}}$).

The values of all the physical properties are taken at the cell centres, without any reconstruction. Without modifying this approach, it would be useful to keep this in mind.

For the thermal law with very small Prandtl numbers compared to 1, Arpaci and Larsen suggest $y_0^+ \simeq 5/Pr$ (with proof from experimental data) rather than $Pr_t/(Pr \kappa)$ (current value, computed as the analytical intersection of the linear and logarithmic laws considered). One should address this question.

C- clptrg routine

Fonction

Ce sous-programme est dédié au calcul des conditions aux limites en paroi rugueuse. On utilise le formalisme introduit dans `CONDLI` pour les conditions aux limites générales.

Par conditions aux limites en paroi, on entend ici l'ensemble des conditions aux limites pour la vitesse, les grandeurs turbulentes (k, ε), la température lorsqu'elle a une valeur de paroi imposée (ou l'enthalpie et plus généralement les *VarScalaire*¹ à traiter en paroi en prenant en compte une loi de similitude pour la couche limite associée). Pour les *VarScalaire*, en particulier, lorsque les conditions aux limites de paroi sont du type Neumann (homogène ou non), elles sont traitées dans `condli` et on ne s'y intéresse donc pas ici. En particulier, les conditions aux limites des *VarScalaire* représentant la variance de fluctuations d'autres *VarScalaire* ne sont pas traitées ici car leur traitement en paroi est de type Neumann homogène.

On indique comment sont calculés les couples de coefficients A_b et B_b qui sont utilisés pour le calcul de certains termes discrets des équations à résoudre et qui permettent en particulier de déterminer une valeur associée aux faces de bord $f_{b,int}$ (en un point localisé au "centre" de la face de bord, barycentre de ses sommets) par la relation $f_{b,int} = A_b + B_b f_{I'}$ ($f_{I'}$ est la valeur de la variable au point I' , projeté du centre de la cellule jouxtant le bord sur la droite normale à la face de bord et passant par son centre : voir la figure IV.C.1).

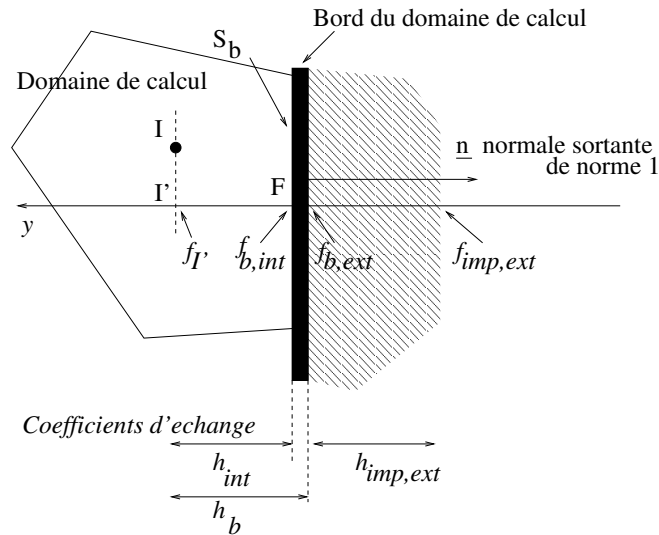


Figure IV.C.1: Cellule de bord.

Discrétisation

• Notations

¹Comme dans `condli`, on désignera ici par *VarScalaire* toute variable solution d'une équation de convection-diffusion autre que la vitesse, la pression et les grandeurs turbulentes k, ε . La dénomination *VarScalaire* pourra en particulier se rapporter à la température, à l'enthalpie ou à un scalaire passif.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 153/400
---------	--	---

La vitesse de la paroi est notée \underline{v}_p . On la suppose projetée dans le plan tangent à la paroi (si elle ne l'est pas, le code la projette).

La vitesse du fluide est notée \underline{u} . L'indice I , I' ou F désigne le point auquel elle est estimée. La composante tangentielle par rapport à la paroi est notée u_τ . La vitesse du fluide dans le repère lié à la paroi (vitesse "relative") est notée $\underline{u}^r = \underline{u} - \underline{v}_p$.

Le repère orthonormé lié à la paroi est noté $\hat{\mathcal{R}} = (\underline{\tau}, \underline{\tilde{n}}, \underline{b})$.

- $\underline{\tilde{n}} = -\underline{n}$ est le vecteur normé orthogonal à la paroi et dirigé vers l'intérieur du domaine de calcul.
- $\underline{\tau} = \frac{1}{\|\underline{u}_{I'}^r - (\underline{u}_{I'}^r \cdot \underline{\tilde{n}})\underline{\tilde{n}}\|} [\underline{u}_{I'}^r - (\underline{u}_{I'}^r \cdot \underline{\tilde{n}})\underline{\tilde{n}}]$ est le vecteur normé porté par la projection de la vitesse relative en I' , $\underline{u}_{I'}^r$, dans le plan tangent à la paroi (*i.e.* orthogonal à $\underline{\tilde{n}}$) : voir la figure IV.C.1.
- \underline{b} est le vecteur normé complétant le repère direct.

Dans le cas du **modèle à deux échelles de vitesse**, on note :

- u_k la vitesse de frottement en paroi obtenue à partir de l'énergie turbulente.
 - u^* la vitesse de frottement en paroi déterminée à partir de la relation $\frac{u_{\tau, I'}^r}{u^*} = f(z_p)$.
 - z_p représente une distance à la paroi (c'est à dire la distance depuis le bord du domaine de calcul), soit $z_p = I'F$ (voir la figure IV.C.1). La fonction f traduit la forme idéale du profil de vitesse. Dans l'atmosphère, cette fonction est donnée par une loi de type logarithmique faisant intervenir la rugosité dynamique de la paroi z_0 :
- $$f(z_p) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z_p + z_0}{z_0} \right)$$
- Les deux échelles de vitesse u_k et u^* sont simples à calculer mais leur obtention nécessite la connaissance de l'énergie turbulente k_I au centre de la maille jouxtant la face de bord.
 - Le modèle à deux échelles est le modèle par défaut dans *Code_Saturne*. Il permet souvent, et en particulier dans les cas avec transfert thermique, de diminuer les effets de certains défaut liés au modèle $k - \varepsilon$ (exemple classique du jet impactant).

On se sert plus bas de u^* et u_k pour les conditions aux limites portant sur la vitesse et les scalaires (température en particulier).

Modèle à deux échelles de vitesse

$$\begin{cases} u_k = C_\mu^{\frac{1}{4}} k_I^{\frac{1}{2}} \\ u^* \text{ solution de } \frac{u_{\tau, I'}^r}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(z_k) \\ z_k = \frac{I'F + z_0}{z_0} = \frac{z_p + z_0}{z_0} \\ \text{avec } C_\mu = 0,09 \text{ et } \kappa = 0,42 \end{cases} \quad (\text{IV.C.1})$$

Dans le cas du **modèle à une échelle de vitesse**, on note u^* l'unique vitesse de frottement en paroi solution de l'équation $\frac{u_{\tau, I'}^r}{u^*} = f(z_p)$. La grandeur z_p représente une distance à la paroi, soit $z_p = I'F$. La fonction f traduit la forme idéale du profil de vitesse comme pour le modèle à deux échelles de vitesses. On peut noter que cette vitesse de frottement, d'un calcul plus délicat (point fixe), s'obtient cependant sans faire référence aux variables turbulentes (k , ε). Par commodité, on posera dans le cas du modèle à une échelle $u_k = u^*$.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 154/400
---------	--	---

On se sert plus bas de u^* et u_k pour les conditions aux limites portant sur la vitesse et les scalaires (température en particulier).

Modèle à une échelle de vitesse

$$\begin{cases} u_k = u^* \\ u^* \text{ solution de } \frac{u_{\tau, I'}^r}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(z_k) \\ z_k = \frac{I'F + z_0}{z_0} = \frac{z_p + z_0}{z_0} \\ \text{avec } C_\mu = 0,09 \text{ et } \kappa = 0,42 \end{cases} \quad (\text{IV.C.2})$$

• Conditions aux limites pour la vitesse en $k - \varepsilon$

On considère tout d'abord les conditions utilisées dans le cas d'un calcul réalisé avec le modèle $k - \varepsilon$. Ce sont en effet les plus complexes et les plus générales.

Les conditions aux limites sont nécessaires pour imposer au bord la contrainte tangentielle $\sigma_\tau = \rho_I u^* u_k$ adéquate dans l'équation de quantité de mouvement² (ρ_I est la masse volumique au centre de la cellule I). Le terme qui nécessite des conditions aux limites est celui qui contient la dérivée de la vitesse dans la direction normale à la paroi, soit³ : $(\mu_I + \mu_{t, I}) \underline{\text{grad}} \underline{u} \underline{n}$. Il apparaît au second membre de l'équation de quantité de mouvement usuelle (voir `bilsc2` et `predvv`).

Dans le cas où le modèle $k - \varepsilon$ a tendance à surestimer la production de l'énergie turbulente, l'échelle de longueur du modèle, $L_{k-\varepsilon}$, peut devenir significativement plus grande que l'échelle théorique maximale des tourbillons de la couche limite turbulente $L_{\text{théo}}$. On note :

$$\begin{cases} L_{k-\varepsilon} = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \\ L_{\text{théo}} = \kappa (I'F + z_0) = \kappa (z_p + z_0) \end{cases} \quad (\text{IV.C.3})$$

Dans le cas où $L_{k-\varepsilon} > L_{\text{théo}}$, on a donc $\mu_{t, I} > \mu_t^{lm}$ avec $\mu_{t, I}$ la viscosité turbulente du modèle $k - \varepsilon$ au point I et $\mu_t^{lm} = \rho_I L_{\text{théo}} u_k$ la viscosité turbulente du modèle de longueur de mélange. En outre, la contrainte tangentielle peut s'écrire en faisant apparaître la viscosité turbulente, soit :

$$\sigma_\tau = \rho_I u^* u_k = \frac{u^*}{\kappa (I'F + z_0)} \underbrace{\rho_I \kappa (I'F + z_0) u_k}_{\mu_t^{lm}} \quad (\text{IV.C.4})$$

L'échelle de viscosité introduite dans la contrainte est alors en contradiction avec celle déduite de la turbulence calculée alentour par le modèle. On préfère dès lors écrire, en utilisant l'échelle de longueur du $k - \varepsilon$ chaque fois qu'elle est inférieure à la limite $L_{\text{théo}}$:

$$\sigma_\tau = \frac{u^*}{\kappa (I'F + z_0)} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t, I}) \quad (\text{IV.C.5})$$

On peut alors utiliser cette valeur pour le calcul du flux diffusif qui en dépend dans l'équation de Navier-Stokes :

$$(\mu_I + \mu_{t, I}) \underline{\text{grad}} \underline{u} \underline{n} = -\sigma_\tau \underline{\tau} \quad (\text{IV.C.6})$$

Or, le gradient de vitesse (gradient à la face de bord) est calculé dans le code sous la forme suivante :

$$(\mu_I + \mu_{t, I}) \underline{\text{grad}} \underline{u} \underline{n} = \frac{(\mu_I + \mu_{t, I})}{I'F} (\underline{u}_F - \underline{u}_{I'}) \quad (\text{IV.C.7})$$

²Proposition de modification des conditions aux limites de paroi turbulente pour le Solveur Commun dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$ standard, rapport EDF HI-81/00/019/A, 2000, M. Boucker, J.-D. Mattei.

³Le terme en gradient transposé est traité dans `visecv` et ne sera pas considéré ici.

Du rapprochement de (IV.C.6) et de (IV.C.7) on tire alors la valeur de \underline{u}_F à imposer, soit $\underline{u}_{F,flux}$ (respect du flux de quantité de mouvement) :

$$\begin{aligned}\underline{u}_{F,flux} &= \underline{u}_{I'} - \frac{\overline{I'F}}{\mu_I + \mu_{t,I}} \sigma_\tau \underline{\tau} \\ &= \underline{u}_{I'} - \frac{u^*}{\kappa(\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \frac{I'F}{(I'F + z_0)} \underline{\tau}\end{aligned}\quad (IV.C.8)$$

En réalité, une approximation supplémentaire est réalisée, qui consiste à imposer la vitesse normale nulle à la paroi et à utiliser l'équation (IV.C.8) projetée sur le plan tangent à la paroi, soit :

$$\underline{u}_{F,flux} = \left[u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa(\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \frac{I'F}{(I'F + z_0)} \right] \underline{\tau} \quad (IV.C.9)$$

Enfin, on peut également faire apparaître la vitesse de la paroi dans l'expression finale :

$$\begin{aligned}\textbf{Conditions aux limites sur la vitesse de type "flux"} (k - \varepsilon) \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{F,flux} = \underline{v}_p + \left[u_{\tau,I'}^r - \frac{u^*}{\kappa(\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \frac{I'F}{(I'F + z_0)} \right] \underline{\tau} \end{array} \right.\end{aligned}\quad (IV.C.10)$$

Un premier couple de coefficients A_{flux} et B_{flux} s'en déduit (pour chaque composante de vitesse séparément) et il n'est utilisé que pour le calcul du terme dépendant de la contrainte tangentielle (voir bilsc2) :

$$\begin{aligned}\textbf{Coefficients associés aux conditions aux limites sur la vitesse de type "flux"} (k - \varepsilon) \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_{flux} = \underline{v}_p + \left[u_{\tau,I'}^r - \frac{u^*}{\kappa(\mu_I + \mu_{t,I})} \max(\mu_t^{lm}, \mu_{t,I}) \frac{I'F}{(I'F + z_0)} \right] \underline{\tau} \\ \underline{B}_{flux} = \underline{0} \end{array} \right.\end{aligned}\quad (IV.C.11)$$

On a vu ci-dessus comment imposer une condition à la limite permettant de calculer correctement le terme en contrainte. Une analyse supplémentaire est nécessaire pour le calcul des gradients de vitesse. On cherche à trouver une valeur en face de bord qui permette d'obtenir, avec la formulation adoptée pour le gradient, la valeur de la production turbulente la plus proche possible de la valeur théorique, elle-même déterminée en utilisant la loi logarithmique, pour évaluer la dérivée normale de la vitesse tangentielle. Ainsi, on définit (au point I) :

$$P_{théo} = \rho_I u^* u_k \left\| \frac{\partial u_\tau}{\partial \underline{n}} \right\|_I = \rho_I \frac{u_k (u^*)^2}{\kappa (I'F + z_0)} \quad (IV.C.12)$$

Par ailleurs, le terme prépondérant de la production calculée dans la cellule I est, pour les situations classiques (z est l'ordonnée sur l'axe de vecteur directeur $\underline{\tilde{n}}$),

$$P_{calc} = \mu_{t,I} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial z} \right)_I^2 \quad (IV.C.13)$$

Or, le gradient normal de la vitesse tangentielle (gradient cellule) est calculé dans le code en volumes finis et son expression dans le cas d'un maillage orthogonal et régulier est la suivante (voir les notations sur la figure IV.C.2) :

$$P_{calc} = \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,G} - u_{\tau,F}}{2d} \right)^2 = \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,I} + u_{\tau,J} - 2u_{\tau,F}}{4d} \right)^2 \quad (IV.C.14)$$

On suppose alors que $u_{\tau,J}$ peut être obtenu à partir de $u_{\tau,I}$ et du gradient normal de u_τ évalué en G à partir de la loi logarithmique, soit :

$$u_{\tau,J} = u_{\tau,I} + IJ \cdot (\partial_z u_\tau)_G + \mathcal{O}(IJ^2) \approx u_{\tau,I} + IJ \cdot \left[\partial_z \left(\frac{u^*}{\kappa} \ln(z) \right) \right]_G = u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa (2d + z_0)} \quad (IV.C.15)$$

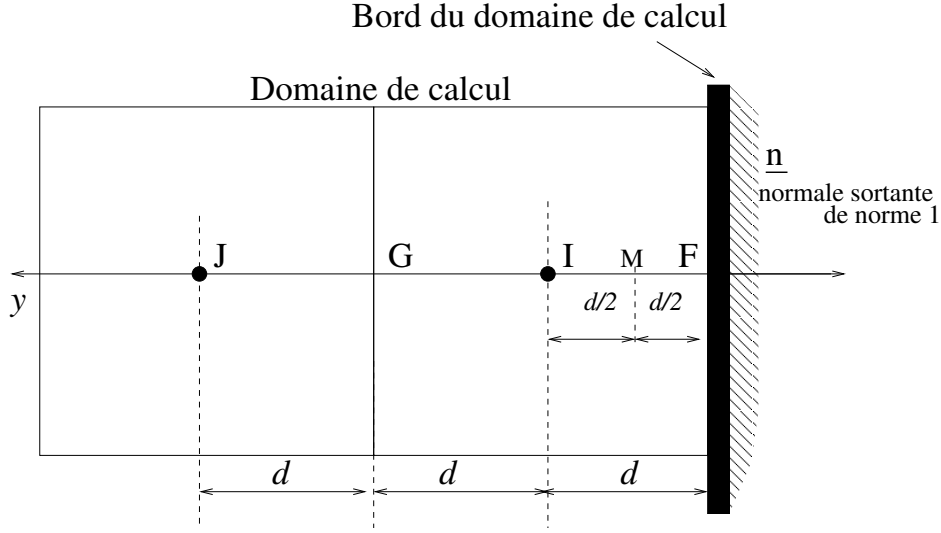


Figure IV.C.2: Cellule de bord - Maillage orthogonal.

et l'on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 P_{\text{calc}} &= \mu_{t,I} \left(\frac{2u_{\tau,I} + 2d \frac{u^*}{\kappa(2d+z_0)} - 2u_{\tau,F}}{4d} \right)^2 \\
 &= \mu_{t,I} \left(\frac{u_{\tau,I} + d \frac{u^*}{\kappa(2d+z_0)} - u_{\tau,F}}{2d} \right)^2
 \end{aligned} \tag{IV.C.16}$$

On rapproche alors les équations (IV.C.12) et (IV.C.16) pour imposer que la production calculée soit égale à la production théorique. On étend sans précaution les formules précédentes aux maillages non orthogonaux (la vitesse en I est alors simplement prise en I'). On obtient alors l'expression suivante pour $u_{\tau,F}$:

$$u_{\tau,F,\text{grad}} = u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa} \left(2d \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k}{\mu_{t,I} (I'F + z_0)}} - \frac{1}{2 + z_0/I'F} \right) \tag{IV.C.17}$$

On impose d'autre part que le gradient reste au moins aussi raide que celui donné par la dérivée normale du profil de vitesse théorique (logarithmique) en I' :

$$\partial_z u_\tau = \partial_z \left(\frac{u^*}{\kappa} \ln(z) \right) = \frac{u^*}{\kappa (I'F + z_0)}, \text{ soit donc :}$$

$$u_{\tau,F,\text{grad}} = u_{\tau,I'} - \frac{u^*}{\kappa} \max \left(1, 2d \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k}{\mu_{t,I} (I'F + z_0)}} - \frac{1}{2 + z_0/I'F} \right) \tag{IV.C.18}$$

La vitesse normale à la paroi est imposée nulle. De plus, si la vitesse tangentielle en I' est nulle (de valeur absolue inférieure à une limite numérique arbitraire de 10^{-12}) une condition d'adhérence est appliquée. Enfin, on peut également faire apparaître la vitesse de la paroi dans l'expression finale :

Conditions aux limites sur la vitesse de type "gradient" ($k - \varepsilon$)

$$\begin{cases} \underline{u}_{F,\text{grad}} = \underline{v}_p & \text{si } u_{\tau,I'}^r < 10^{-12} \\ \underline{u}_{F,\text{grad}} = \underline{v}_p + u_{\tau,I'}^r - \frac{u^*}{\kappa} \left[\max \left(1, 2d \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k}{\mu_{t,I} (I'F + z_0)}} - \frac{1}{2 + z_0/I'F} \right) \right] \underline{\tau} \end{cases} \tag{IV.C.19}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 157/ 400
---------	--	--

Un second couple de coefficients A_{grad} et B_{grad} s'en déduit (pour chaque composante de vitesse séparément) et est utilisé chaque fois que le gradient de la vitesse est nécessaire (hormis pour les termes dépendant de la contrainte tangentielle, traités dans **bilsc2** au moyen des coefficients A_{flux} et B_{flux}) :

Coefficients associés aux conditions aux limites sur la vitesse
de type “gradient” ($k - \varepsilon$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_{grad} = \underline{v}_p \quad \text{si } u_{\tau, I'}^r < 10^{-12} \\ \underline{A}_{grad} = \underline{v}_p + u_{\tau, I'}^r - \frac{u^*}{\kappa} \left[\max \left(1, 2d \sqrt{\frac{\rho_I \kappa u_k}{\mu_{t, I} (I' F + z_0)}} - \frac{1}{2 + z_0 / I' F} \right) \right] \mathcal{I} \\ \underline{B}_{grad} = \underline{0} \end{array} \right. \quad (\text{IV.C.20})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 158/400
---------	--	---

• **Conditions aux limites pour les variables k et ε (modèle $k - \varepsilon$ standard)**

On impose sur k une condition de Dirichlet tirée de la vitesse de frottement u_k (se reporter à l'équation (IV.C.1)), soit :

$$k = \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.C.21})$$

On cherche à imposer la dérivée normale de ε à partir de la loi théorique suivante (voir les notations sur la figure IV.C.2) :

$$G_{\text{théo},\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{u_k^3}{\kappa (z + z_0)} \right] \quad (\text{IV.C.22})$$

On utilise le point M pour imposer une condition à la limite avec un ordre plus élevé en espace. En effet, la simple utilisation de la relation $\varepsilon_F = \varepsilon_I + d\partial_z\varepsilon_I + O(d^2)$ conduit à une précision d'ordre 1. En utilisant les développements limités suivants, on peut obtenir une précision à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \varepsilon_M &= \varepsilon_I - \frac{d}{2}\partial_z\varepsilon_I + \frac{d^2}{8}\partial_z^2\varepsilon_I + O(d^3) \\ \varepsilon_M &= \varepsilon_F + \frac{d}{2}\partial_z\varepsilon_F + \frac{d^2}{8}\partial_z^2\varepsilon_F + O(d^3) \end{cases} \quad (\text{IV.C.23})$$

Par différence, ces relations conduisent à

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I - \frac{d}{2}(\partial_z\varepsilon_I + \partial_z\varepsilon_F) + O(d^3) \quad (\text{IV.C.24})$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \partial_z\varepsilon_I &= \partial_z\varepsilon_M + d\partial_z^2\varepsilon_M + O(d^2) \\ \partial_z\varepsilon_F &= \partial_z\varepsilon_M - d\partial_z^2\varepsilon_M + O(d^2) \end{cases} \quad (\text{IV.C.25})$$

La somme de ces deux dernières relations permet d'établir $\partial_z\varepsilon_I + \partial_z\varepsilon_F = 2\partial_z\varepsilon_M + O(d^2)$ et, en reportant dans (IV.C.24), on obtient alors une expression de ε_F à l'ordre 2, comme souhaité :

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I - d\partial_z\varepsilon_M + O(d^3) \quad (\text{IV.C.26})$$

On utilise alors la valeur théorique (IV.C.22) pour évaluer $\partial_z\varepsilon_M$ et on obtient alors la valeur à imposer au bord ($d = I'F$) :

$$\varepsilon_F = \varepsilon_I + d \frac{u_k^3}{\kappa (d/2 + z_0)^2} \quad (\text{IV.C.27})$$

Cette relation est étendue au cas de maillages non orthogonaux sans précaution (ce qui doit dégrader l'ordre en espace).

On a finalement :

Conditions aux limites sur les variables k et ε

$$\begin{cases} k_F &= \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \\ \varepsilon_F &= \varepsilon_{I'} + I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2 + z_0)^2} \end{cases} \quad (\text{IV.C.28})$$

et les coefficients associés

Coefficients associés aux conditions aux limites sur les variables k et ε

$$\begin{cases} A_k &= \frac{u_k^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} & \text{et } B_k &= 0 \\ A_\varepsilon &= I'F \frac{u_k^3}{\kappa (I'F/2 + z_0)^2} & \text{et } B_\varepsilon &= 1 \end{cases} \quad (\text{IV.C.29})$$

• **Conditions aux limites pour les *VarScalaire*s**

On ne traite ici que les conditions se présentant sous la forme d'une valeur imposée (à la paroi ou en retrait de celle-ci avec un coefficient d'échange externe éventuel). On se reporte aux notations de la figure IV.C.1 et à la présentation générale disponible dans `condli` dont on ne reprend que la partie essentielle ci-dessous.

La conservation du flux normal au bord pour la variable f s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{h_{int}(f_{b,int} - f_{I'})}_{\phi_{int}} = \underbrace{h_b(f_{b,ext} - f_{I'})}_{\phi_b} = \begin{cases} \underbrace{h_{imp,ext}(f_{imp,ext} - f_{b,ext})}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (\text{IV.C.30})$$

On réarrange ces deux équations afin d'obtenir la valeur numérique $f_{b,int} = f_F$ à imposer en face de paroi, étant données les valeurs de $f_{imp,ext}$ et de $h_{imp,ext}$ fixées par l'utilisateur et la valeur h_b dictée par les lois de similitude qui seront détaillées plus bas. On précise les coefficients A et B qui s'en déduisent naturellement.

Conditions aux limites sur les *VarScalaire*s

$$f_{b,int} = \underbrace{\frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{imp,ext}}_A + \underbrace{\frac{h_{int} + h_{imp,ext}(h_r - 1)}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}}}_{B} f_{I'} \text{ avec } h_r = \frac{h_{int}}{h_b} \quad (\text{IV.C.31})$$

Principe de similitude : calcul de h_b .

Dans l'expression (IV.C.31), seule reste à déterminer la valeur de h_b , celle de h_{int} étant une valeur numérique cohérente avec le mode de calcul des gradients aux faces et précisée dans `condli` ($h_{int} = \frac{\alpha}{\overline{I'F}}$). La valeur de h_b doit permettre de relier le flux à l'écart entre les valeurs $f_{I'}$ et $f_{b,ext}$ en prenant en compte la couche limite (le profil de f n'est pas toujours linéaire) :

$$\phi_b = h_b (f_{b,ext} - f_{I'}) \quad (\text{IV.C.32})$$

Les considérations suivantes sont présentées en adoptant des notations générales. En particulier, le nombre de Prandtl-Schmidt est noté $\sigma = \frac{\nu \rho C}{\alpha}$. Lorsque le scalaire f considéré est la température, on a (voir `condli`) :

- $C = C_p$ (chaleur massique),
- $\alpha = \lambda$ (conductivité moléculaire),
- $\sigma = \frac{\nu \rho C_p}{\lambda} = Pr$ (nombre de Prandtl),
- $\sigma_t = Pr_t$ (nombre de Prandtl turbulent),
- $\phi = \left(\lambda + \frac{C_p \mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial z}$ (flux en $W m^{-2}$).

On s'est appuyé sur la référence "The atmospheric boundary layer", J. R. Garratt, Cambridge University Press.

Le flux en paroi s'écrit, pour le scalaire f (le flux est positif s'il est entrant dans le domaine fluide, comme l'indique l'orientation de l'axe z) :

$$\phi = - \left(\alpha + C \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = - \rho C \left(\frac{\alpha}{\rho C} + \frac{\mu_t}{\rho \sigma_t} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{IV.C.33})$$

Pour la température, avec $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ et $a_t = \frac{\mu_t}{\rho \sigma_t}$, on a donc, de manière équivalente :

$$\phi = - \rho C_p (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{IV.C.34})$$

On introduit f^* afin d'adimensionner f , en utilisant la valeur du flux au bord ϕ_b :

$$f^* = - \frac{\phi_b}{\rho C u_k} \quad (\text{IV.C.35})$$

Pour la température, on a donc :

$$T^* = - \frac{\phi_b}{\rho C_p u_k} \quad (\text{IV.C.36})$$

On rappelle que dans le cas du modèle à deux échelles de vitesse, u_k est la vitesse de frottement en paroi obtenue à partir de l'énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent⁴. Dans le cas du modèle à une échelle de vitesse, on pose $u_k = u^*$ avec u^* la vitesse de frottement en paroi déterminée à partir de la loi logarithmique.

⁴ $u_k = C_\mu^{\frac{1}{4}} k_I^{\frac{1}{2}}$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 161/400
---------	--	---

On divise alors les membres de l'équation (IV.C.33) par ϕ_b . Pour le membre de gauche, on simplifie en utilisant le fait que le flux se conserve et donc que $\phi = \phi_b$. Pour le membre de droite, on remplace ϕ_b par sa valeur $-\rho C u_k f^*$. Avec les notations :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad f^+ = \frac{f - f_{b,ext}}{f^*} \quad (\text{IV.C.37})$$

on a :

$$1 = \left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial f^+}{\partial z} \frac{1}{u_k} \quad (\text{IV.C.38})$$

Remarquons dès à présent qu'avec les notations précédentes, h_b s'exprime en fonction de $f_{I'}^+$:

$$h_b = \frac{\phi_b}{f_{b,ext} - f_{I'}} = \frac{\rho C u_k}{f_{I'}^+} \quad (\text{IV.C.39})$$

Pour déterminer h_b , on intègre alors l'équation (IV.C.38) afin de disposer de $f_{I'}^+$. L'unique difficulté consiste alors à prescrire une loi de variation de $\mathcal{K} = \frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t}$

Dans la zone turbulente pleinement développée, une hypothèse de longueur de mélange permet de modéliser les variations de ν_t :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| = \kappa u^* (z + z_0) \quad (\text{IV.C.40})$$

De plus, les effets de diffusion de f (ou effets "conductifs" lorsque f représente la température) sont négligeables devant les effets turbulents : on néglige alors $\frac{\nu}{\sigma}$ devant $\frac{\nu_t}{\sigma_t}$. On a donc finalement :

$$\mathcal{K} = \frac{\kappa u_k}{\sigma_t} (z + z_0) \quad (\text{IV.C.41})$$

On intègre l'équation adimensionnelle (IV.C.38) sous la même hypothèse et on obtient alors la loi donnant f^+ :

$$f^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln \left(\frac{z + z_0}{z_{o_T}} \right) \quad (\text{IV.C.42})$$

où z_{o_T} est la longueur de rugosité thermique. Son ordre de grandeur comparé à la rugosité dynamique est donné par la relation $\ln \left(\frac{z_0}{z_{o_T}} \right) \approx 2$ (référence J. R. Garratt).

Pour résumer, le calcul de h_b est réalisé en déterminant :

$$f_{I'}^+ = \frac{\sigma_t}{\kappa} \ln \left(\frac{I' F + z_0}{z_{o_T}} \right) \quad (\text{IV.C.43})$$

$$h_b = \frac{\phi_b}{f_{b,ext} - f_{I'}} = \frac{\rho C u_k}{f_{I'}^+} \quad (\text{IV.C.44})$$

D- clsyvt routine

Function

The aim of this subroutine is to fill the arrays of boundary conditions (COEFA and COEFB) of the velocity and of the Reynolds stress tensor, for the symmetry boundary faces. These conditions are expressed relatively naturally in the local coordinate system of the boundary face. The function of `clsyvt` is then to transform these natural boundary conditions (expressed in the local coordinate system) in the general coordinate system, and then to possibly partly implicit them.

It should be noted that the part of the subroutine `clptur` (for the wall boundary conditions) relative to the writing in the local coordinate system and to the rotation is totally identical.

Discretisation

Figure IV.D.1 presents the notations used at the face. The local coordinate system is defined from the normal at the face and the velocity at I' :

- $\underline{t} = \frac{1}{|\underline{u}_{I',\tau}|} \underline{u}_{I',\tau}$ is the first vector of the local coordinate system.
- $\underline{\tilde{n}} = -\underline{n}$ is the second vector of the local coordinate system.
- $\underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{\tilde{n}} = \underline{n} \wedge \underline{t}$ is the third vector of the local coordinate system.

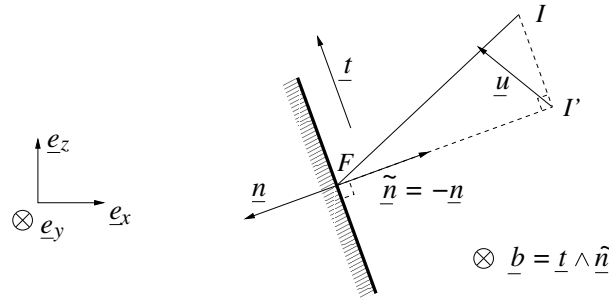


Figure IV.D.1: Definition of the vectors forming the local coordinate system.

Here, \underline{n} is the normalized normal vector to the boundary face in the sense of *Code_Saturne* (*i.e.* directed towards the outside of the computational domain) and $\underline{u}_{I',\tau}$ is the projection of the velocity at I' in the plane of the face : $\underline{u}_{I',\tau} = \underline{u}_{I'} - (\underline{u}_{I'} \cdot \underline{n}) \underline{n}$.

If $\underline{u}_{I',\tau} = \underline{0}$, the direction of \underline{t} in the plane normal to \underline{n} is irrelevant. thus it is defined as : $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} (n_z \underline{e}_y - n_y \underline{e}_z)$ where $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} (n_z \underline{e}_x - n_x \underline{e}_z)$ along the non-zero components of \underline{n} (components in the global coordinate system $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$).

For sake of clarity, the following notations will be used :

- The general coordinate system will write $\mathcal{R} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.
- The local coordinate system will write $\hat{\mathcal{R}} = (\underline{t}, -\underline{n}, \underline{b}) = (\underline{t}, \underline{\tilde{n}}, \underline{b})$.
- The matrices of the components of a vector \underline{u} in the coordinate systems \mathcal{R} and $\hat{\mathcal{R}}$ will write \underline{U} and $\hat{\underline{U}}$, respectively.
- The matrices of the components of a tensor \underline{R} (2^{nd} order) in the coordinate systems \mathcal{R} and $\hat{\mathcal{R}}$ will

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 163/400
---------	--	---

write $\underline{\underline{R}}$ and $\hat{\underline{\underline{R}}}$, respectively.

- $\underline{\underline{P}}$ refers to the (orthogonal) matrix transforming \mathcal{R} into $\hat{\mathcal{R}}$.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} t_x & -n_x & b_x \\ t_y & -n_y & b_y \\ t_z & -n_z & b_z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.D.1})$$

($\underline{\underline{P}}$ being orthogonal, $\underline{\underline{P}}^{-1} = {}^t\underline{\underline{P}}$).

In particular, we have for any vector \underline{u} and for any second order tensor $\underline{\underline{R}}$:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{U}} \\ \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \end{cases} \quad (\text{IV.D.2})$$

TREATMENT OF THE VELOCITY

In the local coordinate system, the boundary conditions for \underline{u} naturally write :

$$\begin{cases} u_{F,t} &= u_{I',t} \\ u_{F,\tilde{n}} &= 0 \\ u_{F,b} &= u_{I',b} \end{cases} \quad (\text{IV.D.3})$$

or

$$\underline{U}_F = \underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{U}}_F = \underline{\underline{P}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{\underline{U}}_{I'} = \underline{\underline{P}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \cdot \underline{U}_{I'} \quad (\text{IV.D.4})$$

Let's take $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$ (matrix in the coordinate system \mathcal{R} of the projector orthogonal to the face).

The boundary conditions for \underline{u} thus write :

$$\underline{U}_F = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_{I'} \quad (\text{IV.D.5})$$

Since the matrix $\underline{\underline{P}}$ is orthogonal, it can be shown that

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \tilde{n}_x^2 & -\tilde{n}_x\tilde{n}_y & -\tilde{n}_x\tilde{n}_z \\ -\tilde{n}_x\tilde{n}_y & 1 - \tilde{n}_y^2 & -\tilde{n}_y\tilde{n}_z \\ -\tilde{n}_x\tilde{n}_z & -\tilde{n}_y\tilde{n}_z & 1 - \tilde{n}_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.D.6})$$

The boundary conditions can then be partially implicitated:

$$u_{F,x}^{(n+1)} = \underbrace{1 - \tilde{n}_x^2}_{\text{COEFB}} u_{I',x}^{(n+1)} - \underbrace{\tilde{n}_x\tilde{n}_y u_{I',y}^{(n)} + \tilde{n}_x\tilde{n}_z u_{I',z}^{(n)}}_{\text{COEFA}} \quad (\text{IV.D.7})$$

The other components have a similar treatment. Since only the coordinates of \underline{n} are useful, we do not need (for \underline{u}) to define explicitly the vectors \underline{t} and \underline{b} .

TREATMENT OF THE REYNOLDS STRESS TENSOR

We saw that we have the following relation:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \quad (\text{IV.D.8})$$

The boundary conditions we want to write are relations of the type:

$$R_{F,ij} = \sum_{k,l} \alpha_{ijkl} R_{I',kl} \quad (\text{IV.D.9})$$

We are then naturally brought to introduce the column matrices of the components of $\underline{\underline{R}}$ in the different coordinate systems.

We write

$$\underline{S} = {}^t[R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{31}, R_{32}, R_{33}] \quad (\text{IV.D.10})$$

and

$$\underline{\hat{S}} = {}^t[\hat{R}_{11}, \hat{R}_{12}, \hat{R}_{13}, \hat{R}_{21}, \hat{R}_{22}, \hat{R}_{23}, \hat{R}_{31}, \hat{R}_{32}, \hat{R}_{33}] \quad (\text{IV.D.11})$$

Two functions q and r from $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to $\{1, 2, 3\}$ are defined. Their values are given in the following table :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q(i)$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$r(i)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3

$i \mapsto (q(i), r(i))$ is then a bijection from $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to $\{1, 2, 3\}^2$, and we have :

$$\begin{cases} R_{ij} = S_{3(i-1)+j} \\ S_i = R_{q(i)r(i)} \end{cases} \quad (\text{IV.D.12})$$

Using equation [IV.D.8](#), we thus have :

$$\begin{aligned} S_{F,i} &= R_{F,q(i)r(i)} = \sum_{(m,n) \in \{1,2,3\}^2} P_{q(i)m} \hat{R}_{F,mn} P_{r(i)n} \\ &= \sum_{j=1}^9 P_{q(i)q(j)} \hat{R}_{F,q(j)r(j)} P_{r(i)r(j)} \quad (\text{d'après la bijectivité de } (q, r)) \\ &= \sum_{j=1}^9 P_{q(i)q(j)} P_{r(i)r(j)} \hat{S}_{F,j} \end{aligned} \quad (\text{IV.D.13})$$

Or

$$\underline{S}_F = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\hat{S}}_F \quad \text{avec } A_{ij} = P_{q(i)q(j)} P_{r(i)r(j)} \quad (\text{IV.D.14})$$

It can be shown that $\underline{\underline{A}}$ is an orthogonal matrix (see Annexe A).

In the local coordinate system, the boundary conditions of $\underline{\underline{R}}$ write naturally¹.

$$\begin{cases} \hat{R}_{F,11} = \hat{R}_{I',11} & \hat{R}_{F,21} = 0 & \hat{R}_{F,31} = B \hat{R}_{I',31} \\ \hat{R}_{F,12} = 0 & \hat{R}_{F,22} = \hat{R}_{I',22} & \hat{R}_{F,32} = 0 \\ \hat{R}_{F,13} = B \hat{R}_{I',13} & \hat{R}_{F,23} = 0 & \hat{R}_{F,33} = \hat{R}_{I',33} \end{cases} \quad (\text{IV.D.15})$$

¹cf. Davroux A., Archambeau F., *Le $R_{ij} - \varepsilon$ dans Code_Saturne (version β)*, HI-83/00/030/A

or

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_F = \underline{\underline{B}} \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}_{I'} \quad \text{avec } \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & B & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.D.16})$$

For the symmetry faces which are treated by `clsyvt`, the coefficient B is 1. However a similar treatment is applied in `clptur` for the wall faces, and in this B is zero. This parameter has to be specified when `clca66` is called (see §D).

Back in the global coordinate system, the following formulae is finally obtained :

$$\underline{\underline{S}}_F = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{S}}_{I'} \quad \text{avec } \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot {}^t \underline{\underline{A}} \quad (\text{IV.D.17})$$

It can be shown that the components of the matrix $\underline{\underline{C}}$ are :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^9 P_{q(i)q(k)} P_{r(i)r(k)} P_{q(j)q(k)} P_{r(j)r(k)} (\delta_{k1} + B\delta_{k3} + \delta_{k5} + B\delta_{k7} + \delta_{k9}) \quad (\text{IV.D.18})$$

To conclude, it can be noted that, due to the symmetries of the tensor $\underline{\underline{R}}$, the matrix $\underline{\underline{S}}$. Thus only the simplified matrices $\underline{\underline{S}}'$ and $\hat{\underline{\underline{S}}}'$ will be used:

$$\underline{\underline{S}}' = {}^t[\underline{\underline{R}}_{11}, \underline{\underline{R}}_{22}, \underline{\underline{R}}_{33}, \underline{\underline{R}}_{12}, \underline{\underline{R}}_{13}, \underline{\underline{R}}_{23}] \quad (\text{IV.D.19})$$

$$\hat{\underline{\underline{S}}}' = {}^t[\hat{\underline{\underline{R}}}_{11}, \hat{\underline{\underline{R}}}_{22}, \hat{\underline{\underline{R}}}_{33}, \hat{\underline{\underline{R}}}_{12}, \hat{\underline{\underline{R}}}_{13}, \hat{\underline{\underline{R}}}_{23}] \quad (\text{IV.D.20})$$

By gathering different lines of matrix $\underline{\underline{C}}$, equation IV.D.17 is transformed into the final equation :

$$\underline{\underline{S}}'_F = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{S}}'_{I'} \quad (\text{IV.D.21})$$

The computation of the matrix $\underline{\underline{D}}$ is performed in the subroutine `clca66`. The methodology is described in annexe B.

From $\underline{\underline{D}}$, the coefficients of the boundary conditions can be partially implicated (`ICLSYR` = 1) or totally explicited (`ICLSYR` = 0).

- PARTIAL IMPLICITATION

$$S'_{F,i}{}^{(n+1)} = \underbrace{D_{ii}}_{\text{COEFB}} S'_{I',i}{}^{(n+1)} + \underbrace{\sum_{j \neq i} D_{ij} S'_{I',j}{}^{(n)}}_{\text{COEFA}} \quad (\text{IV.D.22})$$

- TOTAL EXPLICITATION

$$S'_{F,i}{}^{(n+1)} = \underbrace{\sum_j D_{ij} S'_{I',j}{}^{(n)}}_{\text{COEFA}} \quad (\text{COEFB} = 0) \quad (\text{IV.D.23})$$

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 166/400
---------	--	--

Implementation

• Beginning of the loop

Beginning of the loop on all the boundary faces IFAC with symmetry conditions. A face is considered as a symmetry face if ICODCL(IFAC,IU) is 4. The tests in `vericl` are designed for ICODCL to be equal to 4 for IU if and only if it is equal to 4 for the other components of the velocity and for the components of $\underline{\underline{R}}$ (if necessary)

The value 0 is given to ISYMPA, which identifies the face as a wall or symmetry face (a face where the mass flux will be set to zero as explained in `inimas`).

• Calculation of the basis vectors

The normal vector \underline{n} is stored in (RNX,RNY,RNZ).

\underline{u}_I is calculated in `CONDLI`, passed *via* `COEFU`, and stored in (UPX,UPY,UPZ).

• Case with $R_{ij} - \varepsilon$

With the $R_{ij} - \varepsilon$ model (ITURB=30 or 31), the vectors \underline{t} and \underline{b} must be calculated explicitly (we use $\underline{\underline{P}}$, not simply \underline{A}). They are stored in (TX,TY,TZ) and (T2X,T2Y,T2Z), respectively.

The transform matrix $\underline{\underline{P}}$ is then calculated and stored in the array `ELOGLO`.

The subroutine `clca66` is then called to calculate the reduced matrix $\underline{\underline{D}}$. It is stored in ALPHA. `clca66` is called with a parameter `CLSYME` which is 1, and which corresponds to the parameter ω of equation [IV.D.15](#).

• Filling the arrays COEFA and COEFB

The arrays COEFA and COEFB are filled following directly equations [IV.D.7](#), [IV.D.22](#) and [IV.D.23](#).

RIJIPB(IFAC,.) corresponds to the vector \underline{S}'_I , computed in `condli`, and passed as an argument to `clsyvt`.

• Filling the arrays COEFAP and COEFBP

If they are defined, the arrays COEFAP and COEFBP are filled. They contain the same values as COEFA and COEFB, respectively.

Annexe A

PROOF OF THE ORTHOGONALITY OF MATRIX $\underline{\underline{A}}$

All the notations used in paragraphe 2 are kept. We have :

$$\begin{aligned}
 ({}^t \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}})_{ij} &= \sum_{k=1}^9 A_{ki} A_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^9 P_{q(k)q(i)} P_{r(k)r(i)} P_{q(k)q(j)} P_{r(k)r(j)}
 \end{aligned} \tag{IV.D.24}$$

When k varies from 1 to 3, $q(k)$ remains equal to 1 and $r(k)$ varies from 1 to 3. We thus have :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 P_{q(k)q(i)} P_{r(k)r(i)} P_{q(k)q(j)} P_{r(k)r(j)} &= P_{1q(i)} P_{1q(j)} \sum_{k=1}^3 P_{r(k)r(i)} P_{r(k)r(j)} \\
&= P_{1q(i)} P_{1q(j)} \sum_{k=1}^3 P_{kr(i)} P_{kr(j)} \quad (\text{IV.D.25}) \\
&= P_{1q(i)} P_{1q(j)} \delta_{r(i)r(j)} \quad (\text{by orthogonality of } \underline{\underline{P}})
\end{aligned}$$

Likewise for k varying from 4 to 6 or from 7 to 9, $q(k)$ being 2 or 3, respectively, we obtain :

$$\begin{aligned}
({}^t \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}})_{ij} &= \sum_{k=1}^9 P_{q(k)q(i)} P_{r(k)r(i)} P_{q(k)q(j)} P_{r(k)r(j)} \\
&= \sum_{k=1}^3 P_{kq(i)} P_{kq(j)} \delta_{r(i)r(j)} \quad (\text{IV.D.26}) \\
&= \delta_{q(i)q(j)} \delta_{r(i)r(j)} \\
&= \delta_{ij} \quad (\text{by the bijectivity of } (q, r))
\end{aligned}$$

Thus ${}^t \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Id}}$. Similarly, it can be shown that $\underline{\underline{A}} \cdot {}^t \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Id}}$. Thus $\underline{\underline{A}}$ is an orthogonal matrix.

Annexe B

CALCULATION OF THE MATRIX $\underline{\underline{D}}$

The relation between the matrices of dimension 9×1 of the components of $\underline{\underline{R}}$ in the coordinate system \mathcal{R} at F and at I' (matrices $\underline{\underline{S}}_F$ and $\underline{\underline{S}}_{I'}$) :

$$\underline{\underline{S}}_F = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{S}}_{I'} \quad (\text{IV.D.27})$$

with

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^9 P_{q(i)q(k)} P_{r(i)r(k)} P_{q(j)q(k)} P_{r(j)r(k)} (\delta_{k1} + \omega \delta_{k3} + \delta_{k5} + \omega \delta_{k7} + \delta_{k9}) \quad (\text{IV.D.28})$$

To transform $\underline{\underline{S}}$ into the matrix 6×1 $\underline{\underline{S}}'$, the function s from $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is defined. It takes the following values :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s(i)$	1	4	5	4	2	6	5	6	3

By construction, we have $S_i = S'_{s(i)}$ for all i between 1 and 9.

To compute D_{ij} , we can choose a value of m to satisfy $s(m) = i$ and sum all the C_{mn} to have $s(n) = j$. The choice of m is irrelevant. We can also compute the sum over all m so that $s(m) = i$ and then divide by the number of such values of m . We will use this method.

We define $N(i)$ the number of integers between 1 and 9 so that $s(m) = i$. According to the preceeding, we thus have

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 168/400
---------	--	---

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{1}{N(i)} \sum_{\substack{s(m)=i \\ s(n)=j}} C_{mn} \\
&= \frac{1}{N(i)} \sum_{\substack{s(m)=i \\ s(n)=j \\ 1 \leq k \leq 9}} P_{q(m)q(k)} P_{r(m)r(k)} P_{q(n)q(k)} P_{r(n)r(k)} (\delta_{k1} + \omega \delta_{k3} + \delta_{k5} + \omega \delta_{k7} + \delta_{k9}) \quad \text{(IV.D.29)}
\end{aligned}$$

• FIRST CASE : $i \leq 3$ and $j \leq 3$

In this case, we have $N(i) = N(j) = 1$. Additionally, if $s(m) = i$ and $s(n) = j$, then $q(m) = r(m) = i$ and $q(n) = r(n) = j$. Thus

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^9 P_{iq(k)} P_{ir(k)} P_{jq(k)} P_{jr(k)} (\delta_{k1} + \omega \delta_{k3} + \delta_{k5} + \omega \delta_{k7} + \delta_{k9}) \quad \text{(IV.D.30)}$$

When k belongs to $\{1, 5, 9\}$, $q(k) = r(k)$ belongs to $\{1, 2, 3\}$. And for $k = 3$ or $k = 7$, $q(k) = 1$ and $r(k) = 3$, or the inverse (and for k even the the sum of Kronecker symbol is zero). Finally we have :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^3 P_{ik}^2 P_{jk}^2 + 2\omega P_{j1} P_{i3} P_{i1} P_{j3} \quad \text{(IV.D.31)}$$

• SECOND CASE : $i \leq 3$ and $j \geq 4$

Again we have $N(i) = 1$, and if $s(m) = i$ then $q(m) = r(m) = i$.

On the contrary, we have $N(j) = 2$, the two possibilities being m_1 and m_2 .

- if $j = 4$, then $m_1 = 2$ and $m_2 = 4$, $q(m_1) = r(m_2) = 1$ and $r(m_1) = q(m_2) = 2$. We then have $m = 1$ and $n = 2$.
- if $j = 5$, then $m_1 = 3$ and $m_2 = 7$, $q(m_1) = r(m_2) = 1$ and $r(m_1) = q(m_2) = 3$. We then have $m = 1$ and $n = 3$.
- if $j = 6$, then $m_1 = 6$ and $m_2 = 8$, $q(m_1) = r(m_2) = 2$ and $r(m_1) = q(m_2) = 3$. We then have $m = 2$ and $n = 3$.

And we have :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^9 P_{iq(k)} P_{ir(k)} [P_{mq(k)} P_{nr(k)} + P_{nq(k)} P_{mr(k)}] (\delta_{k1} + \omega \delta_{k3} + \delta_{k5} + \omega \delta_{k7} + \delta_{k9}) \quad \text{(IV.D.32)}$$

But when k is in $\{1, 5, 9\}$, $q(k) = r(k)$ is in $\{1, 2, 3\}$. Thus :

$$D_{ij} = 2 \sum_{k=1}^3 P_{ik}^2 P_{mk} P_{nk} + \omega \sum_{k=1}^9 P_{iq(k)} P_{ir(k)} [P_{mq(k)} P_{nr(k)} + P_{nq(k)} P_{mr(k)}] (\delta_{k3} + \delta_{k7}) \quad \text{(IV.D.33)}$$

And for $k = 3$ or $k = 7$, $q(k) = 1$ and $r(k) = 3$, or the opposite. We finally have :

$$D_{ij} = 2 \left[\sum_{k=1}^3 P_{ik}^2 P_{mk} P_{nk} + \omega P_{i1} P_{i3} (P_{m1} P_{n3} + P_{n1} P_{m3}) \right] \quad \text{(IV.D.34)}$$

with $(m, n) = (1, 2)$ if $j = 4$, $(m, n) = (1, 3)$ if $j = 5$ and $(m, n) = (2, 3)$ if $j = 6$.

• **THIRD CASE** : $i \geq 4$ and $j \leq 3$

By symmetry of $\underline{\underline{C}}$, we obtain a result which is the symmetric of the second case, except that $N(i)$ is now 2. Thus :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^3 P_{jk}^2 P_{mk} P_{nk} + \omega P_{j1} P_{j3} (P_{m1} P_{n3} + P_{n1} P_{m3}) \quad (\text{IV.D.35})$$

with $(m, n) = (1, 2)$ if $i = 4$, $(m, n) = (1, 3)$ if $i = 5$ and $(m, n) = (2, 3)$ if $i = 6$.

• **FOURTH CASE** : $i \geq 4$ and $j \geq 4$

Then $N(i) = N(j) = 2$.

We have $(m, n) = (1, 2)$ if $i = 4$, $(m, n) = (1, 3)$ if $i = 5$ and $(m, n) = (2, 3)$ if $i = 6$. Likewise we define m' and n' as a function of j . We then obtain :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 (P_{mq(k)} P_{nr(k)} + P_{nq(k)} P_{mr(k)}) (P_{m'q(k)} P_{n'r(k)} + P_{n'q(k)} P_{m'r(k)}) \\ &\quad \times (\delta_{k1} + \omega \delta_{k3} + \delta_{k5} + \omega \delta_{k7} + \delta_{k9}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^3 4 P_{mk} P_{nk} P_{m'k} P_{n'k} + 2\omega (P_{m1} P_{n3} + P_{n1} P_{m3}) (P_{m'1} P_{n'3} + P_{n'1} P_{m'3}) \right] \quad (\text{IV.D.36}) \end{aligned}$$

and finally :

$$D_{ij} = 2 \sum_{k=1}^3 P_{mk} P_{nk} P_{m'k} P_{n'k} + \omega (P_{m1} P_{n3} + P_{n1} P_{m3}) (P_{m'1} P_{n'3} + P_{n'1} P_{m'3}) \quad (\text{IV.D.37})$$

with $(m, n) = (1, 2)$ if $i = 4$, $(m, n) = (1, 3)$ if $i = 5$ and $(m, n) = (2, 3)$ if $i = 6$
and $(m', n') = (1, 2)$ if $j = 4$, $(m', n') = (1, 3)$ if $j = 5$ and $(m', n') = (2, 3)$ if $j = 6$.

E- codits routine

Fonction

Ce sous-programme, appelé entre autre par `predvv`, `turbke`, `covofi`, `resrij`, `reseps`, ..., résout les équations de convection-diffusion d'un scalaire a avec termes sources du type :

$$\begin{aligned}
 & f_s^{imp}(a^{n+1} - a^n) + \theta \underbrace{\operatorname{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1})}_{\text{convection implicite}} - \theta \underbrace{\operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1})}_{\text{diffusion implicite}} \\
 & = f_s^{exp} - (1 - \theta) \underbrace{\operatorname{div}((\rho \underline{u}) a^n)}_{\text{convection explicite}} + (1 - \theta) \underbrace{\operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a^n)}_{\text{diffusion explicite}}
 \end{aligned} \tag{IV.E.1}$$

où $\rho \underline{u}$, f_s^{exp} et f_s^{imp} désignent respectivement le flux de masse, les termes sources explicites et les termes linéarisés en a^{n+1} . a est un scalaire défini sur toutes les cellules¹. Par souci de clarté on suppose, en l'absence d'indication, les propriétés physiques Φ (viscosité totale μ_{tot}, \dots) et le flux de masse ($\rho \underline{u}$) pris respectivement aux instants $n + \theta_\Phi$ et $n + \theta_F$, où θ_Φ et θ_F dépendent des schémas en temps spécifiquement utilisés pour ces grandeurs².

L'écriture des termes de convection et diffusion en maillage non orthogonal engendre des difficultés (termes de reconstruction et test de pente) qui sont contournées en utilisant une méthode itérative dont la limite, si elle existe, est la solution de l'équation précédente.

Discrétisation

Afin d'expliquer la procédure utilisée pour traiter les difficultés dues aux termes de reconstruction et de test de pente dans les termes de convection-diffusion, on note, de façon analogue à ce qui est défini dans `navstv` mais sans discrétisation spatiale associée, \mathcal{E}_n l'opérateur :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_n(a) &= f_s^{imp} a + \theta \operatorname{div}((\rho \underline{u}) a) - \theta \operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a) \\
 &- f_s^{exp} - f_s^{imp} a^n + (1 - \theta) \operatorname{div}((\rho \underline{u}) a^n) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a^n)
 \end{aligned} \tag{IV.E.2}$$

L'équation (IV.E.1) s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_n(a^{n+1}) = 0 \tag{IV.E.3}$$

La quantité $\mathcal{E}_n(a^{n+1})$ comprend donc :

- $\rightsquigarrow f_s^{imp} a^{n+1}$, contribution des termes différentiels d'ordre 0 linéaire en a^{n+1} ,
- $\rightsquigarrow \theta \operatorname{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1}) - \theta \operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1})$, termes de convection-diffusion implicites complets (termes non reconstruits + termes de reconstruction) linéaires³ en a^{n+1} ,
- $\rightsquigarrow f_s^{exp} - f_s^{imp} a^n$ et $(1 - \theta) \operatorname{div}((\rho \underline{u}) a^n) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\mu_{tot} \nabla a^n)$ l'ensemble des termes explicites (y compris la partie explicite provenant du schéma en temps appliqué à la convection diffusion).

De même, on introduit un opérateur \mathcal{EM}_n approché de \mathcal{E}_n , linéaire et simplement inversible, tel que son expression contient :

- \rightsquigarrow la prise en compte des termes linéaires en a ,

¹ a , sous forme discrète en espace, correspond à un vecteur dimensionné à NCELET de composante a_I , I décrivant l'ensemble des cellules.

²cf. `introd`

³Lors de la discrétisation en espace, le caractère linéaire de ces termes pourra cependant être perdu, notamment à cause du test de pente.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 171/400
---------	--	---

\rightsquigarrow la convection intégrée par un schéma décentré amont (upwind) du premier ordre en espace,
 \rightsquigarrow les flux diffusifs non reconstruits.

$$\mathcal{EM}_n(a) = f_s^{imp} a + \theta [\text{div}((\rho \underline{u})a)]^{amont} - \theta [\text{div}(\mu_{tot} \nabla a)]^{N Rec} \quad (\text{IV.E.4})$$

Cet opérateur permet donc de contourner la difficulté induite par la présence d'éventuelles non linéarités introduites par l'activation du test de pente lors du schéma convectif, et par le remplissage important de la structure de la matrice découlant de la présence des gradients propres à la reconstruction.

On a la relation⁴, pour toute cellule Ω_I de centre I :

$$\mathcal{EM}_{disc}(a, I) = \int_{\Omega_i} \mathcal{EM}_n(a) d\Omega$$

On cherche à résoudre :

$$0 = \mathcal{E}_n(a^{n+1}) = \mathcal{EM}_n(a^{n+1}) + \mathcal{E}_n(a^{n+1}) - \mathcal{EM}_n(a^{n+1}) \quad (\text{IV.E.5})$$

Soit :

$$\mathcal{EM}_n(a^{n+1}) = \mathcal{EM}_n(a^{n+1}) - \mathcal{E}_n(a^{n+1}) \quad (\text{IV.E.6})$$

On va pour cela utiliser un algorithme de type point fixe en définissant la suite $(a^{n+1, k})_{k \in \mathbb{N}}$ ⁵:

$$\begin{cases} a^{n+1, 0} = a^n \\ a^{n+1, k+1} = a^{n+1, k} + \delta a^{n+1, k+1} \end{cases}$$

où $\delta a^{n+1, k+1}$ est solution de :

$$\mathcal{EM}_n(a^{n+1, k} + \delta a^{n+1, k+1}) = \mathcal{EM}_n(a^{n+1, k}) - \mathcal{E}_n(a^{n+1, k}) \quad (\text{IV.E.7})$$

Soit encore, par linéarité de \mathcal{EM}_n :

$$\mathcal{EM}_n(\delta a^{n+1, k+1}) = -\mathcal{E}_n(a^{n+1, k}) \quad (\text{IV.E.8})$$

Cette suite, couplée avec le choix de l'opérateur \mathcal{E}_n , permet donc de lever la difficulté induite par la présence de la convection (discrétisée à l'aide de schémas numériques qui peuvent introduire des non linéarités) et les termes de reconstruction. Le schéma réellement choisi par l'utilisateur pour la convection (donc éventuellement non linéaire si le test de pente est activé) ainsi que les termes de reconstruction vont être pris à l'itération k et traités au second membre *via* le sous-programme **bilsc2**, alors que les termes non reconstruits sont pris à l'itération $k+1$ et représentent donc les inconnues du système linéaire résolu par **codits**⁶.

On suppose de plus que cette suite $(a^{n+1, k})_k$ converge vers la solution a^{n+1} de l'équation (IV.E.2), i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta a^{n+1, k} = 0$, ceci pour tout n donné.

(IV.E.8) correspond à l'équation résolue par **codits**. La matrice \underline{EM}_n , matrice associée à \mathcal{EM}_n est à inverser, les termes non linéaires sont mis au second membre mais sous forme explicite (indice k de $a^{n+1, k}$) et ne posent donc plus de problème.

REMARQUE 1

La viscosité μ_{tot} prise dans \mathcal{EM}_n et dans \mathcal{E}_n dépend du modèle de turbulence utilisé. Ainsi on a $\mu_{tot} = \mu_{laminaire} + \mu_{turbulent}$ dans \mathcal{EM}_n et dans \mathcal{E}_n sauf lorsque l'on utilise un modèle $R_{ij} - \varepsilon$, auquel cas on a $\mu_{tot} = \mu_{laminaire}$.

⁴On pourra se reporter au sous-programme **matrix** pour plus de détails relativement à \mathcal{EM}_{disc} , opérateur discret agissant sur un scalaire a .

⁵Dans le cas où le point fixe en vitesse-pressure est utilisé (**NTERUP** > 1) $a^{n+1, 0}$ est initialisé par la dernière valeur obtenue de a^{n+1} .

⁶cf. le sous-programme **navstv**.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 172/400
---------	--	---

Le choix de \mathcal{EM}_n étant *a priori* arbitraire (\mathcal{EM}_n doit être linéaire et la suite $(a^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ doit converger pour tout n donné), une option des modèles $R_{ij} - \varepsilon$ (IRIJNU = 1) consiste à forcer μ_{tot}^n dans l'expression de \mathcal{EM}_n à la valeur $\mu_{laminaire}^n + \mu_{turbulent}^n$ lors de l'appel à **codits** dans le sous-programme **navstv**, pour l'étape de prédiction de la vitesse. Ceci n'a pas de sens physique (seul $\mu_{laminaire}^n$ étant censé intervenir), mais cela peut dans certains cas avoir un effet stabilisateur, sans que cela modifie pour autant les valeurs de la limite de la suite $(a^{n+1,k})_k$.

REMARQUE 2

Quand **codits** est utilisé pour le couplage instationnaire renforcé vitesse-pression (IPUCOU=1), on fait une seule itération k en initialisant la suite $(a^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ à zéro. Les conditions de type Dirichlet sont annulées (on a INC = 0) et le second membre est égal à $\rho|\Omega_i|$. Ce qui permet d'obtenir une approximation de type diagonal de $\underline{\underline{EM}}_n$ nécessaire lors de l'étape de correction de la vitesse⁷.

Mise en œuvre

L'algorithme de ce sous-programme est le suivant :

- détermination des propriétés de la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$ (symétrique si pas de convection, non symétrique sinon)
- choix automatique de la méthode de résolution pour l'inverser si l'utilisateur ne l'a pas spécifié pour la variable traitée. La méthode de Jacobi est utilisée par défaut pour toute variable scalaire a convectée. Les méthodes disponibles sont la méthode du gradient conjugué, celle de Jacobi, et le bi-gradient conjugué stabilisé (*BICGStab*) pour les matrices non symétriques. Un préconditionnement diagonal est possible et utilisé par défaut pour tous ces solveurs excepté Jacobi.
- prise en compte de la périodicité (translation ou rotation d'un scalaire, vecteur ou tenseur),
- construction de la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$ correspondant à l'opérateur linéaire \mathcal{EM}_n par appel au sous-programme **matrix**⁸. Les termes implicites correspondant à la partie diagonale de la matrice et donc aux contributions différentielles d'ordre 0 linéaires en a^{n+1} , (*i.e* f_s^{imp}), sont stockés dans le tableau **ROVSDT** (réalisé en amont du sous-programme appelant **codits**).
- création de la hiérarchie de maillage si on utilise le multigrille (IMGRP > 0).
- appel à **bilsc2** pour une éventuelle prise en compte de la convection-diffusion explicite lorsque $\theta \neq 0$.
- boucle sur le nombre d'itérations de 1 à **NSWRSM** (appelé **NSWRSP** dans **codits**). Les itérations sont représentées par k appelé **ISWEEP** dans le code et définissent les indices de la suite $(a^{n+1,k})_k$ et de $(\delta a^{n+1,k})_k$.

Le second membre est scindé en deux parties :

- un terme, affine en $a^{n+1,k-1}$, facile à mettre à jour dans le cadre de la résolution par incrément, et qui s'écrit :

$$- f_s^{imp} (a^{n+1,k-1} - a^{n+1,0}) + f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1,0}) - \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1,0})]$$

- les termes issus de la convection/diffusion (avec reconstruction) calculée par **bilsc2**.

$$- \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1,k-1}) - \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1,k-1})]$$

La boucle en k est alors la suivante :

- Calcul du second membre, hors contribution des termes de convection-diffusion explicite **SMBINI**;
le second membre complet correspondant à $\mathcal{E}_n(a^{n+1,k-1})$ est, quant à lui, stocké dans le tableau

⁷cf. le sous-programme **resopv**.

⁸On rappelle que dans **matrix**, la convection est traitée, quelque soit le choix de l'utilisateur, avec un schéma décentré amont d'ordre 1 en espace et qu'il n'y a pas de reconstruction pour la diffusion. Le choix de l'utilisateur quant au schéma numérique pour la convection intervient uniquement lors de l'intégration des termes de convection de \mathcal{E}_n , au second membre de (IV.E.8) dans le sous-programme **bilsc2**.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 173/400
---------	--	---

SMBRP, initialisé par SMBINI et complété par les termes reconstruits de convection-diffusion par appel au sous-programme **bilsc2**.

À l'itération k , SMBINI noté SMBINI^k vaut :

$$\text{SMBINI}^k = f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^n)] - f_s^{imp} (a^{n+1, k-1} - a^n)$$

- Avant de boucler sur k , un premier appel au sous-programme **bilsc2** avec $\text{THETAP} = 1 - \theta$ permet de prendre en compte la partie explicite des termes de convection-diffusion provenant du schéma en temps.

$$\text{SMBRP}^0 = f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^n)]$$

Avant de boucler sur k , le second membre SMBRP^0 est stocké dans le tableau SMBINI^0 et sert pour l'initialisation du reste du calcul.

$$\text{SMBINI}^0 = \text{SMBRP}^0$$

- pour $k = 1$,

$$\begin{aligned} \text{SMBINI}^1 &= f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^n)] - f_s^{imp} (a^{n+1, 0} - a^n) \\ &= f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1, 0}) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^{n+1, 0})] - f_s^{imp} \delta a^{n+1, 0} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{SMBINI}^1 = \text{SMBINI}^0 - \text{ROVSDT} * (\text{PVAR} - \text{PVARA})$$

et SMBRP^1 est complété par un second appel au sous-programme **bilsc2** avec $\text{THETAP} = \theta$, de manière à ajouter dans le second membre la partie de la convection-diffusion implicite.

$$\begin{aligned} \text{SMBRP}^1 &= \text{SMBINI}^1 - \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1, 0}) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^{n+1, 0})] \\ &= f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^n)] - f_s^{imp} (a^{n+1, 0} - a^n) \\ &\quad - \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1, 0}) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^{n+1, 0})] \end{aligned}$$

- pour $k = 2$,

de façon analogue, on obtient :

$$\text{SMBINI}^2 = f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^n)] - f_s^{imp} (a^{n+1, 1} - a^n)$$

Soit :

$$\text{SMBINI}^2 = \text{SMBINI}^1 - \text{ROVSDT} * \text{DPVAR}^1$$

l'appel au sous-programme **bilsc2**, étant systématiquement fait par la suite avec $\text{THETAP} = \theta$, on obtient de même :

$$\text{SMBRP}^2 = \text{SMBINI}^2 - \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1, 1}) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\nabla} a^{n+1, 1})]$$

où

$$a^{n+1, 1} = \text{PVAR}^1 = \text{PVAR}^0 + \text{DPVAR}^1 = a^{n+1, 0} + \delta a^{n+1, 1}$$

- pour l'itération $k + 1$,

Le tableau SMBINI^{k+1} initialise le second membre complet SMBRP^{k+1} auquel vont être rajoutées les contributions convectives et diffusives *via* le sous-programme **bilsc2**.

on a la formule :

$$\text{SMBINI}^{k+1} = \text{SMBINI}^k - \text{ROVSDT} * \text{DPVAR}^k$$

Puis suit le calcul et l'ajout des termes de convection-diffusion reconstruits de $-\mathcal{E}_n(a^{n+1, k})$, par appel au sous-programme **bilsc2**. On rappelle que la convection est prise en compte à cette étape par le schéma numérique choisi par l'utilisateur (schéma décentré amont du premier ordre en espace, schéma centré du second ordre en espace, schéma décentré amont du second ordre S.O.L.U. ou une pondération (blending) des schémas dits du second ordre (centré ou S.O.L.U.).

avec le schéma amont du premier ordre, utilisation éventuelle d'un test de pente).

Cette contribution (convection-diffusion) est alors ajoutée dans le second membre SMBRP^{k+1} (initialisé par SMBINI^{k+1}).

$$\begin{aligned}\text{SMBRP}^{k+1} &= \text{SMBINI}^{k+1} - \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1,k}) - \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1,k})] \\ &= f_s^{exp} - (1 - \theta) [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n) - \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^n)] - f_s^{imp}(a^{n+1,k} - a^n) \\ &\quad - \theta [\text{div}((\rho \underline{u}) a^{n+1,k}) - \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^{n+1,k})]\end{aligned}$$

- Résolution du système linéaire en $\delta a^{n+1,k+1}$ correspondant à l'équation (IV.E.8) par inversion de la matrice \underline{EM}_n , en appelant le sous programme **invers**. On calcule $a^{n+1,k+1}$ grâce à la formule :

$$a^{n+1,k+1} = a^{n+1,k} + \delta a^{n+1,k+1}$$

Soit :

$$\text{PVAR}^{k+1} = \text{PVAR}^k + \text{DPVAR}^{k+1}$$

- Traitement de la périodicité et du parallélisme.

- Test de convergence :

Il porte sur la quantité $\|\text{SMBRP}^{k+1}\| < \varepsilon \|\underline{EM}_n(a^n) + \text{SMBRP}^1\|$, où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne. Si le test est vérifié, la convergence est atteinte et on sort de la boucle sur les itérations. La solution recherchée est $a^{n+1} = a^{n+1,k+1}$.

Sinon, on continue d'itérer dans la limite des itérations imposées par **NSWRSM** dans **usini1**.

En "continu" ce test de convergence s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\|\text{SMBRP}^{k+1}\| &< \varepsilon \|f_s^{exp} - \text{div}((\rho \underline{u}) a^n) + \text{div}(\mu_{tot} \nabla a^n) \\ &\quad + [\text{div}((\rho \underline{u}) a^n)]^{amont} + [\text{div}(\mu_{tot} \nabla a^n)]^{N_{Rec}}\|\end{aligned}$$

Si bien que sur maillage orthogonal avec schéma de convection upwind et en l'absence de terme source, la suite converge en théorie en une unique itération puisque par construction :

$$\|\text{SMBRP}^2\| = 0 < \varepsilon \|f_s^{exp}\|$$

Fin de la boucle.

Points à traiter

• Approximation \mathcal{EM}_n de l'opérateur \mathcal{E}_n

D'autres approches visant soit à modifier la définition de l'approximée, prise en compte du schéma centré sans reconstruction par exemple, soit à abandonner cette voie seraient à étudier.

• Test de convergence

La quantité définissant le test de convergence est également à revoir, éventuellement à simplifier.

• Prise en compte de T_s^{imp}

Lors de la résolution de l'équation par **codits**, le tableau **ROVSDT** a deux fonctions : il sert à calculer la diagonale de la matrice (par appel de **matrix**) et il sert à mettre à jour le second membre à chaque sous-itération de la résolution en incréments. Or, dans le cas où T_s^{imp} est positif, on ne l'intègre pas dans **ROVSDT**, afin de ne pas affaiblir la diagonale de la matrice. De ce fait, on ne l'utilise pas pour mettre à jour le second membre, alors que ce serait tout à fait possible. Au final, on obtient donc un terme source traité totalement en explicite ($T_s^{exp} + T_s^{imp} a^n$), alors que la résolution en incréments nous permettrait justement de l'impliciter quasiment totalement ($T_s^{exp} + T_s^{imp} a^{n+1,k_{fin}-1}$, où k_{fin} est la dernière sous-itération effectuée).

Pour ce faire, il faudrait définir deux tableaux **ROVSDT** dans **codits**.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 175/ 400
---------	--	---

F- condli routine

Function

Boundary conditions are required in at least three principal cases :

- calculation of the convection terms (first order derivative in space) at the boundary : the calculation uses a flux at the boundary and requires the value of the convected variable at the boundary when the latter is entering the domain in the sens of the characteristic curves of the system (in the sens of the velocity, in the case of the single equation of a simple scalar : sufficient interpretation in the current framework of *Code_Saturne*¹) ;
- calculation of the diffusion terms (second order derivative in space) : a method to determine the value of the first order spatial derivatives at the boundary is then required (more exactly, the terms that depend upon it are required, such as the stresses of the thermal fluxes at the wall) ;
- calculation of the cell gradients : the variable at the boundary faces are required (more generally, the discrete terms of the equations which depend upon the gradient inside boundary cells are required, such as the transpose gradient terms in the Navier-Stokes equations).

These considerations only concern the computational variables (velocity, pressure, Reynolds tensor, scalars solution of a convection-diffusion equation). For these variables ², the user has to define the boundary conditions at every boundary face (`usclim`).

The subroutine `condli` transforms the data provided by the user (in `usclim`) into an internal format of representation of the boundary conditions. Verifications of the completeness and coherence are also performed (in `vericl`). More particularly, the smooth-wall boundary conditions (`clptur`), the rough-wall boundary conditions (`clptrg`) and the symmetry boundary conditions for the velocities and the Reynolds stress tensor (`clsyvt`) are treated in dedicated subroutines.

The subroutine `condli` provides as an output pairs of coefficients A_b and B_b for each variable f and for each boundary face. These are used for the calculation of the discrete terms in the equations to be solved. More specifically, these coefficients are used to calculate a value at the boundary faces $f_{b,int}$ (localised at the centre of the boundary face, barycentre of its vertices) by the relation $f_{b,int} = A_b + B_b f_{I'}$, where $f_{I'}$ is the value of the variable at point I' . I' is the projection onto the centre of the cell adjoin to the boundary on the line normal to the boundary face and passing by its centre (see figure IV.F.1).

Discretisation

• Notation

On désignera dans la suite par *VarScalaire* toute variable

- autre que la vitesse, la pression, les grandeurs turbulentes k , ε , R_{ij} , φ , \bar{f} et ω ,
- solution d'une équation de convection-diffusion.

¹except with the compressible module, see. `cfxtcl`

²The other variables (the physical properties for instance) have a different treatment which will not be detailed here (for instance, for the density, the user defines directly the values at the boundary. This information is then stored ; one is referred to `usphyv` or `phyvar` for more information).

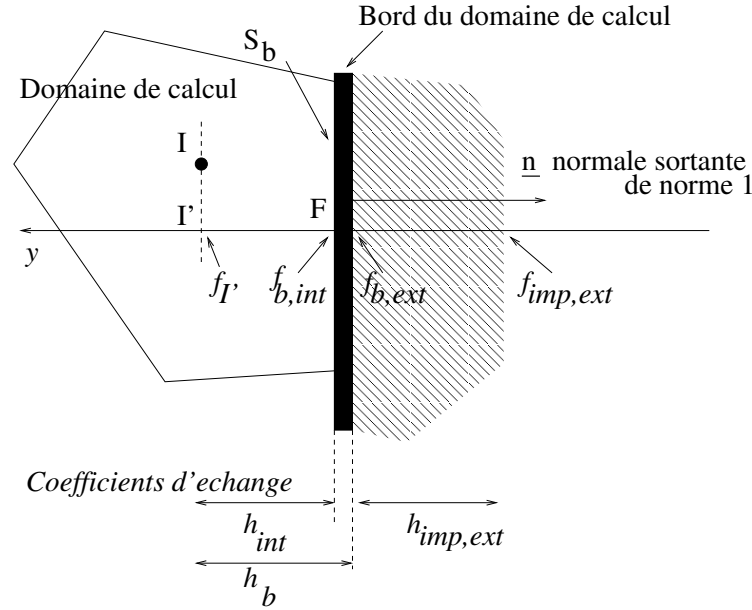


Figure IV.F.1: Boundary cell.

La dénomination *VarScalaire* pourra en particulier désigner la température, un scalaire passif, une fraction massique ou (sauf mention contraire explicite) la variance des fluctuations d'une autre *VarScalaire*. Les variables d'état déduites (masse volumique, viscosité...) ne seront pas désignées par *VarScalaire*.

• Représentation des conditions aux limites standard dans `usclim`

Des conditions aux limites standardisées peuvent être fournies par l'utilisateur dans `usclim`. Il est pour cela nécessaire d'affecter un type aux faces de bord des cellules concernées³. Les conditions prévues par défaut sont les suivantes :

- **Entrée** : correspond à une condition de Dirichlet sur toutes les variables transportées (vitesse, variables turbulentes, *VarScalaire*s...), et à une condition de Neumann homogène (flux nul) sur la pression.
- **Sortie** :
 - lorsque le flux de masse est effectivement dirigé vers l'extérieur du domaine, ce choix correspond à une condition de Neumann homogène sur toutes les variables transportées et à $\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \tau_i} = 0$, pris en compte sous forme de Dirichlet pour la pression (\underline{n} et $(\tau_i)_{i \in \{1,2\}}$ désignent respectivement le vecteur normal de la face de sortie considérée et deux vecteurs normés, orthogonaux entre eux et dans le plan de la face de sortie). Cette condition est appliquée de manière explicite en utilisant le champ de pression et son gradient au pas de temps précédent. En outre, la pression étant définie à une constante près, elle est recalée en un point de sortie pour y conserver la valeur P_0 (on évite ainsi toute dérive vers des valeurs très grandes relativement à l'écart maximal de pression sur le domaine)⁴.
 - lorsque le flux de masse est dirigé vers l'intérieur du domaine, situation peu souhaitable *a priori*⁵, on impose une condition de Dirichlet homogène sur la vitesse (pas sur le flux de masse), à défaut de connaître sa valeur en aval du domaine. La pression est traitée comme

³L'affectation d'un type se fait en renseignant le tableau `ITYPFB`.

⁴Lorsqu'il n'y a pas de sortie, le spectre des valeurs propres de la matrice est décalé d'une valeur constante afin de rendre le système inversible : voir `matrix`.

⁵Un message indique à l'utilisateur combien de faces de sortie voient un flux de masse entrer dans le domaine.

dans le cas précédent où le flux de masse est dirigé vers l'extérieur du domaine. Pour les variables autres que la vitesse et la pression, deux cas se présentent :

- on peut imposer une condition de Dirichlet pour représenter la valeur du scalaire introduit dans le domaine par les faces de bord concernées.
 - on peut imposer, comme lorsque le flux de masse est sortant, une condition de Neumann homogène (ceci n'est pas une situation souhaitable, puisque l'information portée sur les faces de bord provient alors de *l'aval* de l'écoulement local). C'est le cas par défaut si l'on ne donne pas de valeur pour le Dirichlet.
- **Paroi** : on se reportera à `clptur` (ou à `clptrg` pour les parois rugueuses) pour une description du traitement des conditions aux limites de paroi (supposées imperméables au fluide). Brièvement, on peut dire ici qu'une approche par lois de paroi est utilisée afin d'imposer la contrainte tangentielle sur la vitesse. La paroi peut être défilante⁶. Les *VarScalaire*s reçoivent par défaut une condition de Neumann homogène (flux nul). Si l'on souhaite imposer une valeur en paroi pour ces variables (par exemple, dans le cas d'une paroi à température imposée) une loi de similitude est utilisée pour déterminer le flux au bord en tenant compte de la couche limite. Dans le cas des couplages avec SYRTHES, *Code_Saturne* reçoit une température de paroi et fournit un flux thermique. La condition de pression standard est une condition de Neumann homogène⁷.
 - **Symétrie** : correspond à des conditions de Neumann homogènes pour les grandeurs scalaires et à des conditions de symétrie classiques pour les vecteurs (vitesse) et les tenseurs (tensions de Reynolds) : voir `clsyvt`.

⁶On doit alors fournir les composantes de la vitesse de la paroi.

⁷On pourra se reporter à `gradrc` pour la condition conduisant à l'extrapolation de la pression au bord, condition pilotable par l'utilisation de la variable `EXTRAP`.

• Représentation des conditions aux limites spécifiques dans `usclim`

On a vu que l'affectation à une face de bord d'un type standard (entrée, sortie, paroi, symétrie) permettait d'appliquer simplement à l'ensemble des variables un assortiment de conditions aux limites cohérentes entre elles pour les types usuels de frontière physique.

Une solution consiste à définir dans `usclim`, pour chaque face de bord et chaque variable, des conditions aux limites spécifiques⁸ (celles-ci, comme les conditions standards, se ramènent finalement à des conditions de type mixte).

Les deux approches ne sont pas nécessairement incompatibles et peuvent même se révéler complémentaires. En effet, les conditions aux limites standards peuvent être surchargées par l'utilisateur pour une ou plusieurs variables données. Il convient cependant de s'assurer que, d'une façon ou d'une autre, une condition à la limite a été définie pour chaque face de bord et chaque variable.

Des conditions de compatibilité existent également entre les différentes variables (voir `vericl`):

- en entrée, paroi, symétrie ou sortie libre, il est important que toutes les composantes de la vitesse aient le même type de condition ;
- lorsque la vitesse reçoit une condition de sortie, il est important que la pression reçoive une condition de type Dirichlet. Pour plus de détails, on se reportera au paragraphe relatif à la condition de sortie pour la pression, page [181](#) ;
- lorsqu'une des variables de vitesse ou de turbulence reçoit une condition de paroi, il doit en être de même pour toutes ;
- lorsqu'une des composantes R_{ij} reçoit une condition de symétrie, il doit en être de même pour toutes ;
- lorsqu'une *VarScalaire* reçoit une condition de paroi, la vitesse doit avoir le même type de condition.

⁸Les conditions aux limites spécifiques sont codées en renseignant directement les tableaux `ICODCL` et `RCODCL` pour chaque face de bord et chaque variable : des exemples sont fournis dans `usclim`.

• Représentation interne des conditions aux limites

Objectif

Les conditions fournies par l'utilisateur sont retraduites sous forme de couples de coefficients A_b et B_b pour chaque variable f et chaque face de bord. Ces coefficients sont utilisés pour le calcul des termes discrets intervenant dans les équations à résoudre et permettent en particulier de déterminer une valeur de face de bord $f_{b,int}$. Il est important d'insister dès à présent sur le fait que cette valeur est, de manière générale, une simple valeur numérique qui ne reflète pas nécessairement une réalité physique (en particulier aux parois, pour les grandeurs affectées par la couche limite turbulente). On détaille ci-dessous le calcul de A_b , B_b et de $f_{b,int}$.

Notations

- On considère l'équation (IV.F.1) portant sur le scalaire f , dans laquelle ρ représente la masse volumique, \underline{u} la vitesse, α la conductivité et S les termes sources additionnels. C est défini plus bas.

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u} f) = \text{div} \left(\frac{\alpha}{C} \nabla f \right) + S \quad (\text{IV.F.1})$$

- Le coefficient α représente la somme des conductivités moléculaire et turbulente (selon les modèles utilisés), soit $\alpha = \alpha_m + \alpha_t$, avec, pour une modélisation de type viscosité turbulente, $\alpha_t = C \frac{\mu_t}{\sigma_t}$, où σ_t est le nombre de Prandtl turbulent⁹.
- Le coefficient C_p représente la chaleur spécifique, d'unité $m^2 s^{-2} K^{-1} = J kg^{-1} K^{-1}$.
- On note λ la conductivité thermique, d'unité $kg m s^{-3} K^{-1} = W m^{-1} K^{-1}$.
- Il convient de préciser que $C = 1$ pour toutes les variables hormis pour la température, cas dans lequel on a¹⁰ $C = C_p$. Dans le code, c'est la valeur de $\frac{\alpha_m}{C}$ que l'utilisateur doit fournir (si la propriété est constante, les valeurs sont affectées dans `usini1` à `VISCL0` pour la vitesse et à `VISLS0` pour les *VarScalaire*s ; si la propriété est variable, ce sont des tableaux équivalents qui doivent être renseignés dans `usphyv`).
- Pour la variance des fluctuations d'une *VarScalaire*, la conductivité α et le coefficient C sont hérités de la *VarScalaire* associée.

Condition de type Dirichlet simple : lorsque la condition est une condition de Dirichlet simple, on obtient naturellement (cas particulier de (IV.F.6)) :

$$\underbrace{f_{b,int}}_{\text{valeur de bord utilisée par le calcul}} = \underbrace{f_{réel}}_{\text{valeur réelle imposée au bord}} \quad (\text{IV.F.2})$$

Autres cas : lorsque la condition à la limite porte sur la donnée d'un flux, il s'agit d'un flux diffusif¹¹. On a alors :

$$\underbrace{\phi_{int}}_{\text{flux diffusif transmis au domaine interne}} = \underbrace{\phi_{réel}}_{\text{flux diffusif réel imposé au bord}} \quad (\text{IV.F.3})$$

⁹Le nombre de Prandtl turbulent est sans dimension et, dans certains cas usuels, pris égal à 0,7.

¹⁰Plus exactement, on a $C = C_p$ pour toutes les *VarScalaire*s f que l'on souhaite traiter comme la température pour les conditions aux limites. Ces *VarScalaire*s sont repérables par l'utilisateur au moyen de l'indicateur `ISCSTH=1`. Par défaut cet indicateur est positionné à la valeur 0 pour toutes les *VarScalaire*s (qui sont alors traitées comme des scalaires passifs avec $C = 1$) hormis pour la variable thermique éventuelle (`ISCALT`^{ième} *VarScalaire*), pour laquelle on a `ISCSTH=1` : on suppose par défaut que la variable thermique est la température et non l'enthalpie. Si l'on souhaite résoudre en enthalpie, il faut positionner `ISCSTH` à la valeur 2 pour la variable thermique. Pour le compressible, la variable thermique est l'énergie, identifiée par `ISCSTH=3`. On se reportera à `cfxtcl` pour le traitement des conditions aux limites.

¹¹En effet, le flux total sortant du domaine est donné par la somme du flux convectif (si la variable est effectivement convectée) et du flux diffusif. Néanmoins, pour les parois étanches et les symétries, le flux de masse est nul et la condition se réduit à une contrainte sur le flux diffusif. De plus, pour les sorties (flux de masse sortant), la condition à la limite ne porte que sur le flux diffusif (souvent une condition de Neumann homogène), le flux convectif dépendant des conditions amont (il n'a donc pas besoin de condition à la limite). Enfin, aux entrées, c'est le plus souvent une condition de Dirichlet simple qui est appliquée et le flux diffusif s'en déduit.

Le flux diffusif réel imposé peut être donné

- directement (condition de Neumann), soit $\phi_{réel} = \phi_{imp,ext}$ ou
- déduit implicitement de deux informations imposées : une valeur externe $f_{imp,ext}$ et un coefficient d'échange $h_{imp,ext}$ (condition de Dirichlet généralisée).

Selon le type de condition (Dirichlet ou Neumann) et en prenant pour hypothèse la conservation du flux dans la direction normale au bord, on peut alors écrire (voir figure IV.F.1) :

$$\underbrace{h_{int}(f_{b,int} - f_{I'})}_{\phi_{int}} = \underbrace{h_b(f_{b,ext} - f_{I'})}_{\phi_b} = \begin{cases} \underbrace{h_{imp,ext}(f_{imp,ext} - f_{b,ext})}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (IV.F.4)$$

Le rapport entre le coefficient h_b et le coefficient h_{int} rend compte de l'importance de la traversée de la zone proche du bord et revêt une importance particulière dans le cas des parois le long desquelles se développe une couche limite (dont les propriétés sont alors prises en compte par h_b : se reporter à `clptur`). Dans le cadre plus simple considéré ici, on se limitera au cas $h_b = h_{int}$ et $f_{b,ext} = f_{b,int} = f_b$. La relation (IV.F.4) s'écrit alors :

$$\underbrace{h_{int}(f_b - f_{I'})}_{\phi_{int}} = \begin{cases} \underbrace{h_{imp,ext}(f_{imp,ext} - f_b)}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{réel\ imposé}} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (IV.F.5)$$

En réarrangeant, on obtient la valeur de bord :

$$f_b = \begin{cases} \frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_{imp,ext}} f_{imp,ext} + \frac{h_{int}}{h_{int} + h_{imp,ext}} f_{I'} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \frac{1}{h_{int}} \phi_{imp,ext} + f_{I'} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (IV.F.6)$$

Conclusion : on notera donc les conditions aux limites de manière générale sous la forme :

$$f_b = A_b + B_b f_{I'} \quad (IV.F.7)$$

avec A_b et B_b définis selon le type des conditions :

$$\text{Dirichlet} \begin{cases} A_b = \frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_{imp,ext}} f_{imp,ext} \\ B_b = \frac{h_{int}}{h_{int} + h_{imp,ext}} \end{cases} \quad \text{Neumann} \begin{cases} A_b = \frac{1}{h_{int}} \phi_{imp,ext} \\ B_b = 1 \end{cases} \quad (IV.F.8)$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 182/400
---------	--	---

Remarques

- La valeur $f_{I'}$ est calculée en utilisant le gradient cellule de f , soit : $f_{I'} = f_I + \underline{II'} \nabla f_I$.
- Il reste à préciser la valeur de h_{int} . Il s'agit d'une valeur *numérique*, n'ayant *a priori* aucun rapport avec un coefficient d'échange physique, et dépendante du mode de calcul du flux diffusif dans la première maille de bord. Ainsi $h_{int} = \frac{\alpha}{I'F}$ (l'unité s'en déduit naturellement).
- On rappelle que dans le code, c'est la valeur de $\frac{\alpha_m}{C}$ que l'utilisateur doit fournir. Si la propriété est constante, les valeurs sont affectées dans **usini1** à **VISCL0** pour la vitesse (viscosité dynamique moléculaire μ en $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$) et à **VISLS0** pour les *VarScalaire*s (par exemple, pour la température et l'enthalpie, $\frac{\lambda}{C_p}$ en $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$). Si la propriété est variable en espace ou en temps, ce sont des tableaux équivalents qui doivent être renseignés dans **usphyv**. En outre, la variance des fluctuations d'une *VarScalaire* hérite automatiquement la valeur de $\frac{\alpha_m}{C}$ de la *VarScalaire* associée (*Code_Saturne* 1.1 et suivantes).
- On rappelle également, car ce peut être source d'erreur, que dans le code, on a :
 - pour la température $\alpha_m = \lambda$ et $C = C_p$
 - pour l'enthalpie $\alpha_m = \frac{\lambda}{C_p}$ et $C = 1$

Exemples de cas particuliers

- Dans le cas d'une condition de Dirichlet, l'utilisateur est donc conduit à fournir deux données : $f_{imp,ext}$ et $h_{imp,ext}$. Pour obtenir une condition de Dirichlet simple (sans coefficient d'échange) il suffit d'imposer $h_{imp,ext} = +\infty$. C'est le cas d'utilisation le plus courant (en pratique, $h_{imp,ext} = 10^{30}$).
- Dans le cas d'une condition de Neumann, l'utilisateur fournit une seule valeur $\phi_{imp,ext}$ (nulle pour les conditions de Neumann homogènes).

• Condition de sortie pour la pression

On précise ici la condition de sortie appliquée à la pression dans le cas des sorties standards. Il est nécessaire d'imposer une condition de type Dirichlet (accompagnée d'une condition de type Neumann homogène sur les composantes de la vitesse). On la calcule à partir des valeurs de la variable au pas de temps précédent.

- En raisonnant sur une configuration simple (de type canal, avec une sortie plane, perpendiculaire à l'écoulement), on peut faire l'hypothèse que la forme des profils de pression pris sur les surfaces parallèles à la sortie est inchangée aux alentours de celle-ci (hypothèse d'un écoulement établi, loin de toute perturbation). Dans cette situation, on peut écrire $\frac{\partial^2 P}{\partial \underline{n} \partial \underline{\tau}_i} = 0$ (\underline{n} est le vecteur normal à la sortie, $\underline{\tau}_i$ représente une base du plan de sortie).
- Si, de plus, on peut supposer que le gradient de pression pris dans la direction perpendiculaire aux faces de sortie est uniforme au voisinage de celle-ci, le profil à imposer en sortie (valeurs p_b) se déduit du profil pris sur un plan amont (valeurs p_{amont}) en ajoutant simplement la constante $R = d \underline{\nabla}(p) \cdot \underline{n}$ (où d est la distance entre le plan amont et la sortie), soit $p_b = p_{amont} + R$ (le fait que R soit identique pour toutes les faces de sortie est important afin de pouvoir l'éliminer dans l'équation (IV.F.9) ci-dessous).
- Avec l'hypothèse supplémentaire que les points I' relatifs aux faces de sortie sont sur un plan parallèle à la sortie, on peut utiliser les valeurs en ces points ($p_{I'}$) pour valeurs amont soit $p_{amont} = p_{I'} = p_I + \underline{II'} \cdot \underline{\nabla} p$.
- Par ailleurs, la pression étant définie à une constante près (écoulement incompressible) on peut fixer sa valeur arbitrairement en un point A (centre d'une face de sortie choisie arbitrairement¹²) à p_0 (valeur fixée par l'utilisateur, égale à P0 et nulle par défaut), et donc décaler le profil imposé en sortie en ajoutant :
 $R_0 = p_0 - (p_{amont,A} + R) = p_0 - (p_{I',A} + R)$.
- On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned}
 p_b &= p_{I'} + R + R_0 \\
 &= p_{I'} + R + p_0 - (p_{I',A} + R) \\
 &= p_{I'} + \underbrace{p_0 - p_{I',A}}_{\text{valeur constante } R_1} \\
 &= p_{I'} + R_1
 \end{aligned}
 \tag{IV.F.9}$$

On constate donc que la condition de pression en sortie est une condition de Dirichlet dont les valeurs sont égales aux valeurs de la pression (prises au pas de temps précédent) sur le plan amont des points I' et recalées pour obtenir P0 en un point de sortie arbitraire.

Points à traiter

• Représentation des conditions par une valeur de face

Bien que la méthode utilisée permette une simplicité et une homogénéité de traitement de toutes les conditions aux limites, elle est relativement restrictive au sens où une seule valeur ne suffit pas toujours pour représenter les conditions à appliquer lors du calcul de termes différents.

Ainsi, en $k - \varepsilon$ a-t-il été nécessaire, lors du calcul des conditions aux limites de paroi, de disposer de deux couples (A_b , B_b) afin de prendre en compte les conditions à appliquer pour le calcul de la contrainte tangentielle et celles à utiliser lors du calcul du terme de production (et un troisième jeu de

¹²première face de sortie rencontrée en parcourant les faces de bord dans l'ordre naturel induit par la numérotation interne au code

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 184/400
---------	--	---

coefficients serait nécessaire pour permettre le traitement des gradients intervenant dans les termes de gradient transposé, dans `visecv`).

Peut-être pourrait-il être utile de mettre en place une méthode permettant d'utiliser (au moins en certains points stratégiques du code) directement des forces, des contraintes ou des flux, sans passer nécessairement par le calcul d'une valeur de face.

• Condition de sortie en pression

La condition de pression en sortie se traduit par $p_f = p_{I'} + R1$ et le profil obtenu correspond au profil amont pris aux points I' et recalé pour obtenir p_0 en un point A arbitraire. Ce type de condition est appliqué sans précautions, mais n'est pas toujours justifié (une condition de Dirichlet basée sur la valeur calculée directement aux faces de bord pourrait être plus adaptée). Les hypothèses sont en particulier mises en défaut dans les cas suivants :

- la sortie est proche d'une zone où l'écoulement n'est pas établi en espace (ou varie en temps) ;
- la sortie n'est pas une surface perpendiculaire à l'écoulement ;
- le gradient de pression dans la direction normale à la sortie n'est pas le même pour toutes les faces de sortie (dans le cas de sortie multiples, par exemple, le gradient n'est probablement pas le même au travers de toutes les sorties) ;
- les points I' ne sont pas sur une surface parallèle à la sortie (cas des maillage irréguliers par exemple).

Par ailleurs, en l'absence de condition de sortie, il pourrait peut-être se révéler utile de fixer une valeur de référence sur une cellule donnée ou de ramener la moyenne de la pression à une valeur de référence (avec le décalage du spectre, on assure l'inversibilité de la matrice à chaque pas de temps, mais il faudrait vérifier si la pression n'est pas susceptible de dériver au cours du calcul).

• Termes non pris en compte

Les conditions aux limites actuelles semblent causer des difficultés lors du traitement du terme de gradient transposé de la vitesse dans l'équation de Navier-Stokes (terme traité de manière explicite en temps). Il est possible de "débrancher" ce terme en positionnant le mot clé `IVISSE` à 0. Sa valeur par défaut est 1 (les termes en gradient transposé sont pris en compte).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 185/ 400
---------	--	---

G- covofi routine

Fonction

Dans ce sous-programme, on résout :

★ soit l'équation de convection-diffusion d'un scalaire en présence de termes sources :

$$\frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \underbrace{\text{div}((\rho \underline{u}) a)}_{\text{convection}} - \underbrace{\text{div}(K \nabla a)}_{\text{diffusion}} = T_s^{imp} a + T_s^{exp} + \Gamma a_i \quad (\text{IV.G.1})$$

Ici a représente la valeur instantanée du scalaire en approche laminaire ou, en approche RANS, sa moyenne de Reynolds \tilde{a} . Les deux approches étant exclusives et les équations obtenues similaires, on utilisera le plus souvent aussi la notation a pour \tilde{a} .

★ soit, dans le cas d'une modélisation RANS, la variance de la fluctuation d'un scalaire en présence de termes sources¹ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \widetilde{a''^2})}{\partial t} + \underbrace{\text{div}((\rho \underline{u}) \widetilde{a''^2})}_{\text{convection}} - \underbrace{\text{div}(K \nabla \widetilde{a''^2})}_{\text{diffusion}} &= T_s^{imp} \widetilde{a''^2} + T_s^{exp} + \Gamma \widetilde{a''^2}_i \\ &+ \underbrace{2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla \tilde{a})^2 - \frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2}}_{\text{termes de production et de dissipation dus à la turbulence moyenne}} \end{aligned} \quad (\text{IV.G.2})$$

$\widetilde{a''^2}$ représente ici la moyenne du carré des fluctuations² de a . K , Γ , T_s^{imp} et T_s^{exp} représentent respectivement le coefficient de diffusion, la valeur du terme source de masse, les termes sources implicite et explicite du scalaire a ou $\widetilde{a''^2}$. μ_t et σ_t sont respectivement la viscosité turbulente et le nombre de Schmidt ou de Prandtl turbulent, ε est la dissipation de l'énergie turbulente k et R_f définit le rapport constant entre les échelles dissipatives de k et de $\widetilde{a''^2}$ (R_f est constant selon le modèle assez simple adopté ici).

On écrit les deux équations précédentes sous la forme commune suivante :

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \text{div}((\rho \underline{u}) f) - \text{div}(K \nabla f) = T_s^{imp} f + T_s^{exp} + \Gamma f_i + T_s^{pd} \quad (\text{IV.G.3})$$

avec, pour $f = a$ ou $f = \widetilde{a''^2}$:

$$T_s^{pd} = \begin{cases} 0 & \text{pour } f = a, \\ 2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla \tilde{a})^2 - \frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2} & \text{pour } f = \widetilde{a''^2} \end{cases} \quad (\text{IV.G.4})$$

Le terme $\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}$ est décomposé de la sorte :

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IV.G.5})$$

¹Davroux A. et Archambeau F. : Calcul de la variance des fluctuations d'un scalaire dans le solveur commun. Application à l'expérience du CEGB dite "Jet in Pool", HE-41/99/043.

² a et $\widetilde{a''^2}$, sous forme discrète en espace, correspondent donc en fait à des vecteurs dimensionnés à NCELET de composantes a_I et $\widetilde{a''^2}_I$ respectivement, I décrivant l'ensemble des cellules.

En utilisant l'équation de conservation de la masse (cf. `predvv`), l'équation précédente s'écrit finalement :

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}((\rho \underline{u}) f) - \text{div}(K \underline{\nabla} f) = T_s^{imp} f + T_s^{exp} + \Gamma(f_i - f) + T_s^{pd} + f \text{div}(\rho \underline{u}) \quad (\text{IV.G.6})$$

Discrétisation

Pour intégrer l'équation (IV.G.6), une discrétisation temporelle de type θ -schéma est appliquée à la variable résolue³ :

$$f^{n+\theta} = \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \quad (\text{IV.G.7})$$

L'équation (IV.G.6) est discrétisée au temps $n + \theta$ en supposant les termes sources explicites pris au temps $n + \theta_S$, et ceux implicites en $n + \theta$. Par souci de clarté, on suppose, en l'absence d'indication, que les propriétés physiques $\Phi(K, \rho, \dots)$ et le flux de masse $(\rho \underline{u})$ sont pris respectivement aux instants $n + \theta_\Phi$ et $n + \theta_F$, où θ_Φ et θ_F dépendent des schémas en temps spécifiquement utilisés pour ces grandeurs⁴.

$$\rho \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} + \underbrace{\text{div}((\rho \underline{u}) f^{n+\theta})}_{\text{convection}} - \underbrace{\text{div}(K \underline{\nabla} f^{n+\theta})}_{\text{diffusion}} = T_s^{imp} f^{n+\theta} + T_s^{exp, n+\theta_S} + (\Gamma f_i)^{n+\theta_S} - \Gamma^n f^{n+\theta} + T_s^{pd, n+\theta_S} + f^{n+\theta} \text{div}(\rho \underline{u}) \quad (\text{IV.G.8})$$

où :

$$T_s^{pd, n+\theta_S} = \begin{cases} 0 & \text{pour } f = a, \\ 2 \left[\frac{\mu_t}{\sigma_t} (\underline{\nabla} \tilde{a})^2 \right]^{n+\theta_S} - \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n} (\tilde{a}''^2)^{n+\theta} & \text{pour } f = \tilde{a}''^2 \end{cases} \quad (\text{IV.G.9})$$

Le terme de production affecté d'un indice $n + \theta_S$ est un terme source explicite et il est donc traité comme tel :

$$\left[\frac{\mu_t}{\sigma_t} (\underline{\nabla} \tilde{a})^2 \right]^{n+\theta_S} = (1 + \theta_S) \frac{\mu_t^n}{\sigma_t} (\underline{\nabla} \tilde{a}^n)^2 - \theta_S \frac{\mu_t^{n-1}}{\sigma_t} (\underline{\nabla} \tilde{a}^{n-1})^2 \quad (\text{IV.G.10})$$

L'équation (IV.G.6) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} + \theta \text{div}((\rho \underline{u}) f^{n+1}) - \theta \text{div}(K \underline{\nabla} f^{n+1}) \\ & - [\theta T_s^{imp} - \theta \Gamma^n + \theta T_s^{pd, imp} + \theta \text{div}(\rho \underline{u})] f^{n+1} \\ & = (1 - \theta) T_s^{imp} f^n + T_s^{exp, n+\theta_S} + (\Gamma f_i)^{n+\theta_S} - (1 - \theta) \Gamma^n f^n + T_s^{pd, exp} - \theta T_s^{pd, imp} f^n \\ & + (1 - \theta) f^n \text{div}(\rho \underline{u}) - (1 - \theta) \text{div}((\rho \underline{u}) f^n) + (1 - \theta) \text{div}(K \underline{\nabla} f^n) \end{aligned} \quad (\text{IV.G.11})$$

avec :

$$T_s^{pd, imp} = \begin{cases} 0 & \text{pour } f = a, \\ -\frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n} & \text{pour } f = \tilde{a}''^2 \end{cases} \quad (\text{IV.G.12})$$

$$T_s^{pd, exp} = \begin{cases} 0 & \text{pour } f = a, \\ 2 \left[\frac{\mu_t}{\sigma_t} (\underline{\nabla} \tilde{a})^2 \right]^{n+\theta_S} - \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n} (\tilde{a}''^2)^n & \text{pour } f = \tilde{a}''^2 \end{cases} \quad (\text{IV.G.13})$$

On rappelle que, pour un scalaire f , le sous-programme `codits` résout une équation du type suivant

$$\begin{aligned} & f_s^{imp} (f^{n+1} - f^n) + \theta \text{div}((\rho \underline{u}) f^{n+1}) - \theta \text{div}(K \underline{\nabla} f^{n+1}) \\ & = f_s^{exp} - \underbrace{(1 - \theta) \text{div}((\rho \underline{u}) f^n) + (1 - \theta) \text{div}(K \underline{\nabla} f^n)}_{\text{convection diffusion explicite}} \end{aligned} \quad (\text{IV.G.14})$$

³Si $\theta = 1/2$, ou qu'une extrapolation est utilisée, le pas de temps Δt est supposé uniforme en temps et en espace.

⁴cf. `introd`

f_s^{exp} représente les termes sources discrétisés de manière explicite en temps (hormis contributions de la convection diffusion explicite provenant du θ -schéma) et $f_s^{imp} f^{n+1}$ représente les termes linéaires en f^{n+1} dans l'équation discrétisée en temps.

On réécrit l'équation (IV.G.11) sous la forme (IV.G.15) qui est ensuite résolue par **codits**.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left(\frac{\rho}{\Delta t} - \theta T_s^{imp} + \theta \Gamma^n - \theta T_s^{pd, imp} - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \right)}_{f_s^{imp}} \delta f^{n+1} \\
 & + \theta \operatorname{div}((\rho \underline{u}) f^{n+1}) - \theta \operatorname{div}(K \underline{\nabla} f^{n+1}) = \\
 & \underbrace{T_s^{imp} f^n + T_s^{exp, n+\theta_S} + (\Gamma f_i)^{n+\theta_S} - \Gamma^n f^n + T_s^{pd, exp} + f^n \operatorname{div}(\rho \underline{u})}_{f_s^{exp}} \\
 & - (1 - \theta) \operatorname{div}((\rho \underline{u}) f^n) + (1 - \theta) \operatorname{div}(K \underline{\nabla} f^n)
 \end{aligned} \tag{IV.G.15}$$

Mise en œuvre

On distingue deux cas suivant le type de schéma en temps choisi pour les termes sources :

- Si les termes sources ne sont pas extrapolés, toutes les contributions du second membre vont directement dans le vecteur **SMBRS**.
- Sinon, un vecteur supplémentaire est nécessaire afin de stocker les contributions du pas de temps précédent (**PROPCE**). Dans ce cas :

- le vecteur **PROPCE** sert à stocker les contributions explicites du second membre au temps $n - 1$ (pour l'extrapolation en $n + \theta_S$).
- le vecteur **SMBRS** est complété au fur et à mesure.

L'algorithme de ce sous-programme est le suivant :

- mise à zéro des vecteurs représentant le second membre (**SMBRS**) et de la diagonale de la matrice (**ROVSDT**).
- calcul des termes sources du scalaire définis par l'utilisateur en appelant le sous-programme **ustssc**.

★ Si les termes sources sont extrapolés, **SMBRS** reçoit $-\theta_S$ fois la contribution au temps $n - 1$ des termes sources qui sont extrapolés (stockés dans **PROPCE**). La contribution des termes sources utilisateurs (au pas temps courant) est répartie entre **PROPCE** (pour la partie T_s^{exp} qui est à stocker en vue de l'extrapolation) et **SMBRS** (pour la partie explicite provenant de l'utilisation du θ schéma pour T_s^{imp}). La contribution implicite est alors mise dans **ROVSDT** (après multiplication par θ) quel que soit son signe, afin de ne pas utiliser des discrétisations temporelles différentes entre deux pas de temps successifs, dans le cas par exemple où T_s^{imp} change de signe⁵.

★ Sinon la contribution de T_s^{exp} est directement mise dans **SMBRS**. Celle de T_s^{imp} est ajoutée à **ROVSDT** si elle est positive (de manière à conserver la dominance de la diagonale), ou explicitée et mise dans le second membre sinon.

- prise en compte des physiques particulières : arc électrique, rayonnement, combustion gaz et charbon pulvérisé. Seuls les vecteurs **ROVSDT** et **SMBRS** sont complétés (schéma d'ordre 1 sans extrapolation).

⁵cf. **predvv**

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 189/400
---------	--	---

- ajout des termes sources de masse en $\Gamma(f_i - f)$ par appel au sous-programme **catsma**.
 - ★ Si les termes sources sont extrapolés, le terme explicite en Γf_i est stocké dans **PROPCE**. Le θ -schéma est appliqué au terme implicite, puis les contributions implicite et explicite réparties entre **ROVSDT** et **SMBRS**.
 - ★ Sinon, la partie implicite en $-\Gamma f$ va dans **ROVSDT**, et tout le reste dans **SMBRS**.
- calcul du terme d'accumulation de masse en $\text{div}(\rho \underline{u})$ par appel à **divmas** et ajout de sa contribution dans **SMBRS**, et dans **ROVSDT** après multiplication par θ^6 .
- ajout du terme instationnaire à **ROVSDT**.
- calcul des termes de production $(2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla \tilde{a})^2)$ et de dissipation $(-\frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2})$ si on étudie la variance des fluctuations d'un scalaire avec un modèle de turbulence de type RANS. Ce calcul s'effectue en calculant préalablement le gradient du scalaire f par appel au sous-programme **grdccl**.
 - ★ Si les termes sources sont extrapolés, la production est mise dans **PROPCE** puis l'énergie cinétique k et la dissipation turbulentes ε sont calculées (**XK** et **XE**) en fonction du modèle de turbulence utilisé. **SMBRS** reçoit $-\frac{\rho \varepsilon}{R_f k} \widetilde{a''^2}$ au temps n et **ROVSDT** le coefficient d'implication $\frac{\rho \varepsilon}{R_f k}$ après multiplication par **THETAP** = θ .
 - ★ Sinon, la production va dans **SMBRS**, et la dissipation est répartie de la même manière que précédemment avec **THETAP** = 1.
- une fois la contribution de tous les termes sources calculés, le second membre est assemblé, et le vecteur **PROPCE** ajouté après multiplication par $1 + \theta_S$ à **SMBRS**, dans le cas où les termes sources sont extrapolés.
- calcul du coefficient de diffusion K au centre des cellules, et des valeurs aux faces par appel au sous-programme **viscfa**.
- résolution de l'équation complète (avec les termes de convection diffusion) par un appel au sous-programme **codits** avec $f_s^{exp} = \text{SMBRS}$ et $f_s^{imp} = \text{ROVSDT}$.
- ajustement (clipping) du scalaire ou de la fluctuation du scalaire en appelant le sous-programme **clpsca**.
- impression du bilan explicite d'expression $\|\mathcal{E}_n(f^n) - \frac{\rho^n}{\Delta t} (f^{n+1} - f^n)\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

On résume dans les tableaux [IV.G.16](#) et [IV.G.17](#) les différentes contributions (hors convection-diffusion) affectées à chacun des vecteurs **PROPCE**, **SMBRS** et **ROVSDT** suivant le schéma en temps choisi pour les termes sources. En l'absence d'indication, les propriétés physiques ρ, μ, \dots sont supposées prises en au temps $n + \theta_\Phi$, et le flux de masse ($\rho \underline{u}$) pris au temps $n + \theta_F$, les valeurs de θ_F et de θ_Φ dépendant du type de schéma sélectionné spécifiquement pour ces grandeurs⁷.

⁶cette opération est faite quel que soit le schéma en temps de façon à rester cohérent avec ce qui est fait dans **bilsc2**

⁷cf. **introd**

AVEC EXTRAPOLATION DES TERMES SOURCES :

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} - \theta T_s^{imp} - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \theta \Gamma^n + \theta \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n}$
PROPCE ⁿ	$T_s^{exp, n} + \Gamma^n f_i^n + 2 \frac{\mu_t^n}{\sigma_t} (\nabla f^n)^2$
SMBS ⁿ	$(1 + \theta_S) \text{PROPCE}^n - \theta_S \text{PROPCE}^{n-1} + T_s^{imp} f^n + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) f^n - \Gamma^n f^n - \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n} f^n$

(IV.G.16)

SANS EXTRAPOLATION DES TERMES SOURCES :

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} + \operatorname{Max}(-T_s^{imp}, 0) - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma^n + \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n}$
SMBS ⁿ	$T_s^{exp} + T_s^{imp} f^n + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) f^n + \Gamma^n (f_i^n - f^n) - \frac{\rho \varepsilon^n}{R_f k^n} f^n + 2 \frac{\mu_t}{\sigma_t} (\nabla f^n)^2$

(IV.G.17)

Points à traiter

- **Intégration du terme de convection-diffusion**

Dans ce sous-programme, les points litigieux sont dus à l'intégration du terme de convection-diffusion. On renvoie donc le lecteur au sous-programme `bilsc2` qui les explicite.

Annexe 1 : Inversibilité de la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$

Dans cette section, on va étudier plus particulièrement l'inversibilité de la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$, matrice du système linéaire à résoudre associée à \mathcal{EM}_n pour le cas d'un schéma en temps de type Euler implicite d'ordre un ($\theta = 1$). Pour toutes les notations, on se reportera à la documentation sur le sous-programme `covofi`. On va montrer que la démarche adoptée permet de s'assurer que la matrice des systèmes de convection-diffusion dans les cas courants est toujours inversible.

Introduction

Pour montrer l'inversibilité, on va utiliser le fait que la dominance stricte de la diagonale l'implique⁸. On cherche donc à déterminer sous quelles conditions les matrices de convection diffusion sont à diagonale strictement dominante.

On va montrer qu'en incluant dans la matrice le terme en $\text{div}(\rho \underline{u})$ issu de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, on peut établir directement et exactement⁹ la propriété. Par contre, si ce terme n'est pas pris en compte dans la matrice, il est nécessaire de faire intervenir le pendant discret de la relation :

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega = 0 \quad (\text{IV.G.18})$$

Cette relation n'est cependant vérifiée au niveau discret qu'à la précision du solveur de pression près (et, en tous les cas, ne peut être approchée au mieux qu'à la précision machine près). Il paraît donc préférable de s'en affranchir.

Avant d'entrer dans les détails de l'analyse, on rappelle quelques propriétés et définitions.

Soit $\underline{\underline{C}}$ une matrice carrée d'ordre N, d'élément générique C_{ij} . On a par définition :

Définition : La matrice $\underline{\underline{C}}$ est à diagonale **strictement dominante** *ssi*

$$\forall i \in [1, N], \quad |C_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |C_{ij}| \quad (\text{IV.G.19})$$

On convient de dire que $\underline{\underline{C}}$ est à diagonale **simplement dominante** *ssi* l'inégalité n'est pas stricte, soit :

$$\forall i \in [1, N], \quad |C_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |C_{ij}| \quad (\text{IV.G.20})$$

Remarque : Si, sur chaque ligne, la somme des éléments d'une matrice est nulle, que les éléments extradiagonaux sont négatifs et que les éléments diagonaux sont positifs, alors la matrice est à diagonale simplement dominante. Si la somme est strictement positive, la diagonale est strictement dominante.

On a l'implication suivante :

Propriété : Si la matrice $\underline{\underline{C}}$ est à diagonale strictement dominante, elle est inversible.

Cette propriété¹⁰ se démontre simplement si l'on admet le théorème de Gerschgorin ci-dessous :

Théorème : Soit $\underline{\underline{B}}$ une matrice carrée d'ordre N dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, d'élément générique B_{ij} , les valeurs

propres λ_i de B sont, dans le plan complexe, telles que $\|\lambda_i - B_{ii}\|_{\mathbb{C}} \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} \|B_{ij}\|_{\mathbb{C}}$

⁸Ce faisant, on choisit cependant une condition forte et la démonstration n'est probablement pas optimale.

⁹Hormis dans le cas de conditions aux limites mixtes, qu'il conviendrait d'examiner plus en détail.

¹⁰Lascaux, P. et Théodor, R. : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'art de l'Ingénieur, Tome 2, Ed. Masson.

Si B est à éléments réels, on écrira $\|\lambda_l - B_{ii}\|_{\mathbb{C}} \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |B_{ij}|$

Démonstration de la propriété précédente :

Soit C à diagonale strictement dominante à éléments réels. On montre qu'il est possible d'inverser le système $CX = S$ d'inconnue X , quel que soit le second membre S . Pour cela, on décompose C en partie diagonale (D) et extradiagonale ($-E$) soit :

$$C = D - E$$

C étant à diagonale strictement dominante, tous ses éléments diagonaux sont non nuls. D est donc inversible (et les éléments de l'inverse sont réels). On considère alors la suite¹¹ :

$$(X^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{avec} \quad X^0 = D^{-1}S \quad \text{et} \quad DX^n = S + EX^{n-1}$$

On peut écrire :

$$X^n = \sum_{k=0}^{k=n} (D^{-1}E)^k D^{-1}S$$

Cette somme converge si le rayon spectral de $B = D^{-1}E$ est strictement inférieur à 1. Or, la matrice C est à diagonale strictement dominante. On a donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ (à partir de la relation (IV.G.19) et en divisant par $|C_{ii}|$) :

$$\forall i \in [1, N], \quad \frac{|C_{ii}|}{|C_{ii}|} > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} \frac{|C_{ij}|}{|C_{ii}|}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall i \in [1, N], \quad \frac{|D_{ii}|}{|D_{ii}|} > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} \frac{|E_{ij}|}{|D_{ii}|} = \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |[D^{-1}E]_{ij}|$$

ou bien :

$$\forall i \in [1, N], \quad 1 > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |B_{ij}|$$

d'où, avec le théorème de Gerschgorin, une relation sur les valeurs propres λ_l de B :

$$\forall i \in [1, N], \quad \|\lambda_l - B_{ii}\|_{\mathbb{C}} \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |B_{ij}| < 1$$

et comme $B_{ii} = 0$:

$$\|\lambda_l\|_{\mathbb{C}} < 1$$

en particulier, la valeur propre dont la norme est la plus grande vérifie également cette équation. Ceci implique que le rayon spectral de B est strictement inférieur à 1. La suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc (et la méthode de Jacobi converge). Il existe donc une solution à l'équation $CX = S$. Cette solution est unique¹² et la matrice C est donc inversible.

¹¹On reconnaît la méthode de Jacobi

¹²On peut le voir "par l'absurde". En effet, supposons qu'il existe deux solutions distinctes X_1 et X_2 à l'équation $CX = S$. Alors $Y = X_2 - X_1$ vérifie $CY = 0$, soit $DY = -EY$, donc $D^{-1}EY = -Y$. Ceci signifie que Y (qui n'est pas nul, par hypothèse) est vecteur propre de $D^{-1}E$ avec $\lambda = -1$ pour valeur propre associée. Or, le rayon spectral de $D^{-1}E$ est strictement inférieur à 1 et $\lambda = -1$ ne peut donc pas être une valeur propre de $D^{-1}E$. En conséquence, il ne peut exister qu'une seule solution à l'équation $CX = S$.

Avec prise en compte des termes issus de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans $\underline{\underline{EM}}_n$

Introduction

Pour montrer que la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$ est inversible, on va montrer qu'elle est à diagonale strictement dominante. Pour cela, on va considérer successivement les contributions :

- des termes différentiels d'ordre 0 linéaires en $\delta f^{n+1,k+1}$,
- des termes issus de la prise en compte de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$,
- des termes différentiels d'ordre 1 (convection),
- des termes différentiels d'ordre 2 (diffusion).

Pour chacune de ces contributions, on va examiner la dominance de la diagonale de l'opérateur linéaire associé. Si, pour chaque contribution, la dominance de la diagonale est acquise, on pourra alors conclure à la dominance de la diagonale pour la matrice (somme) complète¹³ $\underline{\underline{EM}}_n$ et donc à son inversibilité.

Contributions des termes différentiels d'ordre 0 linéaires en $\delta f^{n+1,k+1}$

L'unique contribution est sur la diagonale : il faut donc vérifier qu'elle est strictement positive.

Pour chaque ligne I , $f_s^{imp}{}_I$ (cf. (IV.G.15)) contient au minimum la quantité strictement positive¹⁴ $\frac{\rho_I^n |\Omega_i|}{\Delta t}$. Les autres expressions, $(-|\Omega_i| (T_s^{imp})_I, +|\Omega_i| \Gamma_I, -|\Omega_i| (T_s^{pd,imp})_I)$, lorsqu'elles existent, contribuent toutes positivement¹⁵.

L'opérateur linéaire associé à ces contributions vérifie donc bien la **dominance stricte** de la diagonale (propriété 1). Ce n'est cependant pas vrai si on extrapole les termes source, à cause de T_s^{imp} . Il en résulte une contrainte sur la valeur du pas de temps.

Contributions des termes différentiels d'ordre 1 et des termes issus de la prise en compte de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Les termes considérés sont au nombre de deux dans (IV.G.11) :

- la contribution issue de la prise en compte de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ se retrouve dans $f_s^{imp}{}_I$ (équation IV.G.15),
- la contribution du terme de convection linéarisé.

Après intégration spatiale, la somme de ces deux termes discrets s'écrit :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in V_{ois}(i)} \left[(-m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_J^{n+1,k+1} \right] \quad (\text{IV.G.21})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(-m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} \right] \quad (\text{IV.G.22})$$

Pour chaque ligne I , on va chercher les propriétés de dominance de la diagonale en traitant séparément les faces internes (équation (IV.G.21)) et les faces de bord (équation (IV.G.22)).

- la contribution des **faces internes** ij (facteur de $\delta f_I^{n+1,k+1}$) à la diagonale est positive ; la contribution aux extradiagonales est négative (facteur de $\delta f_J^{n+1,k+1}$) et la somme de ces contributions

¹³Ce raisonnement n'est pas optimal (la somme de valeurs absolues étant supérieure à la valeur absolue de la somme), mais permet d'obtenir des conclusions dans le cas présent (condition suffisante).

¹⁴Ceci permettra de conclure à la stricte dominance de la diagonale de la matrice somme complète $\underline{\underline{EM}}_n$.

¹⁵Le terme de dissipation $\rho \frac{1}{R_f} \frac{\varepsilon}{k}$, spécifique à l'étude de la variance des fluctuations, est positif par définition et ne remet donc pas en cause la conclusion.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 194/400
---------	--	---

est exactement nulle (équation (IV.G.21)). Si l'on note C_{IJ} les coefficients de la matrice issus de la contribution de ces termes, on a donc $|C_{II}| \geq \sum_{J=1, J \neq I}^{J=N} |C_{IJ}|$ qui traduit la **dominance "simple"** (l'inégalité n'est pas "stricte") de la diagonale et règle la question des contributions des faces internes.

- la contribution des **faces de bord** doit être réécrite en utilisant l'expression des conditions aux limites sur f pour préciser la valeur de $\delta f_{b_{ik}}$ (on omet l'exposant $(n+1, k+1)$ pour alléger les notations) :

- pour une condition de Dirichlet : $\delta f_{b_{ik}} = 0$,
- pour une condition de Neumann : $\delta f_{b_{ik}} = \delta f_I$,
- pour une condition mixte ($f_{b_{ik}} = \alpha + \beta f_i$) : $\delta f_{b_{ik}} = \beta \delta f_I$.

Pour la contribution des faces de bord, il faut alors considérer deux cas de figure possibles.

- **Le flux de masse au bord est positif ou nul** ($m_{b_{ik}}^n = (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \geq 0$). Cette situation correspond par exemple aux sorties standards (fluide sortant du domaine), aux symétries ou aux parois étanches (flux de masse nul). Les contributions aux faces de bord sont alors toutes nulles, quelles que soient les conditions aux limites portant sur la variable f . En conséquence, la diagonale issue de ces contribution est **simplement dominante**.
- **Le flux de masse au bord est strictement négatif**. Cette situation correspond à une entrée de fluide dans le domaine. Les contributions considérées s'écrivent alors :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(-m_{b_{ik}}^n) \delta f_I^{n+1, k+1} + (m_{b_{ik}}^n) \delta f_{b_{ik}}^{n+1, k+1} \right] \quad (\text{IV.G.23})$$

Il convient alors de distinguer plusieurs situations, selon le type de condition à la limite portant sur f :

- ★ si la condition à la limite de f est de type **Dirichlet**, seule subsiste une contribution positive ou nulle à la diagonale, qui assure donc la **dominance simple** :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} (-m_{b_{ik}}^n) \delta f_I^{n+1, k+1} \quad (\text{IV.G.24})$$

- ★ si la condition à la limite de f est de type **Neumann**, la somme des contributions dues aux faces de bord est alors nulle, ce qui assure donc la **dominance simple**.

- ★ si la condition à la limite de f est de type **mixte**, la contribution des faces de bord est sur la diagonale et vaut :

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} (1 - \beta) (-m_{b_{ik}}^n) \delta f_I^{n+1, k+1} \quad (\text{IV.G.25})$$

On ne peut pas se prononcer quand à la dominance de la diagonale, à cause de la présence de $(1 - \beta)$ (la valeur de β est fixée par l'utilisateur) et la démarche adoptée ici **ne permet donc pas de conclure**. Il faut néanmoins noter que cette situation est rare dans les calculs standards. Elle demande un complément d'analyse et sera pour le moment exclue des considérations exposées dans le présent document.

On peut conclure, quand il n'y a pas de condition à la limite de type mixte, que la matrice associée aux contributions des termes différentiels d'ordre 1 (convectifs) et à la prise en compte des termes issus de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est à diagonale **simplement dominante**.

Contributions des termes différentiels d'ordre 2

On va considérer enfin les contributions des termes différentiels d'ordre 2 (issus du terme $-\operatorname{div}(K^n \nabla \delta f^{n+1,k+1})$). Pour ces termes, la contribution à la diagonale est positive¹⁶, négative aux extradiagonales¹⁶, compte tenu de :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} -\operatorname{div}(K^n \nabla \delta f^{n+1,k+1}) d\Omega \\ &= - \sum_{j \in \operatorname{Vois}(i)} K_{ij}^n \frac{\delta f_j^{n+1,k+1} - \delta f_i^{n+1,k+1}}{\overline{I'J'}} \cdot S_{ij} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} K_{b_{ik}}^n \frac{\delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} - \delta f_i^{n+1,k+1}}{\overline{I'F}} \cdot S_{b_{ik}} \end{aligned} \quad (\text{IV.G.26})$$

Considérons deux cas :

- la cellule courante I n'a **que des faces internes** au domaine de calcul (pas de faces de bord). La somme des contributions est nulle. On a donc **dominance simple** de la diagonale.
- la cellule courante I a **des faces de bord**. La somme des contributions diagonales et extra-diagonales est positive quand on a une condition à la limite de type **Dirichlet** ou de type **Neumann** sur f . La diagonale est alors **strictement dominante**. Lorsqu'il y a des conditions à la limite de type mixte, il n'est plus possible de conclure (situation écartée précédemment).

On peut conclure, quand il n'y a pas de condition à la limite de type mixte, que la matrice associée aux contributions des termes différentiels d'ordre 2 est au moins à diagonale **simplement dominante**.

Conclusion

En travaillant sur des maillages non pathologiques (à transmittivité positive, voir la note de bas de page numéro 16) et en n'imposant pas de condition à la limite de type mixte sur les variables, on peut donc conclure que $\underline{\underline{EM}}_n$ est la somme de matrices à diagonale simplement dominante et d'une matrice à diagonale strictement dominante (paragraphe G). Elle est donc à **diagonale strictement dominante**, et donc **inversible** (de plus, la méthode itérative de Jacobi converge).

Sans prise en compte des termes issus de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans $\underline{\underline{EM}}_n$

Introduction

Pour identifier les cas dans lesquels la matrice $\underline{\underline{EM}}_n$ est inversible, on va rechercher les conditions qui assurent la dominance de la diagonale. Par rapport à l'analyse présentée au paragraphe G, seules diffèrent les considérations relatives aux contributions des termes différentiels d'ordre 1, puisqu'elles sont traitées au paragraphe G avec les termes issus de la prise en compte de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Contributions des termes différentiels d'ordre 1

La contribution du terme de convection est la seule à prendre en compte. Elle s'écrit, d'après les équations (IV.G.15) et la discrétisation explicitée pour le sous-programme **covofi** :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \operatorname{Vois}(i)} \left[(+m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_i^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_j^{n+1,k+1} \right] \quad (\text{IV.G.27})$$

¹⁶Ceci n'est en fait pas toujours vrai. En effet, pour chaque face ij , la transmittivité $\frac{K^n}{\overline{I'J'}} S_{ij}$ fait intervenir la mesure algébrique du segment $I'J'$, où I' et J' sont les projetés orthogonaux sur la normale à la face du centre des cellules voisines. Cette grandeur est une valeur algébrique et peut théoriquement devenir négative sur certains maillages pathologiques, contenant par exemple des mailles non convexes. On pourra se reporter au dernier point à traiter du sous-programme **matrix**.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 196/400
---------	--	---

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(+m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} \right] \quad (\text{IV.G.28})$$

On constate que pour chaque ligne I , la contribution des faces internes (facteur de $\delta f_I^{n+1,k+1}$) à la diagonale est positive et qu'elle est négative aux extradiagonales (facteur de $\delta f_J^{n+1,k+1}$). **Cependant**, contrairement au cas présenté au paragraphe G, la somme de ces contributions n'est pas nulle dans le cas général. Pour obtenir un résultat quant à la dominance de la diagonale, il faut faire intervenir la version discrète de la propriété (IV.G.18) rappelée ci-dessous :

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega = 0$$

Soit, sous forme discrète :

$$\sum_{j \in \text{Vois}(i)} m_{ij}^n + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n = 0 \quad (\text{IV.G.29})$$

Il n'est donc pas possible d'analyser séparément les contributions des faces internes et celles des faces de bord (contrairement à la situation rencontrée au paragraphe G). On se place ci-après dans le cas général d'une cellule qui a des faces internes *et* des faces de bord (si elle n'a que des faces internes, la démonstration est la même, mais plus simple. On peut l'écrire en considérant formellement que la cellule "a zéro faces de bord", c'est à dire que $\gamma_b(i)$ est l'ensemble vide).

Il faut alors considérer deux cas de figure, selon la valeur du flux de masse aux faces de bord (éventuelles) de la cellule :

- **Le flux de masse au bord est positif ou nul** ($m_{b_{ik}}^n = (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{\mathcal{S}}_{b_{ik}} \geq 0$). Cette situation correspond à des cellules qui ont des faces de bord de sortie standard (fluide sortant du domaine), de symétrie ou de paroi étanche (flux de masse nul). Les contributions s'écrivent alors :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(+m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_J^{n+1,k+1} \right] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n \delta f_I^{n+1,k+1} \quad (\text{IV.G.30})$$

Dans ce cas, la somme des contributions à la diagonale est positive, les contributions aux extradiagonales sont négatives et, avec la relation (IV.G.29), on vérifie que la somme des contributions diagonales et extradiagonales est nulle. On a donc **dominance simple** de la diagonale.

- **Le flux de masse au bord est strictement négatif**. Cette situation correspond à des cellules qui ont des faces de bord d'entrée standard (entrée de fluide dans le domaine). Les contributions considérées s'écrivent alors :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(+m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_J^{n+1,k+1} \right] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n \delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} \quad (\text{IV.G.31})$$

Il convient alors de distinguer plusieurs situations, selon le type de condition à la limite portant sur f (on omet l'exposant $(n+1, k+1)$ pour alléger les notations) :

- pour une condition de Dirichlet : $\delta f_{b_{ik}} = 0$,
- pour une condition de Neumann : $\delta f_{b_{ik}} = \delta f_I$,
- pour une condition mixte ($f_{b_{ik}} = \alpha + \beta f_I$) : $\delta f_{b_{ik}} = \beta \delta f_I$.

Selon le cas on se trouve dans une des situations suivantes :

★ si la condition à la limite de f est de type **Dirichlet**, la contribution des faces de bord est nulle dans la matrice. La contribution des faces internes à la diagonale est positive, la contribution aux extradiagonales négative et la somme de ces contributions vaut $\sum_{j \in \text{Vois}(i)} m_{ij}^n$,

soit avec la relation (IV.G.29) :

$$\sum_{j \in \text{Vois}(i)} m_{ij}^n = - \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n$$

Elle est strictement positive et la diagonale est donc **strictement dominante**.

★ si la condition à la limite de f est de type **Neumann**, la contribution des faces de bord se réduit au terme : $\sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n \delta f_I^{n+1,k+1}$. La somme des contributions à la diagonale est alors SC_i :

$$SC_i = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_{ois}(i)} (+ m_{ij}^n + | m_{ij}^n |) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n$$

En utilisant deux fois la relation (IV.G.29), on obtient donc pour la diagonale :

$$SC_i = \frac{1}{2} \left[\sum_{j \in V_{ois}(i)} | m_{ij}^n | + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^n \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{j \in V_{ois}(i)} (| m_{ij}^n | - m_{ij}^n) \right]$$

Cette grandeur est positive et égale à l'opposé de la somme des termes extradiagonaux qui sont tous négatifs. La diagonale est donc **simplement dominante**.

★ si la condition à la limite de f est de type **mixte**, la somme des contributions dues aux faces de bord est :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} \beta m_{b_{ik}}^n \delta f_I^{n+1,k+1} \quad (\text{IV.G.32})$$

On ne peut donc **pas conclure** quant au signe de cette contribution, le facteur β étant choisi librement par l'utilisateur. Cette situation a été écartée dans le paragraphe G.

On peut donc conclure, quand il n'y a pas de condition à la limite de type mixte, que la matrice associée aux contributions des termes différentiels d'ordre 1 (convectifs) est à diagonale **simplement dominante**, à condition que la relation (IV.G.29) soit vérifiée exactement.

Conclusion

En travaillant sur des maillages non pathologiques (à transmittivité positive, voir la note de bas de page numéro 16) et en n'imposant pas de condition à la limite de type mixte sur les variables, on peut donc conclure que \underline{EM}_n est à **diagonale strictement dominante**, donc **inversible** (et la méthode itérative de Jacobi converge) à condition que la relation (IV.G.29) soit vérifiée exactement. Ce n'est généralement pas le cas (la précision du solveur de pression et la précision machine sont finies). Même si la contribution diagonale en $\frac{\rho_I^n |\Omega_i|}{\Delta t}$ peut suffire à assurer la dominance, on a cependant souhaité, dans *Code_Saturne*, s'affranchir du problème potentiel en prenant en compte les termes issus de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans la matrice.

Annexe 2 : Remarques à propos du respect du principe du maximum discret

Introduction

Les considérations exposées ici sont relatives au fait que, en continu, une variable qui n'est *que* convectée par un champ de débit à divergence nulle doit rester dans les bornes minimales et maximales définies par les conditions initiales et par les conditions aux limites en espace. Ainsi, les valeurs d'un scalaire passif initialement nul dont les conditions aux limites sont des conditions de Neumann homogène et des conditions de Dirichlet de valeur 1 devront nécessairement rester comprises dans l'intervalle $[0; 1]$. C'est ce que l'on entend ici par "principe du maximum".

Soient \underline{u} un champ de vitesse figé et connu et t un réel positif. On considère le problème modèle \mathcal{P} de convection des variables scalaires ρ et ρf , défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho \underline{u}) f) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.G.33})$$

avec une condition initiale f^0 donnée ainsi que des conditions aux limites associées sur f de type Dirichlet ou Neumann.

Dans *Code_Saturne*, la deuxième équation de \mathcal{P} est réécrite en continu, en utilisant la première, sous la forme :

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} - f \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \operatorname{div}((\rho \underline{u}) f) = 0 \quad (\text{IV.G.34})$$

et discrétisée temporellement comme suit :

$$\rho^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} - f^{n+1} \operatorname{div}(\rho \underline{u})^n + \operatorname{div}((\rho \underline{u})^n f^{n+1}) = 0 \quad (\text{IV.G.35})$$

Dans un premier temps, on va étudier la discrétisation spatiale associée à (IV.G.35), qui correspond donc à la prise en compte de la contribution de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans l'équation en continu (et se traduit par la présence de $-\operatorname{div}((\rho \underline{u})^n)$ dans l'expression de $f_s^{imp_I}$), puis dans un deuxième temps, la discrétisation spatiale de l'expression ;

$$\rho^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} + \operatorname{div}((\rho \underline{u})^n f^{n+1}) = 0 \quad (\text{IV.G.36})$$

qui correspond à un problème de convection pure classique.

On étudiera ensuite un exemple simplifié (monodimensionnel à masse volumique constante).

Les considérations présentes mériteraient d'être approfondies.

Cas général

Discrétisation spatiale de $\rho^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} - f^{n+1} \operatorname{div} (\rho \underline{u})^n + \operatorname{div} ((\rho \underline{u})^n f^{n+1}) = 0$

En intégrant sur une cellule Ω_i à l'aide de la formulation volumes finis habituelle, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_i} \left[\rho^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} - f^{n+1} \operatorname{div} (\rho \underline{u})^n + \operatorname{div} ((\rho \underline{u})^n f^{n+1}) \right] d\Omega \\
 &= \left[\rho_I^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} - \left(\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \right) \right] f_I^{n+1} \\
 &+ \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} f_{f_{ij}}^{n+1} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} f_{f_{b_{ik}}}^{n+1} \\
 &- \rho_I^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} f_I^n
 \end{aligned} \tag{IV.G.37}$$

où $f_{f_{ij}}^{n+1}$ et $f_{f_{b_{ik}}}^{n+1}$ sont les valeurs de f aux faces internes et de bord issues du choix du schéma convectif.

En reprenant les notations précédentes, en imposant un schéma décentré amont au premier membre (*i.e.* en exprimant $\delta f_{ij}^{n+1,k+1}$ et $\delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1}$) et en raisonnant en incréments (cf. sous-programme `navstv`), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 & \rho_I^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} \delta f_I^{n+1,k} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(-m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_J^{n+1,k+1} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(-m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} \right] \\
 &= -\rho^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} (f_I^{n+1,k} - f_I^n) \\
 &- \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} f_{ij}^{n+1,k} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} f_{b_{ik}}^{n+1,k} \right] \\
 &- \left(\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \right) f_I^{n+1,k}
 \end{aligned} \tag{IV.G.38}$$

avec :

$$\begin{cases} f_I^{n+1,0} = f_I^n \\ \delta f_I^{n+1,k+1} = f_I^{n+1,k+1} - f_I^{n+1,k}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{IV.G.39}$$

et $(f^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ suite convergeant vers f^{n+1} , n entier donné, solution de (IV.G.35) .

Discrétisation spatiale de $\rho^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} + \text{div}((\rho \underline{u})^n f^{n+1}) = 0$

En procédant de façon analogue et en adoptant les mêmes hypothèses, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \rho^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} \delta f_I^{n+1,k+1} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(+m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) \delta f_J^{n+1,k+1} \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(+m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_I^{n+1,k+1} + (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) \delta f_{b_{ik}}^{n+1,k+1} \right] \\
& = - \rho^n \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} (f_I^{n+1,k} - f_I^n) \\
& - \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} f_{f_{ij}}^{n+1,k} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}} f_{f_{b_{ik}}}^{n+1,k} \right]
\end{aligned} \tag{IV.G.40}$$

(où $f_{f_{ij}}^{n+1}$ et $f_{f_{b_{ik}}}^{n+1}$ sont les valeurs de f aux faces internes et de bord issues du choix du schéma convectif)

avec :

$$\begin{cases} f_I^{n+1,0} = f_I^n \\ \delta f_I^{n+1,k+1} = f_I^{n+1,k+1} - f_I^{n+1,k}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{IV.G.41}$$

et $(f^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ suite convergeant vers f^{n+1} , n entier donné, solution de (IV.G.36) .

Exemple pour le principe du maximum

On va maintenant se placer en monodimensionnel, sur un maillage régulier formé de trois cellules de pas h constant (figure IV.G.1) et étudier le comportement du premier membre pour les deux types d'expressions, entre le pas de temps $n \Delta t$ et le pas de temps $(n+1) \Delta t$, avec, comme condition initiale $f_1^0 = f_2^0 = f_3^0 = 0$ et comme conditions aux limites, une de type Dirichlet et l'autre de type Neumann homogène :

$$\begin{cases} f_{b_1} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{b_2} = 0 \end{cases} \tag{IV.G.42}$$

On supposera de plus que :

- ★ le schéma convectif utilisé est le schéma upwind
- ★ la masse volumique est constante
- ★ $(\rho u)_{b_1}^n > 0$, $(\rho u)_{12}^n > 0$, $(\rho u)_{23}^n > 0$, $(\rho u)_{b_2}^n > 0$ et $S_{b_1} < 0$.

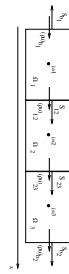


Figure IV.G.1: Définition du domaine de calcul unidimensionnel considéré.

On s'intéresse à l'influence sur le respect du principe du maximum discret de la précision avec laquelle est vérifiée sous forme discrète la relation :

$$\forall i \in [1, N], \quad \int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega = 0$$

soit, ici :

$$-(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} = (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} = (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} = (\rho u)_{b_2}^n \cdot S_{b_2} \quad (\text{IV.G.43})$$

Prise en compte de la contribution de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans la matrice

Le système à résoudre est alors, en omettant pour simplifier l'exposant $(n+1, k+1)$:

$$\begin{aligned} \rho_1^n \frac{|\Omega_1|}{\Delta t} \delta f_1 & - (\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} \delta f_1 = -(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} f_{b_1} \\ \rho_2^n \frac{|\Omega_2|}{\Delta t} \delta f_2 + (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \delta f_2 - (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \delta f_1 & = 0 \\ \rho_3^n \frac{|\Omega_3|}{\Delta t} \delta f_3 + (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \delta f_3 - (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \delta f_2 & = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.G.44})$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta f_1 &= f_{b_1} \frac{-(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1}}{\rho_1^n \frac{|\Omega_1|}{\Delta t} - (\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1}} \\ \delta f_2 &= +\delta f_1 \frac{(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12}}{\rho_2^n \frac{|\Omega_2|}{\Delta t} + (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12}} \\ \delta f_3 &= +\delta f_2 \frac{(\rho u)_{23}^n \cdot S_{23}}{\rho_3^n \frac{|\Omega_3|}{\Delta t} + (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23}} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.G.45})$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta f_1 &< 1 \\ \delta f_2 &< 1 \\ \delta f_3 &< 1 \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.G.46})$$

On obtient donc bien une solution qui vérifie le principe du maximum discret, même pour des grands pas de temps Δt , et ce, quelle que soit la précision avec laquelle est vérifiée, à l'étape de correction, la forme discrète (IV.G.43) de la conservation de la masse $\int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega = 0$ dont on ne s'est pas servi ici.

Sans la contribution de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans la matrice

On obtient de même :

$$\begin{aligned} \rho_1^n \frac{|\Omega_1|}{\Delta t} \delta f_1 + (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \delta f_1 &= -(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} f_{b_1} \\ \rho_2^n \frac{|\Omega_2|}{\Delta t} \delta f_2 + (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \delta f_2 - (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \delta f_1 &= 0 \\ \rho_3^n \frac{|\Omega_3|}{\Delta t} \delta f_3 - (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \delta f_2 + (\rho u)_{b_2}^n \cdot S_{b_2} \delta f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.G.47})$$

soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta f_1 &= f_{b_1} \frac{-(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1}}{\rho_1^n \frac{|\Omega_1|}{\Delta t} + (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12}} \\ \delta f_2 &= \delta f_1 \frac{(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12}}{\rho_2^n \frac{|\Omega_2|}{\Delta t} + (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23}} \\ \delta f_3 &= \delta f_2 \frac{(\rho u)_{23}^n \cdot S_{23}}{\rho_3^n \frac{|\Omega_3|}{\Delta t} + (\rho u)_{b_2}^n \cdot S_{b_2}} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.G.48})$$

Ici, on constate que le respect du principe du maximum discret :

$$\begin{cases} \delta f_1 \leq 1 \\ \delta f_2 \leq 1 \\ \delta f_3 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.G.49})$$

est équivalent à la condition :

$$\begin{cases} -(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} \leq \rho_1^n \frac{|\Omega_1|}{\Delta t} + (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \\ (\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \leq \rho_2^n \frac{|\Omega_2|}{\Delta t} + (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \\ (\rho u)_{23}^n \cdot S_{23} \leq \rho_3^n \frac{|\Omega_3|}{\Delta t} + (\rho u)_{b_2}^n \cdot S_{b_2} \end{cases} \quad (\text{IV.G.50})$$

Contrairement à la situation du paragraphe G, on ne peut obtenir ici un résultat qu'en faisant intervenir l'égalité (IV.G.43), forme discrète de la conservation de la masse. On obtient bien alors, à partir du système précédent :

$$\begin{cases} \delta f_1 < 1 \\ \delta f_2 < 1 \\ \delta f_3 < 1 \end{cases} \quad (\text{IV.G.51})$$

Si l'on s'intéresse à la cellule Ω_1 et que l'on suppose $(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} = -(\rho u)_{b_1}^n \cdot S_{b_1} - \varepsilon(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12}$ (où ε est la précision locale relative pour l'équation de conservation de la masse discrète), on constate que l'on obtient $\delta f_1 > f_{b_1} = 1$ (valeur non admissible) dès lors que :

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \Delta t}{\rho_1 |\Omega_1|}$$

c'est-à-dire dès que le nombre de CFL local $\frac{(\rho u)_{12}^n \cdot S_{12} \Delta t}{\rho_1 |\Omega_1|}$ excède l'inverse de la précision relative locale ε .

Conclusion

Prendre en compte la contribution de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dans la matrice permet un meilleur respect du principe du maximum discret, lorsque la précision de $\int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u}) \, d\Omega = 0$ n'est pas exactement vérifiée.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 203/ 400
---------	--	---

H- gradmc routine

Fonction

Le but de ce sous-programme est de calculer, au centre des cellules, le gradient d'une fonction scalaire, également connue au centre des cellules. Pour obtenir la valeur de toutes les composantes du gradient, une méthode de minimisation par moindres carrés est mise en œuvre : elle utilise l'estimation d'une composante du gradient aux faces, obtenue à partir des valeurs de la fonction au centre des cellules voisines. Cette méthode est activée lorsque l'indicateur IMRGRA vaut 1 et on l'utilise alors pour le calcul des gradients de toutes les grandeurs. Elle est beaucoup plus rapide que la méthode utilisée par défaut (IMRGRA=0), mais présente l'inconvénient d'être moins robuste sur des maillages non orthogonaux, le gradient produit étant moins régulier.

Discrétisation

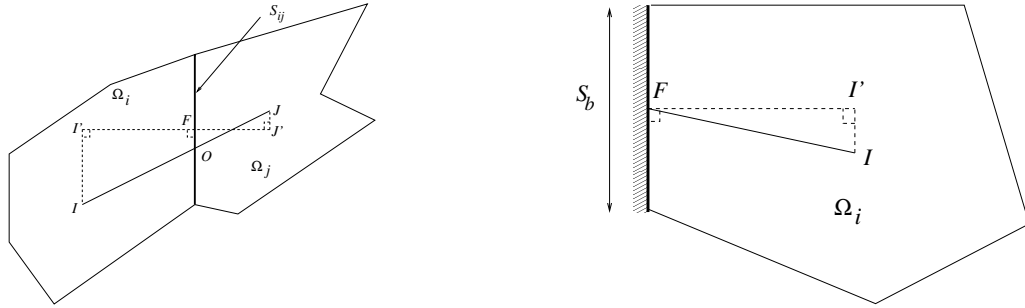


Figure IV.H.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

On se reportera aux notations de la figure IV.H.1. On cherche à calculer $\underline{G}_{c,i}$, gradient au centre de la cellule i de la fonction scalaire P . Soit $\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}$ une estimation à la face ij (dont les voisins sont les cellules i et j) du gradient projeté dans la direction du vecteur \underline{d}_{ij} (à préciser). De même, on note $\underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik}$ une estimation à la face de bord ik ($k^{\text{ième}}$ face de bord appuyée sur la cellule i) du gradient projeté dans la direction du vecteur $\underline{d}_{b,ik}$ (à préciser). L'idéal serait de pouvoir trouver un vecteur $\underline{G}_{c,i}$ tel que, pour toute face interne ij ($j \in \text{Vois}(i)$) et toute face de bord ik ($k \in \gamma_b(i)$), on ait :

$$\begin{cases} \underline{G}_{c,i} \cdot \underline{d}_{ij} = \underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij} \\ \underline{G}_{c,i} \cdot \underline{d}_{b,ik} = \underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik} \end{cases} \quad (\text{IV.H.1})$$

Comme il est généralement impossible d'obtenir l'égalité, on cherche à minimiser la fonctionnelle \mathcal{F}_i suivante :

$$\mathcal{F}_i(\underline{G}_{c,i}, \underline{G}_{c,i}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [\underline{G}_{c,i} \cdot \underline{d}_{ij} - \underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} [\underline{G}_{c,i} \cdot \underline{d}_{b,ik} - \underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik}]^2 \quad (\text{IV.H.2})$$

Pour ce faire, on annule la dérivée de $\mathcal{F}_i(\underline{G}_{c,i}, \underline{G}_{c,i})$ par rapport à chacune des trois composantes ($G_{c,i,x}, G_{c,i,y}, G_{c,i,z}$) du vecteur inconnu $\underline{G}_{c,i}$ et l'on résout le système qui en résulte.

Pour pouvoir inverser le système localement et donc à faible coût, on cherche à éviter les dépendances de $\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}$ et de $\underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik}$ au gradient $\underline{G}_{c,j}$ (gradient pris dans les cellules voisines). Un choix

particulier du vecteur \underline{d} permet d'atteindre ce but :

$$\underline{d}_{ij} = \frac{\underline{IJ}}{||\underline{IJ}||} \text{ et } \underline{d}_{b,ik} = \frac{(\underline{I'F})_l}{||\underline{I'F}'||} = n_{b,ik} \quad (\text{IV.H.3})$$

Ainsi, pour les faces internes, le vecteur \underline{d} est le vecteur normé joignant le centre des cellules voisines. La quantité $\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}$ est reliée directement aux valeurs de la variable P prises au centre des cellules, sans faire intervenir de gradient :

$$\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij} = \frac{P_j - P_i}{||\underline{IJ}||} \quad (\text{IV.H.4})$$

Pour les faces de bord, il est possible d'opter pour un choix plus naturel sans pour autant faire intervenir le gradient des cellules voisines : on utilise pour \underline{d} le vecteur normé orthogonal à la face, dirigé vers l'extérieur (le gradient le mieux connu, en particulier au bord, étant le gradient normal aux faces). On a alors :

$$\underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik} = \frac{P_{b,ik} - P_{i'}}{||\underline{I'F}'||} \quad (\text{IV.H.5})$$

On utilise alors les relations (IV.H.6) au bord (A_{ik} et B_{ik} permettent de représenter les conditions aux limites imposées, $P_{b,ik}$ en est issue et représente la valeur à la face de bord) :

$$\begin{cases} P_{i'} &= P_i + \underline{I'F}' \cdot \underline{G}_{c,i} \\ P_{b,ik} &= A_{ik} + B_{ik} P_{i'} = A_{ik} + B_{ik} (P_i + \underline{I'F}' \cdot \underline{G}_{c,i}) \end{cases} \quad (\text{IV.H.6})$$

On obtient finalement :

$$\underline{G}_{f,b,ik} \cdot \underline{d}_{b,ik} = \frac{1}{||\underline{I'F}'||} [A_{ik} + (B_{ik} - 1) (P_i + \underline{I'F}' \cdot \underline{G}_{c,i})] \quad (\text{IV.H.7})$$

L'équation (IV.H.7), qui fait intervenir $\underline{G}_{c,i}$, doit être utilisée pour modifier l'expression (IV.H.2) de la fonctionnelle avant de prendre sa différentielle. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\underline{G}_{c,i}, \underline{G}_{c,i}) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [\underline{G}_{c,i} \cdot \underline{d}_{ij} - \underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}]^2 + \\ &\frac{1}{2} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[\underline{G}_{c,i} \cdot \left(\underline{d}_{b,ik} - \frac{B_{ik} - 1}{||\underline{I'F}'||} \underline{I'F}' \right) - \frac{1}{||\underline{I'F}'||} (A_{ik} + (B_{ik} - 1) P_i) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.H.8})$$

On annule alors la dérivée de $\mathcal{F}_i(\underline{G}_{c,i}, \underline{G}_{c,i})$ par rapport à chacune des trois composantes ($G_{c,i,x}, G_{c,i,y}, G_{c,i,z}$) du vecteur inconnu $\underline{G}_{c,i}$. On obtient, pour chaque cellule i , le système 3×3 local (IV.H.9) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{i,xx} & C_{i,xy} & C_{i,xz} \\ C_{i,yx} & C_{i,yy} & C_{i,yz} \\ C_{i,zx} & C_{i,zy} & C_{i,zz} \end{bmatrix}}_{\underline{C}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} G_{c,i,x} \\ G_{c,i,y} \\ G_{c,i,z} \end{bmatrix}}_{\underline{G}_{c,i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{i,x} \\ T_{i,y} \\ T_{i,z} \end{bmatrix}}_{\underline{T}_i} \quad (\text{IV.H.9})$$

avec

$$\begin{cases} C_{i,lm} &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\underline{d}_{ij})_l (\underline{d}_{ij})_m + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left(\underline{d}_{b,ik} - \frac{B_{ik} - 1}{||\underline{I'F}'||} \underline{I'F}' \right)_l \left(\underline{d}_{b,ik} - \frac{B_{ik} - 1}{||\underline{I'F}'||} \underline{I'F}' \right)_m \\ T_{i,l} &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\underline{G}_{f,ij} \cdot \underline{d}_{ij}) (\underline{d}_{ij})_l + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \frac{1}{||\underline{I'F}'||} (A_{ik} + (B_{ik} - 1) P_i) \left(\underline{d}_{b,ik} - \frac{B_{ik} - 1}{||\underline{I'F}'||} \underline{I'F}' \right)_l \end{cases} \quad (\text{IV.H.10})$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
C_{i,l m} &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{\|IJ\|^2} (IJ)_l (IJ)_m + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left(n_{b,ik} + \frac{1 - B_{ik}}{\|IF'\|} II' \right)_l \left(n_{b,ik} + \frac{1 - B_{ik}}{\|IF'\|} II' \right)_m \\
T_{i,l} &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (P_j - P_i) \frac{(IJ)_l}{\|IJ\|^2} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \frac{1}{\|IF'\|} (A_{ik} + (B_{ik} - 1) P_i) \left(n_{b,ik} - \frac{B_{ik} - 1}{\|IF'\|} II' \right)_l
\end{aligned}
\tag{IV.H.11}$$

Mise en œuvre

La variable dont il faut calculer le gradient est contenue dans le tableau **PVAR**. Les conditions aux limites associées sont disponibles au travers des tableaux **COEFAP** et **COEFBP** qui représentent respectivement les grandeurs A et B utilisées ci-dessus. Les trois composantes du gradient seront contenues, en sortie du sous-programme, dans les tableaux **DPDX**, **DPDY** et **DPDZ**.

• Calcul de la matrice

Les **NCEL** matrices $\underline{\underline{C}}_i$ (matrices 3×3) sont stockées dans le tableau **COCG**, (de dimension **NCELET** $\times 3 \times 3$). Ce dernier est initialisé à zéro, puis son remplissage est réalisé dans des boucles sur les faces internes et les faces de bord. Les matrices $\underline{\underline{C}}_i$ étant symétriques, ces boucles ne servent qu'à remplir la partie triangulaire supérieure, le reste étant complété à la fin par symétrie.

Pour éviter de réaliser plusieurs fois les mêmes calculs géométriques, on conserve, en sortie de sous-programme, dans le tableau **COCG**, l'inverse des **NCEL** matrices $\underline{\underline{C}}_i$. De plus, pour les **NCELBR** cellules qui ont au moins une face de bord, on conserve dans tableau **COCGB**, de dimension **NCELBR** $\times 3 \times 3$, la contribution aux matrices $\underline{\underline{C}}_i$ des termes purement géométriques. On précise ces points ci-dessous. Notons donc dès à présent qu'il ne faut pas utiliser les tableaux **COCG** et **COCGB** par ailleurs comme tableaux de travail.

Cellule ne possédant pas de face de bord

Lorsque, pour une cellule, aucune des faces n'est une face de bord du domaine, l'expression de la matrice $\underline{\underline{C}}_i$ ne fait intervenir que des grandeurs géométriques et elle reste inchangée tant que le maillage n'est pas déformé. Son inverse n'est donc calculé qu'une seule fois, au premier appel de **GRADMC** avec **ICCOCG=1** (l'indicateur **INICOC**, local à **GRADMC**, est positionné à 0 dès lors que ces calculs géométriques ont été réalisés une fois). Le tableau **COCG** est ensuite réutilisé lors des appels ultérieurs au sous-programme **GRADMC**.

Cellule possédant au moins une face de bord

Lorsque l'ensemble des faces d'une cellule contient au moins une face de bord du domaine, un terme contributeur aux matrices $\underline{\underline{C}}_i$ est spécifique à la variable dont on cherche à calculer le gradient, au travers du coefficient B_{ik} issu des conditions aux limites. Il s'agit de :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} \left(n_{b,ik} + \frac{1 - B_{ik}}{\|IF'\|} II' \right)_l \left(n_{b,ik} + \frac{1 - B_{ik}}{\|IF'\|} II' \right)_m \tag{IV.H.12}$$

Au premier appel réalisé avec **ICCOCG=1**, on calcule la contribution des faces internes et on les stocke dans le tableau **COCGB**, qui sera disponible lors des appels ultérieurs. En effet, la contribution des faces internes est de nature purement géométrique et reste donc inchangée tant que le maillage ne subit pas de déformation. Elle s'écrit :

$$\sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{\|IJ\|^2} (IJ)_l (IJ)_m$$

À tous les appels réalisés avec **ICCOCG=1**, les termes qui dépendent des faces de bord (IV.H.12) sont ensuite calculés et on additionne cette contribution et **COCGB** qui contient celle des faces internes : on obtient ainsi les matrices $\underline{\underline{C}}_i$ dans le tableau **COCG**. Leur inverse se calcule indépendamment pour chaque cellule et on le conserve dans **COCG** qui sera disponible lors des appels ultérieurs.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 207/400
---------	--	---

Lorsque GRADMC a été appelé une fois avec ICCOCG=1, des calculs peuvent être évités en positionnant l'indicateur ICCOCG à 0 (si ICCOCG est positionné à 1, tous les calculs relatifs aux cellules ayant au moins une face de bord sont refaits).

- Si GRADMC est utilisé pour calculer le gradient de la même variable (ou, plus généralement, d'une variable dont les conditions aux limites conduisent aux mêmes valeurs du coefficient B_{ik}), les matrices \underline{C}_i sont inchangées et leur inverse est disponible dans COCG (on positionne ICCOCG à 0 pour éviter de refaire les calculs).
- Dans le cas contraire, les termes relatifs aux faces de bord (IV.H.12) sont recalculés et on additionne cette contribution et COCGB qui fournit celle des faces internes : on obtient ainsi les matrices \underline{C}_i dans COCG. Il reste alors à inverser ces matrices.

Remarque :

Pour sauvegarder les contributions géométriques dans COCGB, on a recours à une boucle portant sur les NCELBR cellules dont au moins une face est une face de bord du domaine. Le numéro de ces cellules est donné par IEL = ICELBR(II) (II variant de 1 à NCELBR). Les opérations réalisées dans cette boucle sont du type COCGB(II,1,1) = COCG(IEL,1,1). La structure (injective) de ICELBR permet de forcer la vectorisation de la boucle.

• Inversion de la matrice

On calcule les coefficients de la comatrice, puis l'inverse. Pour des questions de vectorisation, la boucle sur les NCEL éléments est remplacée par une série de boucles en vectorisation forcée sur des blocs de NBLOC=1024 éléments. Le reliquat (NCEL - E(NCEL/1024) × 1024) est traité après les boucles. La matrice inverse est ensuite stockée dans COCG (toujours en utilisant sa propriété de symétrie).

• Calcul du second membre et résolution

Le second membre est stocké dans BX, BY et BZ. Le gradient obtenu par résolution des systèmes locaux est stocké dans DPDX, DPDY et DPDZ.

• Remarque : gradient sans reconstruction

(non consistant sur maillage non orthogonal)

Dans le cas où l'utilisateur souhaite ne pas reconstruire le gradient (*i.e.* ne pas inclure les termes de non orthogonalité au calcul du gradient), une méthode spécifique est mise en œuvre, qui n'a pas de rapport avec la méthode de moindres carrés présentée ci-dessus.

Le volume de la cellule i est noté Ω_i . P_{ij} (resp. $P_{b,ik}$) représente la valeur estimée de la variable P à la face interne ij (resp. à la face de bord ik) de vecteur normal associé \underline{S}_{ij} (resp. $\underline{S}_{b,ik}$). Le gradient est simplement calculé en utilisant la formule suivante :

$$\underline{G}_{c,i} = \frac{1}{\Omega_i} \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} P_{ij} \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} P_{b,ik} \underline{S}_{b,ik} \right] \quad (\text{IV.H.13})$$

Les valeurs aux faces sont obtenues simplement comme suit (avec $\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}}$) :

$$\begin{cases} P_{ij} &= \alpha_{ij} P_i + (1 - \alpha_{ij}) P_j \\ P_{b,ik} &= A_{ik} + B_{ik} P_i \end{cases} \quad (\text{IV.H.14})$$

Points à traiter

• Vectorisation forcée

Il est peut-être possible de s'affranchir du découpage en boucles de 1024 si les compilateurs sont

capables d'effectuer la vectorisation sans cette aide. On note cependant que ce découpage en boucles de 1024 n'a pas de coût CPU supplémentaire, et que le coût mémoire associé est négligeable. Le seul inconvénient réside dans la relative complexité de l'écriture.

• Choix du vecteur d

Le choix $d_{ij} = \frac{IJ}{\|IJ\|}$ permet de calculer simplement une composante du gradient à la face en ne faisant intervenir que les valeurs de la variable au centre des cellules voisines. Le choix $d_{ij} = \frac{I'J'}{\|I'J'\|}$ serait également possible, et peut-être meilleur, mais conduirait naturellement à faire intervenir, pour le calcul de la composante du gradient normale aux faces, les valeurs de la variable aux points I' et J' , et donc les valeurs du gradient dans les cellules voisines. Il en résulterait donc un système couplé, auquel un algorithme itératif (voir GRADRC) pourrait être appliqué. L'aspect temps calcul, atout majeur de la méthode actuelle, s'en ressentirait sans doute.

• Amélioration de la méthode

Cette méthode rencontre des difficultés dans le cas de maillages assez “non orthogonaux” (cas de la voiture maillé en tétraèdres par exemple). Une voie d'amélioration possible est d'utiliser un support étendu (le support est l'ensemble des cellules utilisées pour calculer le gradient en une cellule donnée). Un exemple est fourni sur la figure IV.H.2 ci-dessous : si la cellule I est la cellule courante, on choisit pour support les cellules de centre J telles que la droite (IJ) soit la plus orthogonale possible à une face de la cellule I .

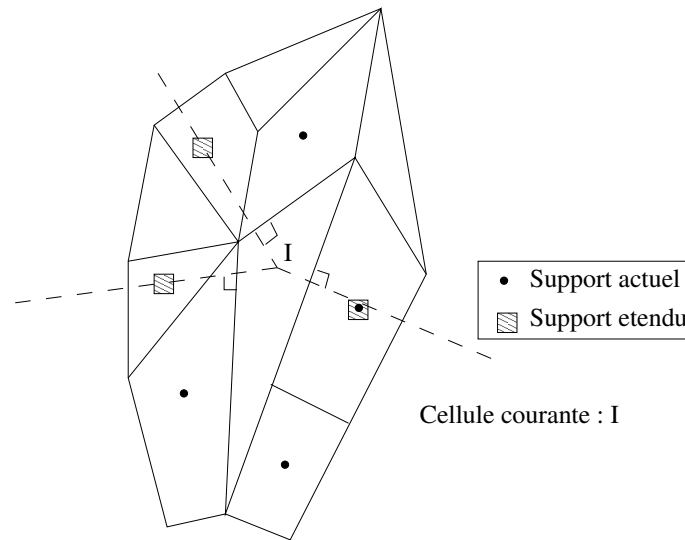


Figure IV.H.2: Différents supports pour le calcul du gradient.

I- gradrc routine

Fonction

Le but de ce sous-programme est de calculer, au centre des cellules, le gradient d'une fonction scalaire, également connue au centre des cellules. Pour obtenir la valeur du gradient, une méthode itérative de reconstruction pour les maillages non orthogonaux est mise en œuvre : elle fait appel à un développement limité d'ordre 1 en espace sur la variable, obtenu à partir de la valeur de la fonction et de son gradient au centre de la cellule. Cette méthode, choisie comme option par défaut, correspond à $\text{IMRGRA} = 0$ et est utilisée pour le calcul des gradients de toutes les grandeurs. Cette technique est plus robuste mais beaucoup plus lente que la méthode par moindres carrés correspondant à $\text{IMRGRA} = 1$.

Discrétisation

Méthode générale

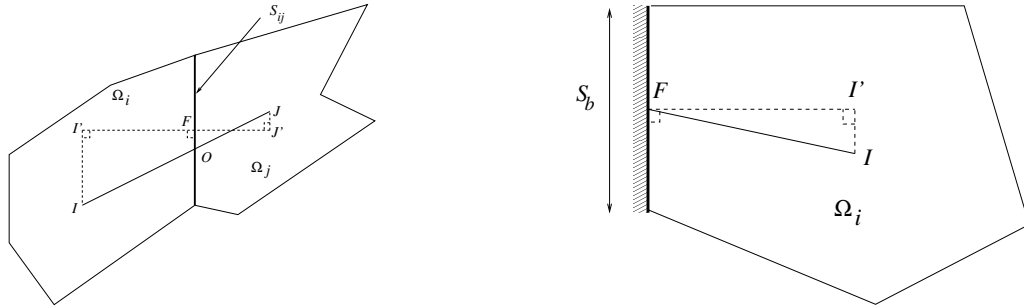


Figure IV.I.1: Définition des entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

On se reportera aux notations de la figure IV.I.1, qui correspondent à celles employées dans le sous-programme **gradmc**. On cherche à calculer $\underline{G}_{c,i}$, gradient au centre de la cellule i de la fonction scalaire P . Le volume de la cellule i est noté Ω_i . Soit $\underline{G}_{f,ij}$ la valeur du gradient à la face ij dont les voisins sont les cellules i et j . P_{ij} (resp. $P_{b,ik}$) représente la valeur estimée de la variable P à la face interne ij (resp. à la face de bord ik , $k^{\text{ième}}$ face de bord appuyée sur la cellule i) de vecteur normal associé \underline{S}_{ij} (resp. $\underline{S}_{b,ik}$).

Par définition :

$$\begin{aligned}\underline{G}_{c,i} &= (\nabla P)_I \\ \underline{G}_{f,ij} &= (\nabla P)_{f,ij}\end{aligned}$$

On a :

$$\underline{G}_{f,ij} = (\nabla P)_{O_{ij}} = (\nabla P)_{F_{ij}} \text{ (à l'ordre 1 en } P)$$

Afin de prendre en compte les non orthogonalités éventuelles du maillage, on calcule le gradient $\underline{G}_{c,i}$

en effectuant un développement limité d'ordre 1 en espace. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| (\nabla P)_I &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega_i} \nabla P \, d\Omega = \sum_{j \in \text{Vois}(i)} P_{ij} \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} P_{b_{ik}} \underline{S}_{b_{ik}} \\
&= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [P_{O_{ij}} + \underline{O_{ij} F_{ij}} \cdot (\nabla P)_{O_{ij}}] \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_{I'}) \underline{S}_{b_{ik}} \quad (\text{IV.I.1}) \\
&= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] \underline{S}_{ij} + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [\underline{O_{ij} F_{ij}} \cdot (\nabla P)_{f,ij}] \underline{S}_{ij} \\
&\quad + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_{I'}) \underline{S}_{b_{ik}}
\end{aligned}$$

La variable INC permet d'affecter correctement les conditions aux limites des quantités dont on veut prendre le gradient. En effet,

- INC = 1 correspond à un calcul de gradient de variable totale et donc à des conditions aux limites standards,
- INC = 0 correspond à un calcul de variable en incrément et donc à des conditions aux limites associées homogènes.

En faisant une approximation sur P d'ordre 1 en espace à nouveau :

$$\begin{cases} (\nabla P)_{f,ij} &= \frac{1}{2} [(\nabla P)_I + (\nabla P)_J] \\ P_{I'} &= P_I + \underline{II'} \cdot (\nabla P)_I \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{G}_{c,i} &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J) + \frac{1}{2} \underline{O_{ij} F_{ij}} \cdot (\underline{G}_{c,i} + \underline{G}_{c,j}) \right] \underline{S}_{ij} \\
&\quad + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I + B_{b,ik} \underline{II'} \cdot \underline{G}_{c,i}] \underline{S}_{b_{ik}}
\end{aligned}$$

en notant $\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}}$.

On regroupe à gauche les termes en $\underline{G}_{c,i}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \underline{G}_{c,i} - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (\underline{O_{ij} F_{ij}} \cdot \underline{G}_{c,i}) \underline{S}_{ij} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} (\underline{II'} \cdot \underline{G}_{c,i}) \underline{S}_{b_{ik}} = \\
\sum_{j \in \text{Vois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] \underline{S}_{ij} + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (\underline{O_{ij} F_{ij}} \cdot \underline{G}_{c,j}) \underline{S}_{ij} \\
+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I) \underline{S}_{b_{ik}} \quad (\text{IV.I.2})
\end{aligned}$$

ce qui donne pour la direction η ($\eta, \beta = x, y$ ou z) :

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| G_{c,i,\eta} - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta} (\underline{O_{ij} F_{ij}})_{,\beta} G_{c,i,\beta} \right) S_{ij,\eta} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} \left(\sum_{\beta} (\underline{II'})_{,\beta} G_{c,i,\beta} \right) S_{b_{ik},\eta} = \\
\sum_{j \in \text{Vois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] S_{ij,\eta} + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta} (\underline{O_{ij} F_{ij}})_{,\beta} G_{c,j,\beta} \right) S_{ij,\eta} \\
+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I) S_{b_{ik},\eta} \quad (\text{IV.I.3})
\end{aligned}$$

Cas sans reconstruction des non orthogonalités

Lorsque le maillage est orthogonal ou lorsqu'on ne veut pas reconstruire, seules les contributions d'ordre 0 au centre des cellules interviennent dans le calcul du gradient ($\underline{II}' = 0$, $\underline{OF} = 0$) :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_i| \underline{G}_{c,i} &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega_i} \underline{\nabla} P d\Omega = \sum_{j \in \text{Vois}(i)} P_{ij} \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} P_{b,ik} \underline{S}_{b_{ik}} \\
 &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I) \underline{S}_{b_{ik}}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\underline{G}_{c,i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \cdot \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} [\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J] \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I) \underline{S}_{b_{ik}} \right] \quad (\text{IV.I.4})$$

REMARQUE

Le gradient non reconstruit $\underline{G}_{c,i}^{NRec}$ se calcule donc très facilement et directement *via* l'équation (IV.I.4). Il n'est cependant pas consistant sur maillage non orthogonal.

Reconstruction

Méthode de résolution

Afin de pouvoir résoudre le système (IV.I.2), on va impliciter les termes en $\underline{G}_{c,i}$, expliciter ceux en $\underline{G}_{c,j}$ et raisonner de façon itérative en introduisant une suite d'incrément $(\delta \underline{G}_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \delta \underline{G}_i^0 = \underline{G}_{c,i}^{NRec} \\ \delta \underline{G}_i^{k+1} = \underline{G}_{c,i}^{k+1} - \underline{G}_{c,i}^k \end{cases} \quad (\text{IV.I.5})$$

et de système associé, dans la direction η :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_i| G_{c,i,\eta}^{k+1} - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta} (\underline{O}_{ij} \underline{F}_{ij})_{,\beta} G_{c,i,\beta}^{k+1} \right) S_{ij,\eta} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} \left(\sum_{\beta} (\underline{II}')_{,\beta} G_{c,i,\beta}^{k+1} \right) S_{b_{ik},\eta} \\
 = \sum_{j \in \text{Vois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] S_{ij,\eta} + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta} (\underline{O}_{ij} \underline{F}_{ij})_{,\beta} G_{c,j,\beta}^k \right) S_{ij,\eta} \\
 + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_I) S_{b_{ik},\eta} \quad (\text{IV.I.6})
 \end{aligned}$$

ou, comme :

$$\underline{G}_{c,i}^{k+1} = \underline{G}_{c,i}^k + \delta \underline{G}_i^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \delta G_{i,\eta}^{k+1} - \sum_{j \in V_{ois}(i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta} (O_{ij} F_{ij})_{,\beta} \delta G_{c,i,\beta}^{k+1} \right) S_{ij,\eta} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} \left(\sum_{\beta} (\underline{II}')_{,\beta} \delta G_{c,i,\beta}^{k+1} \right) S_{b_{ik},\eta} \\
= -|\Omega_i| G_{c,i,\eta}^k + \sum_{j \in V_{ois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] S_{ij,\eta} \\
+ \sum_{j \in V_{ois}(i)} \left(\sum_{\beta} (O_{ij} F_{ij})_{,\beta} \frac{1}{2} (G_{c,i,\beta}^k + G_{c,j,\beta}^k) \right) S_{ij,\eta} \\
+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} (P_I + \left(\sum_{\beta} (\underline{II}')_{,\beta} G_{c,i,\beta}^k \right))) S_{b_{ik},\eta} \quad (\text{IV.I.7})
\end{aligned}$$

L'équation (IV.I.7) conduit à un système matriciel local par rapport à chacune des trois composantes $(\delta G_{i,x}^{k+1}, \delta G_{i,y}^{k+1}, \delta G_{i,z}^{k+1})$ du vecteur inconnu $\delta \underline{G}_i^{k+1}$. On obtient donc, pour chaque cellule i , le système 3×3 suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{i,xx} & C_{i,xy} & C_{i,xz} \\ C_{i,yx} & C_{i,yy} & C_{i,yz} \\ C_{i,zx} & C_{i,zy} & C_{i,zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta G_{i,x}^{k+1} \\ \delta G_{i,y}^{k+1} \\ \delta G_{i,z}^{k+1} \end{bmatrix}}_{\delta \underline{G}_i^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,x}^{k+1} \\ R_{i,y}^{k+1} \\ R_{i,z}^{k+1} \end{bmatrix}}_{\underline{R}_i^{k+1}} \quad (\text{IV.I.8})$$

avec, $(\eta, \beta = x, y \text{ ou } z)$:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{i,\eta\eta} &= |\Omega_i| - \frac{1}{2} \sum_{j \in V_{ois}(i)} (O_{ij} F_{ij})_{,\eta} S_{ij,\eta} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} (\underline{II}')_{,\eta} S_{b_{ik},\eta} \\ C_{i,\eta\beta} &= -\frac{1}{2} \sum_{j \in V_{ois}(i)} (O_{ij} F_{ij})_{,\beta} S_{ij,\eta} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} (\underline{II}')_{,\beta} S_{b_{ik},\eta} \quad \text{pour } \eta \neq \beta \\ R_{i,\eta}^{k+1} &= -|\Omega_i| G_{c,i,\eta}^k + \sum_{j \in V_{ois}(i)} [(\alpha_{ij} P_I + (1 - \alpha_{ij}) P_J)] S_{ij,\eta} \\ &+ \sum_{j \in V_{ois}(i)} \left(\sum_{\beta} (O_{ij} F_{ij})_{,\beta} \frac{1}{2} (G_{c,i,\beta}^k + G_{c,j,\beta}^k) \right) S_{ij,\eta} \\ &+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} \left(P_I + \left(\sum_{\beta} (\underline{II}')_{,\beta} G_{c,i,\beta}^k \right) \right)) S_{b_{ik},\eta} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.I.9})$$

L'inversion de la matrice $\underline{\underline{C}}_i$ permet de calculer $(\delta \underline{G}_i^{k+1})$ et donc (\underline{G}_i^{k+1}) . Les itérations s'arrêtent lorsque la norme euclidienne du second membre \underline{R}_i^{k+1} tend vers zéro (*i.e.* lorsque la norme euclidienne de $(\delta \underline{G}_i^k)$ tend vers zéro) ou lorsque le nombre d'itérations en k fixé maximal est atteint.

REMARQUE 3

Pour les conditions aux limites en pression, un traitement particulier est mis en œuvre, surtout utile dans les cas où un gradient de pression (hydrostatique ou autre) nécessite une attention spécifique aux bords, où une condition à la limite de type Neumann homogène est généralement inadaptée. Soit $P_{F_{b_{ik}}}$ la valeur de la pression à la face associée, que l'on veut calculer.

On note que :

$$\underline{I'} F_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I = \underline{I'} F_{b_{ik}} \cdot \underline{G}_{c,i} = \overline{I'} F_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 214/400
---------	--	---

avec les conventions précédentes.

Sur maillage orthogonal On se place dans le cas d'un maillage orthogonal, *i.e.* pour toute cellule Ω_I , I et son projeté I' sont identiques. Soit $M_{b_{ik}}$ le milieu du segment $IF_{b_{ik}}$. On peut écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_{F_{b_{ik}}} &= P_{M_{b_{ik}}} + \overline{M_{b_{ik}}F_{b_{ik}}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{M_{b_{ik}}} + \overline{M_{b_{ik}}F_{b_{ik}}}^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\delta^2 P}{\delta n^2} \Big|_{M_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h^3) \\ P_I &= P_{M_{b_{ik}}} + \overline{M_{b_{ik}}I} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{M_{b_{ik}}} + \overline{M_{b_{ik}}I}^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\delta^2 P}{\delta n^2} \Big|_{M_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

avec $\overline{M_{b_{ik}}I} = -\overline{M_{b_{ik}}F_{b_{ik}}}$.

On obtient donc :

$$P_{F_{b_{ik}}} - P_I = \overline{IF}_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{M_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h^3) \quad (\text{IV.I.10})$$

Grâce à la formule des accroissements finis :

$$\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{M_{b_{ik}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I + \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} \right] + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.11})$$

On s'intéresse aux cas suivants :

- condition à la limite de type Dirichlet
 $P_{F_{b_{ik}}} = P_{IMPOSE}$, aucun traitement particulier

- condition à la limite de type Neumann homogène standard
On veut imposer :

$$\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} = 0 + \mathcal{O}(h) \quad (\text{IV.I.12})$$

On a :

$$\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I = \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h)$$

et comme :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \overline{IF}_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.13})$$

on en déduit :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \overline{IF}_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.14})$$

soit :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.15})$$

On obtient donc une approximation d'ordre 1.

- condition à la limite de type Neumann homogène améliorée
Des égalités (IV.I.10, IV.I.11), on tire :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \frac{1}{2} \overline{IF}_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I + \mathcal{O}(h^3)$$

On obtient donc une approximation d'ordre 2.

- condition à la limite de type extrapolation du gradient $\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} = \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I$

Des deux égalités (IV.I.10, IV.I.11), on déduit :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \overline{IF}_{b_{ik}} \cdot \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_I + \mathcal{O}(h^3) \quad (\text{IV.I.16})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 215/400
---------	--	---

On obtient donc également une approximation d'ordre 2.

Sur maillage non orthogonal Dans ce cas, on peut seulement écrire :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \frac{1}{2} \underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot [(\underline{\nabla}P)_{I'} + (\underline{\nabla}P)_{F_{b_{ik}}}] + \mathcal{O}(h^3) \quad (\text{IV.I.17})$$

• condition à la limite de type Dirichlet
 $P_{F_{b_{ik}}} = P_{IMPOSE}$, toujours aucun traitement particulier

• condition à la limite de type Neumann homogène standard
On veut :

$$\left. \frac{\delta P}{\delta n} \right|_{F_{b_{ik}}} = 0 + \mathcal{O}(h) \quad (\text{IV.I.18})$$

ce qui entraîne :

$$\underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot (\underline{\nabla}P)_{F_{b_{ik}}} = \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.19})$$

On peut écrire :

$$(\underline{\nabla}P)_{I'} = (\underline{\nabla}P)_{F_{b_{ik}}} + \mathcal{O}(h)$$

d'où :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.20})$$

On obtient donc une approximation d'ordre 1.

• condition à la limite de type Neumann homogène améliorée
Le gradient n'est connu qu'au centre des cellules I et non aux points I' .

$$(\underline{\nabla}P)_{I'} = (\underline{\nabla}P)_I + \mathcal{O}(h)$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_{F_{b_{ik}}} &= P_{I'} + \frac{1}{2} \underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot [(\underline{\nabla}P)_{I'} + (\underline{\nabla}P)_{F_{b_{ik}}}] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= P_{I'} + \frac{1}{2} \underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot [(\underline{\nabla}P)_I + (\underline{\nabla}P)_{F_{b_{ik}}}] + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.I.21})$$

Compte-tenu de la condition imposée et de l'équation (IV.I.19), seule la contribution en I reste.

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \frac{1}{2} \underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot (\underline{\nabla}P)_I + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.22})$$

On obtient donc une approximation d'ordre 1.

• condition à la limite de type extrapolation du gradient $\left. \frac{\delta P}{\delta n} \right|_{F_{b_{ik}}} = \left. \frac{\delta P}{\delta n} \right|_I$

En tenant compte de cette égalité, l'expression de $P_{F_{b_{ik}}}$ devient :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot (\underline{\nabla}P)_I + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{IV.I.23})$$

On obtient également une approximation d'ordre 1.

• Conclusion

On peut récapituler toutes ces situations *via* la formule :

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \text{EXTRAP} (\underline{I'F}_{b_{ik}} \cdot (\underline{\nabla}P)_I)$$

avec EXTRAP valant 0, 0.5 ou 1.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 216/400
---------	--	---

Il ne faut en aucun cas utiliser EXTRAP avec des conditions de type Neumann non homogènes $\frac{\delta P}{\delta n} \Big|_F = g_{bord}$, g_{bord} donnée non nulle ou de type Robin (mixtes) plus généralement $aP_{F_{b_{ik}}} + b \frac{\delta P}{\delta n} \Big|_{F_{b_{ik}}} = g_{bord}$, le recours à EXTRAP n'ayant plus aucun sens.

Mise en œuvre

La variable dont il faut calculer le gradient est contenue dans le tableau **PVAR**. Les conditions aux limites associées sont disponibles au travers des tableaux **COEFAP** et **COEFBP** qui représentent respectivement les grandeurs A et B utilisées ci-dessus. Les trois composantes du gradient sont contenues, en sortie du sous-programme, dans les tableaux **DPDX**, **DPDY** et **DPDZ**.

• Initialisations

Le tableau (**BX**, **BY**, **BZ**) du second membre \underline{R}_i est initialisé à zéro.

Le calcul du gradient cellule non reconstruit $\underline{G}_{c,i}^{NRec}$ est réalisé et stocké dans les tableaux **DPDX**, **DPDY** et **DPDZ**. Si aucune reconstruction n'est à faire, on a fini.

Reconstruction

Sinon, on cherche à résoudre le système (IV.I.7) en incréments de gradient $\delta \underline{G}_i^{k+1}$. Le gradient non reconstruit constitue alors une première estimation du gradient à calculer par incréments.

On effectue les opérations suivantes :

Phase préliminaire

Calcul de la matrice, hors boucle en k

Les **NCEL** matrices $\underline{\underline{C}}_i$ (matrices non symétriques 3×3) sont stockées dans le tableau **CCCG**, (de dimension **NCELET** $\times 3 \times 3$). Ce dernier est initialisé à zéro, puis son remplissage est réalisé dans des boucles sur les faces internes et les faces de bord. Pour éviter de réaliser plusieurs fois les mêmes calculs géométriques, on conserve, en sortie de sous-programme, dans le tableau **CCCG**, l'inverse des **NCEL** matrices $\underline{\underline{C}}_i$.

Cellule ne possédant pas de face de bord

Lorsque, pour une cellule, aucune des faces n'est une face de bord du domaine, l'expression de la matrice $\underline{\underline{C}}_i$ ne fait intervenir que des grandeurs géométriques. Son inverse peut être donc calculé une seule fois, stocké dans **CCCG** et réutilisé si l'on rappelle **gradrc** séquentiellement et si on est sur un maillage fixe (indicateur **ICCCG** positionné à 0).

Cellule possédant au moins une face de bord

Lorsque l'ensemble des faces d'une cellule contient au moins une face de bord du domaine, un terme contributeur aux matrices $\underline{\underline{C}}_i$ est spécifique à la variable dont on cherche à calculer le gradient, au travers du coefficient $B_{b,ik}$ issu des conditions aux limites. Il s'agit de :

$$- \sum_{k \in \gamma_b(i)} B_{b,ik} (\underline{II}')_{\beta} S_{b_{ik}, \eta}$$

Si, lors de l'appel précédent¹ à **gradrc**, les conditions aux limites relatives à la variable P traitée conduisaient à des valeurs identiques de $B_{b,ik}$, les matrices $\underline{\underline{C}}_i$ sont donc inchangées et l'inverse est encore disponible dans **CCCG**. Pour éviter de refaire les calculs associés, l'indicateur **ICCCG**, passé en argument, est alors positionné à 0.

¹donc, à partir du second appel au moins

Si, au contraire, les valeurs de $B_{b,ik}$ sont différentes de celles de l'appel précédent, il est alors indispensable de recalculer le terme et l'indicateur ICCOCG doit être positionné à 1.

Toutefois compte-tenu du coût total de l'inversion de ces matrices relativement au coût global du sous-programme, cette démarche de stockage et donc d'économie de temps C.P.U. est un peu superflue et risque d'engendrer des erreurs (indicateur ICCOCG positionné à 0 au lieu de 1) beaucoup plus pénalisantes que l'éventuel gain escompté.

Inversion de la matrice

On calcule les coefficients de la comatrice, puis l'inverse. Pour des questions de vectorisation, la boucle sur les NCEL éléments est remplacée par une série de boucles en vectorisation forcée sur des blocs de NBLOC=1024 éléments. Le reliquat ($\text{NCEL} - E(\text{NCEL}/1024) \times 1024$) est traité après les boucles. La matrice inverse est ensuite stockée dans COCG.

Phase itérative k , $k \in \mathbb{N}$

On suppose $\delta \underline{G}_i^k$ connu et donc $\underline{G}_{c,i}^k$ pour k donné et sur toute cellule Ω_i et on veut calculer $\delta \underline{G}_i^{k+1}$ et $\underline{G}_{c,i}^{k+1}$.

Calcul du second membre \underline{R}_i^{k+1} et résolution

Le calcul proprement dit du second membre \underline{R}_i^{k+1} correspondant au système (IV.I.9) est effectué et stocké dans le tableau (BX, BY, BZ). Il est initialisé, à chaque pas k , par la valeur du gradient $\underline{G}_{c,i}^k$ multiplié par le volume de la cellule $|\Omega_i|$, avec $\underline{G}_{c,i}^0 = \underline{G}_{c,i}^{Nrec}$. L'incrément ($\delta \underline{G}_i^{k+1}$) de gradient est obtenu par $\underline{C}_i^{-1} \underline{R}_i^{k+1}$ et ajouté dans les tableaux DPDY, DPDX et DPDZ pour obtenir $\underline{G}_{c,i}^{k+1}$.

En ce qui concerne les conditions aux limites en pression, elles sont traitées comme suit dans Code_Saturne:

$$\begin{cases} P_{I'} &= P_I + \underline{II}' \cdot \underline{G}_{c,i} \\ P_{b,ik} &= \text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} P_{I'} = \text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} (P_I + \underline{II}' \cdot \underline{G}_{c,i}) \\ P_{b_1,ik} &= P_I + \underline{IF}_{ij} \cdot \underline{G}_{c,i} \\ P_{f,b_{ik}} &= B_{b,ik} (\text{EXTRAP } P_{b_1,ik} + (1 - \text{EXTRAP}) P_{b,ik}) + (1 - B_{b,ik}) P_{b,ik} \end{cases}$$

ce qui correspond à :

- lorsqu'on veut imposer des conditions de Dirichlet ($A_{b,ik} = P_{F_{b_{ik}}}$, $B_{b,ik} = 0$),

$$P_{F_{b_{ik}}} = P_{IMPOSE} \quad (\text{IV.I.24})$$

pour toute valeur de EXTRAP.

- lorsqu'on veut imposer des conditions de flux ($A_{b,ik} = 0$, $B_{b,ik} = 1$) (condition de type Neumann)

$$P_{F_{b_{ik}}} = \text{EXTRAP } (P_I + (\underline{IF}_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I) + (1 - \text{EXTRAP}) P_{I'}) \quad (\text{IV.I.25})$$

seules trois valeurs de EXTRAP sont licites.

- avec un maillage non orthogonal

L'ordre obtenu est égal à 1 dans tous les cas.

EXTRAP = 0	Neumann homogène	$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \mathcal{O}(h^2)$
EXTRAP = $\frac{1}{2}$	Neumann homogène amélioré	$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \frac{1}{2} \underline{I}' F_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I + \mathcal{O}(h^2)$
EXTRAP = 1	extrapolation du gradient	$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \underline{I}' F_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I + \mathcal{O}(h^2)$

- avec un maillage orthogonal

On peut atteindre l'ordre deux.

EXTRAP = 0	Neumann homogène on est à l'ordre 1	$P_{F_{b_{ik}}} = P_{I'} + \mathcal{O}(h^2)$
EXTRAP = $\frac{1}{2}$	Neumann homogène amélioré on est à l'ordre 2	$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \frac{1}{2} \underline{IF}_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I + \mathcal{O}(h^3)$
EXTRAP = 1	extrapolation du gradient on est à l'ordre 2	$P_{F_{b_{ik}}} = P_I + \underline{IF}_{b_{ik}} \cdot (\nabla P)_I + \mathcal{O}(h^3)$

Test de convergence de la méthode itérative de résolution

On calcule la norme euclidienne **RESIDU** du second membre (BX, BY, BZ).

On arrête les itérations sur k si le test de convergence pour cette norme ou le nombre de sweeps maximal **NSWRGP** est atteint. La valeur par défaut de **NSWRGP** est fixée à 100, ce qui permet un calcul suffisamment précis pour l'ordre d'espace considéré.

Sinon, on continue d'itérer sur k .

Points à traiter

• Vectorisation forcée

Il est peut-être possible de s'affranchir du découpage en boucles de 1024 si les compilateurs sont capables d'effectuer la vectorisation sans cette aide. On note cependant que ce découpage en boucles de 1024 n'a pas de coût CPU supplémentaire, et que le coût mémoire associé est négligeable. Le seul inconvénient réside dans la relative complexité de l'écriture.

• Traitement des conditions aux limites de pression

Actuellement, l'ordre deux décrit dans le cas EXTRAP = $\frac{1}{2}$ relativement aux conditions aux limites de pression n'existe pas dans *Code_Saturne* en non orthogonal. Mais en a-t-on vraiment besoin ?

• Méthode itérative de résolution

La méthode itérative de résolution adoptée dans ce sous-programme marche, *i.e.* converge, mais ne rentre dans aucun cadre théorique précis. Des réflexions sur le sujet pourraient éventuellement permettre d'exhiber certaines propriétés des matrices considérées, cerner les limites d'application ou expliquer certains comportements.

J- inimas routine

Fonction

Le but de ce sous-programme est principalement de calculer le flux de masse aux faces. Il prend une variable vectorielle associée au centre des cellules (généralement la vitesse), la projette aux faces en la multipliant par la masse volumique, et la multiplie scalairement par le vecteur surface. Plus généralement, **inimas** est aussi appelé comme première étape du calcul d'une divergence (terme en $\text{div}(\rho \underline{R})$ en $R_{ij} - \varepsilon$, filtre Rhie & Chow, ...).

Discrétisation

La figure IV.J.1 rappelle les diverses définitions géométriques pour les faces internes et les faces de bord. On notera $\alpha = \frac{FJ'}{I'J'}$ (défini aux faces internes uniquement).

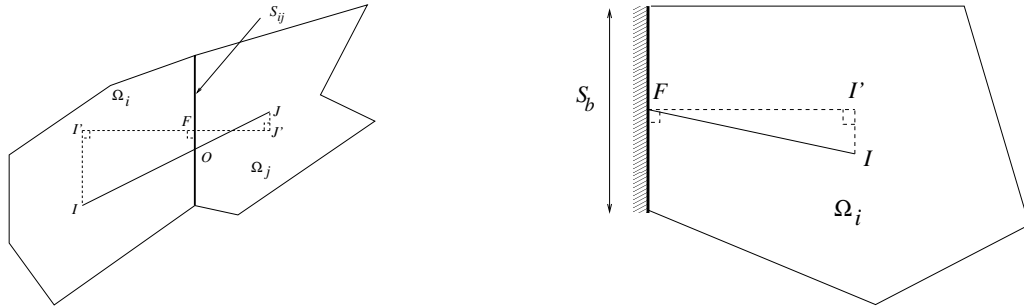


Figure IV.J.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

Faces internes

On ne connaît pas la masse volumique à la face, cette dernière doit donc aussi être interpolée. On utilise la discrétisation suivante :

$$(\rho \underline{u})_F = \alpha(\rho_I \underline{u}_I) + (1 - \alpha)(\rho_J \underline{u}_J) + \underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})_O \cdot \underline{OF} \quad (\text{IV.J.1})$$

La partie en $\alpha(\rho_I \underline{u}_I) + (1 - \alpha)(\rho_J \underline{u}_J)$ correspondant en fait à $(\rho \underline{u})_O$. Le gradient en O est calculé par interpolation : $\underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})_O = \frac{1}{2} [\underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})_I + \underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})_J]$. La valeur $\frac{1}{2}$ s'est imposée de manière heuristique au fil des tests comme apportant plus de stabilité à l'algorithme global qu'une interpolation faisant intervenir α . L'erreur commise sur $\rho \underline{u}$ est en $O(h^2)$.

Faces de bord

Le traitement des faces de bord est nécessaire pour y calculer le flux de masse, bien sûr, mais aussi pour obtenir des conditions aux limites pour le calcul du $\underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})$ utilisé pour les faces internes.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 221/400
---------	--	---

Pour les faces de bord, on connaît la valeur de ρ_F , qui est stockée dans la variable **ROMB**. De plus, les conditions aux limites pour \underline{u} sont données par des coefficients A et B tels que :

$$u_{k,F} = A_k + B_k u_{k,I'} = A_k + B_k (u_{k,I} + \nabla(u_k)_I \cdot \underline{II'}) \quad (\text{IV.J.2})$$

($k \in \{1, 2, 3\}$ est la composante de la vitesse, l'erreur est en $O(B_k h)$)

On a donc à l'ordre 1 :

$$(\rho u_k)_F = \rho_F [A_k + B_k (u_{k,I} + \nabla(u_k)_I \cdot \underline{II'})] \quad (\text{IV.J.3})$$

Mais pour utiliser cette formule, il faudrait calculer $\underline{\text{grad}}(\underline{u})$ (trois appels à **GRDCEL**), alors qu'on a déjà calculé $\underline{\text{grad}}(\rho \underline{u})$ pour les faces internes. Le surcoût en temps serait alors important. On réécrit donc :

$$(\rho u_k)_F = \rho_F A_k + \rho_F B_k u_{k,I'} \quad (\text{IV.J.4})$$

$$= \rho_F A_k + B_k \frac{\rho_F}{\rho_{I'}} (\rho u_k)_{I'} \quad (\text{IV.J.5})$$

$$= \rho_F A_k + B_k \frac{\rho_F}{\rho_{I'}} (\rho u_k)_I + B_k \frac{\rho_F}{\rho_{I'}} \nabla(\rho u_k)_I \cdot \underline{II'} \quad (\text{IV.J.6})$$

Pour calculer les gradients de $\rho \underline{u}$, il faudrait donc en théorie utiliser les coefficients de conditions aux limites équivalents :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \rho_F A_k \\ \tilde{B}_k &= B_k \frac{\rho_F}{\rho_{I'}} \end{aligned}$$

Ceci paraît délicat, à cause du terme en $\frac{\rho_F}{\rho_{I'}}$, et en particulier à l'erreur que l'on peut commettre sur $\rho_{I'}$ si la reconstruction des gradients est imparfaite (sur des maillages fortement non orthogonaux par exemple). On réécrit donc l'équation (IV.J.6) sous la forme suivante :

$$(\rho u_k)_F = \rho_F A_k + B_k \frac{\rho_I \rho_F}{\rho_{I'}} u_{k,I} + B_k \frac{\rho_F}{\rho_{I'}} \nabla(\rho u_k)_I \cdot \underline{II'} \quad (\text{IV.J.7})$$

Pour le calcul du flux de masse au bord, on va faire deux approximations. Pour le deuxième terme, on va supposer $\rho_{I'} \approx \rho_I$ (ce qui conduit à une erreur en $O(B_k h)$ sur $\rho \underline{u}$ si $\rho_{I'} \neq \rho_I$). Pour le troisième terme, on va supposer $\rho_{I'} \approx \rho_F$. Cette dernière approximation est plus forte, mais elle n'intervient que dans la reconstruction des non-orthogonalités ; l'erreur finale reste donc faible (erreur en $O(B_k h^2)$ sur $\rho \underline{u}$ si $\rho_{I'} \neq \rho_F$). Et au final, le flux de masse au bord est calculé par :

$$\dot{m}_F = \sum_{k=1}^3 [\rho_F A_k + B_k \rho_F u_{k,I} + B_k \nabla(\rho u_k)_I \cdot \underline{II'}] S_k \quad (\text{IV.J.8})$$

Pour le calcul des gradients, on repart de l'équation (IV.J.5), sur laquelle on fait l'hypothèse que $\rho_{I'} \approx \rho_F$. Encore une fois, cette hypothèse peut être assez forte, mais les gradients obtenus ne sont utilisés que pour des reconstructions de non-orthogonalités ; l'erreur finale reste donc là encore assez faible. Au final, les gradients sont calculés à partir de la formule suivante :

$$(\rho u_k)_F = \rho_F A_k + B_k (\rho u_k)_{I'} \quad (\text{IV.J.9})$$

ce qui revient à utiliser les conditions aux limites suivantes pour $\rho \underline{u}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \rho_F A_k \\ \tilde{B}_k &= B_k \end{aligned}$$

REMARQUE

Dans la plupart des cas, les approximations effectuées n'engendrent aucune erreur. En effet :

- dans le cas d'une entrée on a généralement $B_k = 0$, avec un flux de masse imposé par la condition à

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 222/400
---------	--	---

la limite.

- dans le cas d'une sortie, on a généralement flux nul sur les scalaires donc sur ρ , soit $\rho_F = \rho_{I'} = \rho_I$.
 - dans le cas d'une paroi, on a généralement $B_k = 0$ et le flux de masse est imposé nul.
 - dans le cas d'une symétrie, on a généralement $\rho_F = \rho_{I'} = \rho_I$ et le flux de masse est imposé nul.
- Pour sentir un effet de ces approximations, il faudrait par exemple une paroi glissante ($B_k \neq 0$) avec un gradient de température ($\rho_F \neq \rho_I$).

Mise en œuvre

La vitesse est passée par les arguments **UX**, **UY** et **UZ**. Les conditions aux limites de la vitesse sont **COEFAX**, **COEFBX**, ... Le flux de masse résultat est stocké dans les variables **FLUMAS** (faces internes) et **FLUMAB** (faces de bord). **QDMX**, **QDMY** et **QDMZ** sont des variables de travail qui serviront à stocker $\rho \underline{u}$, et **COEFQA** servira à stocker les \tilde{A} .

• Initialisation éventuelle du flux de masse

Si **INIT** vaut 1, le flux de masse est remis à zéro. Sinon, le sous-programme rajoute aux variables **FLUMAS** et **FLUMAB** existantes le flux de masse calculé.

• Remplissage des tableaux de travail

$\rho \underline{u}$ est stocké dans **QDM**, et \tilde{A} dans **COEFQA**.

• Cas sans reconstruction

On calcule alors directement

$$\text{FLUMAS} = \sum_{k=1}^3 [\alpha(\rho_I u_{k,I}) + (1 - \alpha)(\rho_J u_{k,J})] S_k$$

et

$$\text{FLUMAB} = \sum_{k=1}^3 [\rho_F A_k + B_k \rho_F u_{k,I}] S_k$$

• Cas avec reconstruction

On répète trois fois de suite les opérations suivantes, pour $k = 1, 2$ et 3 :

- Appel de **GRDCEL** pour le calcul de $\underline{\nabla}(\rho u_k)$.
- Mise à jour du flux de masse

$$\text{FLUMAS} = \text{FLUMAS} + \left[\alpha(\rho_I u_{k,I}) + (1 - \alpha)(\rho_J u_{k,J}) + \frac{1}{2} [\underline{\nabla}(\rho u_k)_I + \underline{\nabla}(\rho u_k)_J] \cdot \underline{OF} \right] S_k$$

et

$$\text{FLUMAB} = \text{FLUMAB} + [\rho_F A_k + B_k \rho_F u_{k,I} + B_k \underline{\nabla}(\rho u_k)_I \cdot \underline{II'}] S_k$$

• Annulation du flux de masse au bord

Quand le sous-programme a été appelé avec la valeur **IFLMB0=1** (c'est-à-dire quand il est réellement appelé pour calculer un flux de masse, et pas pour calculer le terme en $\text{div}(\rho \underline{R})$ par exemple), le flux de masse au bord **FLUMAB** est forcé à 0, pour les faces de paroi et de symétrie (identifiées par **ISYMPA=0**).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 223/ 400
---------	--	---

K- itrmas/itrgrp routine

Fonction

Le but du sous-programme **itrmas** est de calculer un gradient de pression “facette”. Il est utilisé dans la phase de correction de pression (deuxième phase de **navstv**) où le flux de masse est mis à jour à l’aide de termes en $-\Delta t_{ij}(\nabla_f P)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}$ et en $-\Delta t_{b_{ik}}(\nabla_f P)_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$.

Le sous-programme **itrgrp** calcule un gradient “facette” de pression et en prend la divergence, c’est-à-dire calcule le terme :

$$-\sum_{j \in V_{ois}(i)} \Delta t_{ij}(\nabla_f P)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} \Delta t_{b_{ik}}(\nabla_f P)_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$$

En pratique **itrgrp** correspond à la combinaison de **itrmas** et de **divmas**, mais permet par son traitement en un seul bloc d’éviter la définition de tableaux de travail de taille **NFAC** et **NFABOR**.

Discrétisation

La figure IV.K.1 rappelle les diverses définitions géométriques pour les faces internes et les faces de bord.

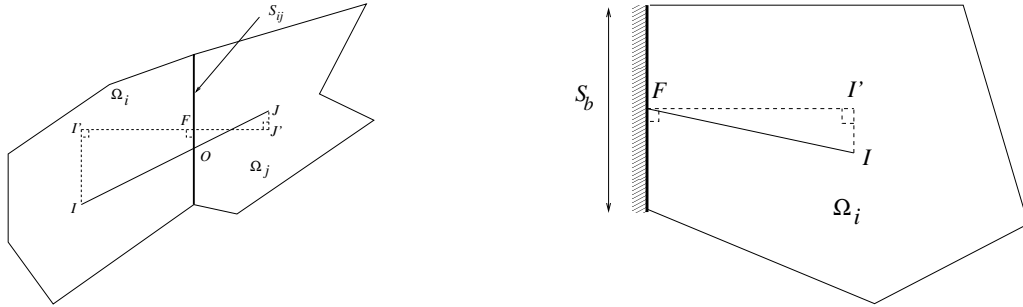


Figure IV.K.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

Calcul sans reconstruction des non orthogonalités

Pour les faces internes, on écrit simplement :

$$-\Delta t_{ij}(\nabla_f P)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \frac{\Delta t_{ij} S_{ij}}{I'J'} (P_I - P_J) \quad (\text{IV.K.1})$$

Pour les faces de bord, on écrit :

$$-\Delta t_{b_{ik}}(\nabla_f P)_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} = \frac{\Delta t_{b_{ik}} S_{b_{ik}}}{I'F} ((1 - B_{b,ik}) P_I - \text{INC} \times A_{b,ik}) \quad (\text{IV.K.2})$$

Les pas de temps aux faces Δt_{ij} et $\Delta t_{b_{ik}}$ sont calculés par interpolation par les sous-programmes **viscfa** (cas isotrope, **IPUCOU=0**) ou **visort** (cas anisotrope, **IPUCOU=1**).

Calcul avec reconstruction des non orthogonalités

Plusieurs discrétisations peuvent être proposées pour le traitement des non orthogonalités. Celle retenue dans le code est issue des premiers tests réalisés sur le prototype, et fait intervenir non seulement le pas de temps interpolé à la face, mais aussi les pas de temps dans chaque cellule. Il serait sans doute bon de revenir sur cette écriture et évaluer d'autres solutions. La forme utilisée pour les faces internes est :

$$\begin{aligned}
 -\Delta t_{ij}(\nabla_f P)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} &= \frac{\Delta t_{ij} S_{ij}}{\overline{I'J'}} (P_I - P_J) \\
 &+ (\underline{II'} - \underline{JJ'}) \cdot \frac{1}{2} [\Delta t_I (\nabla P)_I + \Delta t_J (\nabla P)_J] \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}} \quad (\text{IV.K.3})
 \end{aligned}$$

Pour les faces de bord, on écrit :

$$-\Delta t_{b_{ik}}(\nabla_f P)_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} = \frac{\Delta t_{b_{ik}} S_{b_{ik}}}{\overline{I'F}} [(1 - B_{b,ik})(P_I + \underline{II'} \cdot (\nabla P)_I) - \text{INC} \times A_{b,ik}] \quad (\text{IV.K.4})$$

Mise en œuvre

Les principaux arguments passés à `itrmas` et `itrgrp` sont la variable traitée `PVAR` (la pression), ses conditions aux limites, le pas de temps projeté aux faces¹ (`VISCF` et `VISCB`), le pas de temps au centre des cellules, éventuellement anisotrope (`VISELX`, `VISELY`, `VISELZ`). `itrmas` retourne les tableaux `FLUMAS` et `FLUMAB` (flux de masse aux faces) mis à jour. `itrgrp` retourne directement la divergence du flux de masse mis à jour, dans le tableau `DIVERG`.

• Initialisation

Si `INIT` vaut 1, les variables `FLUMAS` et `FLUMAB` ou `DIVERG` sont mises à zéro.

• Cas sans reconstruction

La prise en compte ou non des non orthogonalités est déterminée par l'indicateur `NSWRGR` de la variable traitée (nombre de sweeps de reconstruction des non orthogonalités dans le calcul des gradients), passé par la variable `NSWRGP`. Une valeur inférieure ou égale à 1 enclenche le traitement sans reconstruction. Des boucles sur les faces internes et les faces de bord utilisent directement les formules (IV.K.1) et (IV.K.2) pour remplir les tableaux `FLUMAS` et `FLUMAB` (`itrmas`) ou des variables de travail `FLUMAS` et `FLUMAB` qui servent à mettre à jour le tableau `DIVERG` (`itrgrp`).

À noter que les tableaux `VISCF` et `VISCB` contiennent respectivement $\frac{\Delta t_{ij} S_{ij}}{\overline{I'J'}}$ et $\frac{\Delta t_{b_{ik}} S_{b_{ik}}}{\overline{I'F}}$.

• Cas avec reconstruction

Après un appel à `GRDCEL` pour calculer le gradient cellule de pression, on remplit les tableaux `FLUMAS` et `FLUMAB` ou `DIVERG` là encore par une application directe des formules (IV.K.3) et (IV.K.4).

Points à traiter

Il est un peu redondant de passer en argument à la fois le pas de temps projeté aux faces et le pas de temps au centre des cellules. Il faudrait s'assurer de la réelle nécessité de cela, ou alors étudier des formulations plus simples de la partie reconstruction.

¹Plus précisément, le pas de temps projeté aux faces, multiplié par la surface et divisé par $\overline{I'J'}$ ou $\overline{I'F}$, cf. `viscfa`

L- matrix routine

Fonction

Le but de ce sous-programme, appelé par `codits` et `covofi`, est de construire la matrice de convection/diffusion, incluant les contributions adéquates des termes sources, intervenant dans le membre de gauche d'équations discrétisées telles que celle de la quantité de mouvement, d'une équation de convection diffusion d'un scalaire ou de modèle de turbulence.

Le type d'équation considérée est, pour la variable scalaire a :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}((\rho \underline{u}) a) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial a}{\partial x} \right) = 0$$

La matrice ne s'applique qu'aux termes non reconstruits, les autres étant pris en compte au second membre et traités dans le sous-programme `bilsc2`. La partie convective, lorsqu'elle existe, est issue du schéma upwind pur, quelque soit le type de schéma convectif choisi par l'utilisateur. En effet, c'est, à l'heure actuelle, la seule façon d'obtenir un opérateur linéaire à diagonale dominante.

La matrice est donc associée à \mathcal{EM}_{scal} , opérateur agissant sur un scalaire a (inspiré de celui vectoriel \mathcal{EM} défini dans `navstv`) d'expression actuelle, pour tout cellule Ω_i de centre I :

$$\begin{aligned} \mathcal{EM}_{scal}(a, I) &= f_s^{imp} a_I \\ &+ \sum_{j \in Vois(i)} F_{ij}^{amont}((\rho \underline{u})^n, a) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} F_{b_{ik}}^{amont}((\rho \underline{u})^n, a) \\ &- \sum_{j \in Vois(i)} D_{ij}^{NRec}(\beta, a) - \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{b_{ik}}^{NRec}(\beta, a) \end{aligned}$$

avec :

- f_s^{imp} le coefficient issu du terme instationnaire $\frac{\rho |\Omega_i|}{\Delta t}$, s'il y a lieu, et de l'implication de certains termes sources (contribution découlant de la prise en compte de la variation $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ de la masse volumique ρ au cours du temps, diagonale du tenseur de pertes de charges par exemple...): cette initialisation est en fait effectuée en amont de ce sous-programme,
- F_{ij}^{amont} le flux numérique convectif scalaire décentré amont calculé à la face interne ij de la cellule Ω_i ,
- $F_{b_{ik}}^{amont}$ le flux numérique convectif scalaire décentré amont associé calculé à la face de bord ik de la cellule Ω_i jouxtant le bord du domaine Ω ,
- D_{ij}^{NRec} le flux numérique diffusif scalaire non reconstruit associé calculé à la face interne ij de la cellule Ω_i ,
- $D_{b_{ik}}^{NRec}$ le flux numérique diffusif scalaire non reconstruit associé calculé à la face de bord ik de la cellule Ω_i jouxtant le bord du domaine Ω ,
- $Vois(i)$ représente toujours l'ensemble des cellules voisines de Ω_i et $\gamma_b(i)$ l'ensemble des faces de bord de Ω_i .

Du fait de la résolution en incréments, a est un incrément et ses conditions aux limites associées sont donc de type Dirichlet homogène ou de type Neumann homogène.

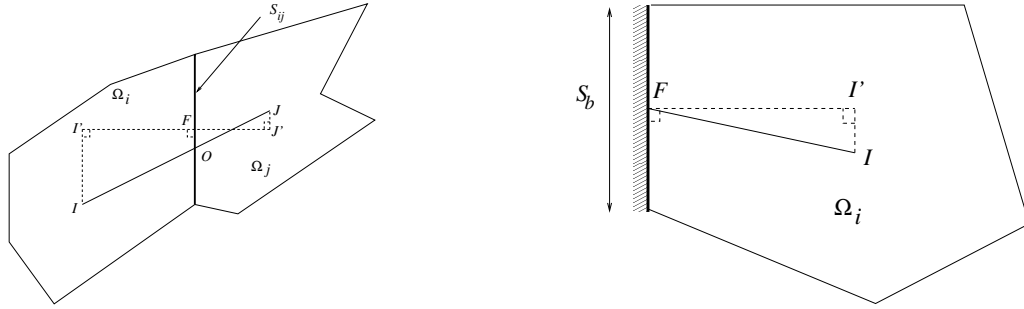


Figure IV.L.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

Discrétisation

L'opérateur \mathcal{EM}_{scal} s'écrit, pour tout I centre de cellule :

$$\begin{aligned} \mathcal{EM}_{scal}(a, I) &= f_s^{imp} a_I \\ &+ \sum_{j \in V_{ois}(i)} [(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}] a_{f,ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}] a_{f_{b_{ik}}} \\ &- \sum_{j \in V_{ois}(i)} \beta_{ij} \frac{a_J - a_I}{\overline{I'J'}} S_{ij} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_I}{\overline{I'F}} S_{b_{ik}} \end{aligned} \quad (IV.L.1)$$

où $a_{f,ij} = a_I$ ou a_J selon le signe de $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}$ (schéma convectif upwind systématique), et avec $\overline{I'J'}$, mesure algébrique, orientée comme la normale sortante à la face, *i.e.* allant de I vers J pour la cellule Ω_i de centre I . On la notera $\overline{I'J'}^I$ lorsqu'on aura besoin d'explicitement l'orientation.

$a_{f_{b_{ik}}} = a_I$ ou $a_{b_{ik}}$ selon le signe de $(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$ (schéma upwind systématique) et $a_{b_{ik}}$ valeur au bord est donnée directement par les conditions aux limites (valeur non reconstruite). $\overline{I'F}$, mesure algébrique, orientée relativement à la normale sortante à la face, *i.e.* allant de I vers l'extérieur du domaine.

En général, sauf cas pathologiques, les mesures algébriques $\overline{I'J'}$ et $\overline{I'F}$ sont positives et correspondent aux distances $I'J'$ et $I'F$. On se reportera au paragraphe Points à traiter pour plus de détails.

Soit \underline{EM}_{scal} la matrice associée ; sa taille est *a priori* de $NCEL * NCEL$, mais compte-tenu de la nature de la structure de données, seuls deux tableaux $DA(NCEL)$ contenant les valeurs diagonales et $XA(NFAC, *)$ les contributions des termes extra-diagonaux sont nécessaires, avec $NCEL$ nombre de cellules du maillage considéré et $NFAC$ nombre de faces internes associé.

Du fait des simplifications effectuées sur la matrice (non reconstruction des termes), les composantes extradiagonales de la ligne I ne sont différentes de zéro que pour les indices J des cellules voisines de I . On peut donc stocker toutes les contributions non nulles de la matrice dans deux tableaux $DA(NCEL)$ et $XA(NFAC, 2)$:

- $DA(I)$ est le coefficient de la colonne I dans la ligne I ,
- si $IFAC$ est une face qui sépare les cellules Ω_i et Ω_j , orientée de I vers J , alors :
 $XA(IFAC, 1)$ est le coefficient de la colonne J dans la ligne I et $XA(IFAC, 2)$ est le coefficient de la colonne I dans la ligne J . Lorsque la matrice est symétrique, *i.e.* lorsqu'il n'y a pas de convection ($ICONVP = 0$) et que seule la diffusion est à prendre en compte, alors $XA(IFAC, 1) = XA(IFAC, 2)$ et on réduit XA à $XA(NFAC, 1)$.

Soit m_{ij}^n ($m_{b_{ik}}^n$) la valeur de $(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}$ (respectivement $(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$).

Alors :

- contribution volumique : $f_s^{imp} a_I$
- contribution d'une face purement interne ij

L'expression

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 228/400
---------	--	---

$$+ \sum_{j \in V_{ois}(i)} F_{ij}^{amont}((\rho \underline{u})^n, a) - \sum_{j \in V_{ois}(i)} D_{ij}^{NRec}(\beta, a)$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in V_{ois}(i)} \left([(\rho \underline{u})_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij}] a_{f,ij} - \beta_{ij} \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij} \right) \\ &= \sum_{j \in V_{ois}(i)} \left[\frac{1}{2} (m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) a_I + \frac{1}{2} (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|) a_J \right] - \sum_{j \in V_{ois}(i)} \beta_{ij} \frac{a_J - a_I}{I'J'} S_{ij} \end{aligned} \quad (IV.L.2)$$

Ici, $\overline{I'J'} = \overline{I'J'}^I$.

■ contribution d'une face de bord ik

De même :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \gamma_b(i)} F_{b_{ik}}^{amont}((\rho \underline{u})^n, a) - \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{b_{ik}}^{NRec}(\beta, a) \\ &= \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left([(\rho \underline{u})_{b_{ik}}^n \cdot \underline{S}_{b_{ik}}] a_{f_{b_{ik}}} - \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_I}{I'F} S_{b_{ik}} \right) \\ &= \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[\frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) a_I + \frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) a_{b_{ik}} \right] - \sum_{k \in \gamma_b(i)} \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_I}{I'F} S_{b_{ik}} \end{aligned} \quad (IV.L.3)$$

avec :

$$a_{b_{ik}} = \text{INC } A_{b,ik} + B_{b,ik} a_I = B_{b,ik} a_I$$

a n'étant associée qu'à des conditions aux limites de type Dirichlet homogène ou de type Neumann homogène.

Mise en œuvre

Initialisations

L'indicateur de symétrie **ISYM** de la matrice considérée est affecté comme suit :

- **ISYM** = 1 , si la matrice est symétrique ; on travaille en diffusion pure , **ICONVP** = 0 et **IDIFFP** = 1,

- **ISYM** = 2 , si la matrice est non symétrique ; on travaille soit en convection pure (**ICONVP** = 1, **IDIFFP** = 0), soit en convection/diffusion (**ICONVP** = 1, **IDIFFP** = 1).

Les termes diagonaux de la matrice sont stockés dans le tableau **DA(NCEL)**. Ceux extra-diagonaux le sont dans **XA(NFAC, 1)** si la matrice est symétrique, dans **XA(NFAC, 2)** sinon.

Le tableau **DA** est initialisé à zéro pour un calcul avec **ISTATP** = 0 (en fait, ceci ne concerne que les calculs relatifs à la pression). Sinon, on lui affecte la valeur **ROVSDT** comprenant la partie instationnaire, la contribution du terme continu en $-a \operatorname{div}(\rho \underline{u})^n$ et la partie diagonale des termes sources implicites. Le tableau **XA(NFAC,*)** est initialisé à zéro.

Calcul des termes extradiagonaux stockés dans XA

Ils ne se calculent que pour des faces purement internes **IFAC**, les faces de bord ne contribuant qu'à la diagonale.

matrice non symétrique (présence de convection)

Pour chaque face interne **IFAC**, les contributions extradiagonales relatives au terme a_I et à son voisin associé a_J sont calculées dans **XA(IFAC, 1)** et **XA(IFAC, 2)** respectivement (pour une face orientée de I

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 229/400
---------	--	---

vers J).

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{XA}(\text{IFAC}, 1) &= \text{ICONVP} * \text{FLUI} - \text{IDIFFP} * \text{VISCf}(\text{IFAC}) \\ \text{XA}(\text{IFAC}, 2) &= \text{ICONVP} * \text{FLUJ} - \text{IDIFFP} * \text{VISCf}(\text{IFAC}) \end{aligned} \quad (\text{IV.L.4})$$

avec $\text{FLUMAS}(\text{IFAC})$ correspondant à m_{ij}^n , FLUI à $\frac{1}{2} (m_{ij}^n - |m_{ij}^n|)$, $\text{VISCf}(\text{IFAC})$ à $\beta_{ij} \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}}$.

$\text{XA}(\text{IFAC}, 1)$ représente le facteur de a_J dans la dernière expression de (IV.L.2).

FLUJ correspond à $-\frac{1}{2} (m_{ij}^n + |m_{ij}^n|)$. En effet, $\text{XA}(\text{IFAC}, 2)$ est le facteur de a_I dans l'expression équivalente de la dernière ligne de (IV.L.2), mais écrite en J.

Ce qui donne :

$$\sum_{i \in \text{Vois}(j)} \left[\frac{1}{2} (m_{ji}^n + |m_{ji}^n|) a_J + \frac{1}{2} (m_{ji}^n - |m_{ji}^n|) a_I \right] - \sum_{i \in \text{Vois}(j)} \beta_{ji} \frac{a_I - a_J}{\overline{J'I'}} S_{ji} \quad (\text{IV.L.5})$$

Le terme recherché est donc : $\frac{1}{2} (m_{ji}^n - |m_{ji}^n|) - \beta_{ji} \frac{S_{ji}}{\overline{J'I'}}$.

Or :

$m_{ji}^n = -m_{ij}^n$ ($\underline{S}_{ji} = -\underline{S}_{ij}$ et $(\rho \underline{u})_{ji}^n = (\rho \underline{u})_{ij}^n$), avec $\overline{J'I'}$ mesure algébrique, orientée relativement à la normale sortante à la face, *i.e.* allant de J vers I. On la note $\overline{J'I'}^J$.

On a la relation :

$$\overline{J'I'}^J = \overline{I'J'}^I = (\overline{I'J'}) \quad (\text{IV.L.6})$$

d'où la deuxième égalité dans (IV.L.4).

matrice symétrique (diffusion pure)

Pour chaque face interne IFAC, la contribution extradiagonale relative au terme a_I est calculée dans $\text{XA}(\text{IFAC}, 1)$ par la relation suivante :

$$\text{XA}(\text{IFAC}, 1) = -\text{IDIFFP} * \text{VISCf}(\text{IFAC}) \quad (\text{IV.L.7})$$

avec $\text{VISCf}(\text{IFAC})$ à $\beta_{ij} \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}}$.

Calcul des termes diagonaux stockés dans DA

matrice non symétrique (présence de convection)

Pour chaque face interne ij (IFAC) séparant les cellules Ω_i de centre I et Ω_j de centre J, $\text{DA}(\text{II})$ est la quantité en facteur de a_I dans la dernière expression de (IV.L.2), soit :

$$\frac{1}{2} (m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) + \beta_{ij} \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}} \quad (\text{IV.L.8})$$

De même, pour $\text{DA}(\text{JJ})$, on a :

$$\frac{1}{2} (-m_{ij}^n + |m_{ij}^n|) + \beta_{ji} \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}} \quad (\text{IV.L.9})$$

d'après l'expression de (IV.L.5) et l'égalité (IV.L.6).

L'implantation dans *Code_Saturne* associée est la suivante :

pour toute face IFAC d'éléments voisins $\text{II} = \text{IFACEL}(1, \text{IFAC})$ et $\text{JJ} = \text{IFACEL}(2, \text{IFAC})$,

on ajoute à $\text{DA}(\text{II})$ la contribution croisée $-\text{XA}(\text{IFAC}, 2)$ (*cf.* (IV.L.8)) et à $\text{DA}(\text{JJ})$ la contribution $-\text{XA}(\text{IFAC}, 1)$ (*cf.* (IV.L.9)).

Prise en compte des conditions aux limites

Elles interviennent juste dans le tableau **DA**, compte-tenu de leur écriture et définition. Elles se calculent *via* la dernière expression de (IV.L.3). Pour chaque face **IFAC**, de l'élément de centre I , jouxtant le bord, on s'intéresse à :

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[\frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) a_I + \frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) a_{b_{ik}} \right] - \sum_{k \in \gamma_b(i)} \beta_{b_{ik}} \frac{a_{b_{ik}} - a_I}{I'F} S_{b_{ik}} \quad (\text{IV.L.10})$$

avec :

$$a_{b_{ik}} = B_{b,ik} a_I$$

soit :

$$\left(\sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[\frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|) + \frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) B_{b,ik} \right] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \beta_{b_{ik}} \frac{1 - B_{b,ik}}{I'F} S_{b_{ik}} \right) a_I \quad (\text{IV.L.11})$$

ce qui, pour le terme sur lequel porte la somme, se traduit par :

$\text{ICONVP} * (-\text{FLUJ} + \text{FLUI} * \text{COEFBP}(\text{IFAC}) + \text{IDIFFP} * \text{VISCB}(\text{IFAC}) * (1 - \text{COEFBP}(\text{IFAC})))$

avec, $m_{b_{ik}}^n$ représenté par $\text{FLUMAB}(\text{IFAC})$, $\frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n + |m_{b_{ik}}^n|)$ par $-\text{FLUJ}$,

$\frac{1}{2} (m_{b_{ik}}^n - |m_{b_{ik}}^n|) B_{b,ik}$ par FLUI , $B_{b,ik}$ par $\text{COEFBP}(\text{IFAC})$, $\beta_{b_{ik}} \frac{S_{b_{ik}}}{I'F}$ par $\text{VISCB}(\text{IFAC})$.

Décalage du spectre

Lorsqu'il n'existe aucune condition à la limite de type Dirichlet et que $\text{ISTATP} = 0$ (c'est-à-dire pour la pression uniquement), on déplace le spectre de la matrice \underline{EM}_{scal} de **EPSI** (*i.e.* on multiplie chaque terme diagonal par $(1 + \text{EPSI})$) afin de la rendre inversible. **EPSI** est fixé en dur dans **matrix** à 10^{-7} .

Points à traiter

• Initialisation

Le tableau **XA** est initialisé à zéro lorsqu'on veut annuler la contribution du terme en $\frac{\rho |\Omega_i|}{\Delta t}$, *i.e.* $\text{ISTATP} = 0$. Ce qui ne permet donc pas la prise en compte effective des parties diagonales des termes sources à implémenter, décidée par l'utilisateur. Actuellement, ceci ne sert que pour la variable pression et reste donc *a priori* correct, mais cette démarche est à corriger dans l'absolu.

• Nettoyage

La contribution ICONVP FLUI , dans le calcul du terme $\text{XA}(\text{IFAC}, 1)$ lorsque la matrice est symétrique est inutile, car $\text{ICONVP} = 0$.

• Prise en compte du type de schéma de convection dans \underline{EM}_{scal}

Actuellement, les contributions des flux convectifs non reconstruits sont traitées par schéma décentré amont, quelque soit le schéma choisi par l'utilisateur. Ceci peut être handicapant. Par exemple, même sur maillage orthogonal, on est obligé de faire plusieurs sweeps pour obtenir une vitesse prédite correcte. Un schéma centré sans test de pente peut être implanté facilement, mais cette écriture pourrait, dans l'état actuel des connaissances, entraîner des instabilités numériques. Il serait souhaitable d'avoir d'autres schémas tout aussi robustes, mais plus adaptés à certaines configurations.

• Maillage localement pathologique

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 231/ 400
---------	--	---

Il peut arriver, notamment au bord, que les mesures algébriques, $\overline{I'J'}$ ou $\overline{I'F}$ soient négatives (en cas de maillages non convexes par exemple). Ceci peut engendrer des problèmes plus ou moins graves : perte de l'existence et l'unicité de la solution (l'opérateur associé n'ayant plus les bonnes propriétés de régularité ou de coercivité), dégradation de la matrice (perte de la positivité) et donc résolution par solveur linéaire associé non approprié (gradient conjugué par exemple).

Une impression permettant de signaler et de localiser le problème serait souhaitable.

M- navstv routine

Consideration is given to solving the non-stationary, pressure-based, single-phase, three-dimensional Navier-Stokes system of equations for incompressible or weakly compressible flows based on first-order implicit Euler or second-order Crank-Nicolson time discretization with collocated finite volume spatial discretization.

Function

This subroutine is used to calculate, at a given time step, the velocity and pressure variables of the problem following an approach that proceeds in two steps based on a decomposition of operators (fractional step method).

The variables are assumed to be known at the instant t^n and a determination of their new values is sought at the instant¹ t^{n+1} . Therefore, the associated time step is $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. To begin with, the velocity prediction step is performed by solving the momentum balance equation with an explicit pressure. This is followed by the pressure correction (or velocity projection) step allowing to obtain a null divergence velocity field.

The continuous equations are thus:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u}) + \underline{\text{div}} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \underline{\text{div}} (\underline{\sigma}) + \underline{TS} - \underline{K} \cdot \underline{u} + \Gamma (\underline{u} - \underline{u}^{in}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) = \Gamma, \end{cases} \quad (\text{IV.M.1})$$

with ρ the density field, \underline{u} the velocity field, $[\underline{TS} - \underline{K} \underline{u}]$ the other source terms (\underline{K} is a positive diagonal tensor by definition), $\underline{\sigma}$ the stress tensor, $\underline{\tau}$ the tensor of viscous stresses, μ the dynamic viscosity (molecular and possibly turbulent), κ the volume viscosity (usually null and therefore neglected in the code and hereafter in this document, apart from the compressible module), \underline{D} the deformation rate tensor², Γ the mass source term and \underline{u}^{in} is the velocity of the injection.

$$\begin{cases} \underline{\sigma} &= \underline{\tau} - P \underline{Id}, \\ \underline{\tau} &= 2\mu \underline{D} + (\kappa - \frac{2}{3}\mu) \text{tr}(\underline{D}) \underline{Id}, \\ \underline{D} &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T). \end{cases} \quad (\text{IV.M.2})$$

Recalling the definition of the notations employed³:

$$\begin{cases} [\underline{\nabla} \underline{a}]_{ij} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \\ [\underline{\text{div}} (\underline{\sigma})]_i &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ [\underline{a} \otimes \underline{b}]_{ij} &= a_i b_j, \end{cases}$$

and thus:

$$[\underline{\text{div}} (\underline{a} \otimes \underline{b})]_i = \frac{\partial (a_i b_j)}{\partial x_j}$$

Remark M.1 When accounting for variable density, the continuity equation is written:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}) = \Gamma$$

¹The pressure is assumed known at instant $t^{n-1+\theta}$ and its new value sought at $t^{n+\theta}$, with $\theta = 1$ or $1/2$ depending on the considered time-stepping scheme.

²Not to be confused, despite an identical notation D , with the diffusive fluxes \underline{D}_{ij} and $\underline{D}_{b_{ik}}$ described later in this subroutine.

³Using the Einstein summation convention.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 233/400
---------	--	---

This equation is not taken into account in the projection step (we continue to resolve only $\text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma$) whereas the term $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ does appear during the velocity prediction step in the subroutine `predvv`. If this term plays a significant role, the Code_Saturne compressible algorithm (which solves the full equation) is probably better adapted.

Discretization

We define beforehand:

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}} \text{ defined at the internal faces only and}$$

$$\underline{u}_{K'} = \underline{u}_K + (\underline{\text{grad}} \underline{u})_K \cdot \underline{KK'} \text{ at first order in space, for } K = I \text{ or } J$$

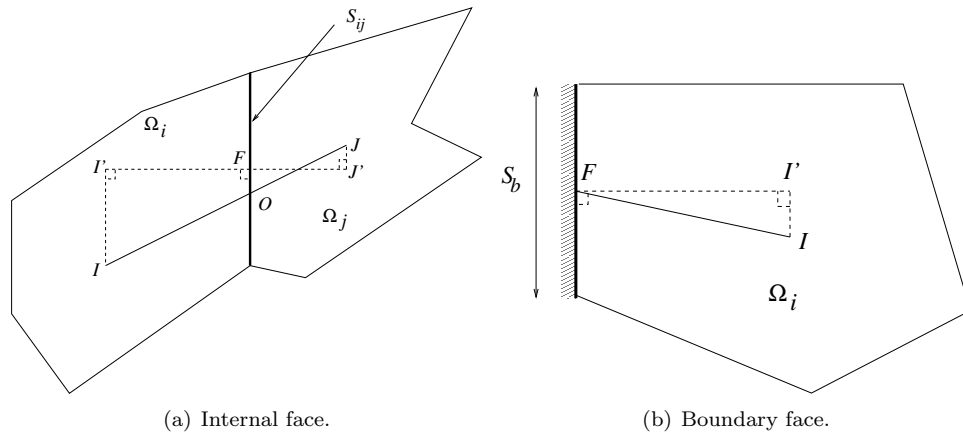


Figure IV.M.1: Schema of the geometric entities defined for internal and boundary faces.

Fractional step method

Introduction

One of the methods used to numerically solve the Navier-Stokes equations consists of decomposing the corresponding operators into a set of simpler operators (which can then be treated by efficient algorithms) *via* the division of a single time step into a number of intermediate sub-steps. In this case, two sub-steps are used: the first takes up the convective, diffusive and source terms of the momentum equation and constitutes the velocity prediction step, the second treats the continuity equation and is designated as the pressure correction or velocity projection step.

Velocity prediction step

The discretization in time is achieved by applying a θ -scheme at time $n + \theta$ to the resolved variable, following the approach used for the transport equation of a scalar⁴.

The velocity at time $n + 1$ not being available until after the projection step, a predicted velocity at time $n + 1$ is used herein to interpolate:

$$\underline{\tilde{u}}^{n+\theta} = \theta \underline{\tilde{u}}^{n+1} + (1 - \theta) \underline{u}^n \quad (\text{IV.M.3})$$

⁴cf. covofi

With⁵ :

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{For a first-order implicit Euler scheme,} \\ \theta = 1/2 & \text{For a second-order Crank-Nicolson scheme.} \end{cases} \quad (\text{IV.M.4})$$

The predicted velocity field $\underline{\tilde{u}}^{n+1}$ is then obtained by:

- Partial linearization of the convection operator giving rise to a decoupling of the velocity components.
- Explicitation of the pressure.
- Explicitation or extrapolation of the physical quantities (*i.e* ρ , μ , Cp ...) and the mass flux.
- Explicitation or extrapolation of the explicit source terms (for example, the contributions of the transpose gradient, secondary viscosity, extra diagonal elements of the head losses, injected mass $\Gamma \underline{u}^{in}$, ...) at time $n + \theta_S$.
- The implicit source terms that are linear with respect to the velocity (implicit user-specified source terms, diagonal of the head losses $\underline{\underline{K}}_d \underline{u}$, sources of mass $\Gamma \underline{u}$, etc...) are assumed to be evaluated at time $n + \theta$ and are tied to the tensor $\underline{\underline{K}}^6$.

For clarification, unless otherwise specified, the physical properties $\Phi = \rho, \mu \dots$ and the mass flux ($\rho \underline{u}$) are assumed to be evaluated respectively at the instants $n + \theta_\Phi$ and $n + \theta_F$, with θ_Φ and θ_F being dependent on the specific time-stepping schemes employed for these quantities⁷.

After rewriting the non-stationary terms based on the mass conservation relation, we solve the following system:

$$\rho \left(\frac{\underline{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}^n}{\Delta t} \right) + \underline{\text{div}} \left(\underline{\tilde{u}}^{n+\theta} \otimes (\rho \underline{u}) \right) = \underline{\text{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}^{n+\theta} \right) + \underline{TS}^{n+\theta_S} - \underline{\underline{K}}^n \underline{u}^{n+\theta} + \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} \underline{\text{div}} (\rho \underline{u}), \quad (\text{IV.M.5})$$

with:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{n+\theta} = \underbrace{\mu \underline{\underline{\nabla}} \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} - P^{n-1+\theta} \underline{\underline{Id}} + (\mu (\underline{\underline{\nabla}} \underline{u})^{n+\theta_S})^T - \frac{2}{3} (\mu \underline{\text{div}} \underline{u})^{n+\theta_S} \underline{\underline{Id}}}_{\text{explicit source terms}}. \quad (\text{IV.M.6})$$

Pressure correction step (or projection of velocities)

The predicted velocity has *a priori* non-zero divergence. The second step corrects the pressure by imposing the nullity of the stationary constraint for the velocity computed at time instant t^{n+1} . We then solve:

$$\begin{cases} \frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1}}{\Delta t} = -\underline{\underline{\nabla}} \delta P^{n+\theta}, \\ \underline{\text{div}} (\rho \underline{u})^{n+1} = \Gamma, \end{cases} \quad (\text{IV.M.7})$$

where the pressure increment $\delta P^{n+\theta}$ is defined as:

$$\delta P^{n+\theta} = P^{n+\theta} - P^{n-1+\theta}. \quad (\text{IV.M.8})$$

Remark M.2 The ρ and μ quantities remain constant over the course of both steps. If there has been any variation in the interval, their values will be modified at the start of the next time step, after the scalars (temperature, mass fraction,...) have been updated.

⁵In the $\theta = 1/2$ case, the time step Δt is assumed to be constant in time and uniform in space.

⁶As the velocity components are decoupled, in practice only the linear terms relative to the resolved component are factorised; the other terms are treated as explicit terms. A more detailed explanation can be found in **predvv**.

⁷cf. **introd**

Spatial discretization

Following the classical approach, the time-discretized equations are then integrated over the control volumes Ω_i (or cells).

Velocity prediction step

Second member

If we do not take account of the θ -scheme convection and diffusion terms, the explicit volume source terms of the equation (IV.M.5) for the system concerning the quantity $(\tilde{\underline{u}}^{n+1} - \underline{u}^n)$ are expressed as:

$$-\underline{\nabla} P^{n-1+\theta} + \text{div} \left[(\mu (\underline{\nabla} \underline{u})^T)^{n+\theta_S} - \frac{2}{3} (\mu \text{div} \underline{u})^{n+\theta_S} \underline{Id} \right] + \underline{TS}^{n+\theta_S} - \underline{K}^n \underline{u}^n + \underline{u}^n \text{div} (\rho \underline{u}).$$

To integrate these terms over a cell Ω_i , we multiply their local value at the cell centre by the volume of the cell.

Convection

After decomposition of $\tilde{\underline{u}}$ based on the relation (IV.M.3), spatial integration of the convective parts of the velocity field $\theta \text{div} (\tilde{\underline{u}}^{n+1} \otimes (\rho \underline{u}))$ and $(1 - \theta) \text{div} (\underline{u}^n \otimes (\rho \underline{u}))$ yields a sum of the numerical fluxes \underline{F}_{ij} calculated at the faces of the internal cells and $\underline{F}_{b_{ik}}$ calculated at the boundary faces of the domain Ω . Taking $Neigh(i)$ as the set of the centres of the neighbouring cells of Ω_i and $\gamma_b(i)$ the set of the centres of the boundary faces of Ω_i , we obtain:

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (\underline{u} \otimes (\rho \underline{u})) d\Omega = \sum_{j \in Neigh(i)} \underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{u}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{F}_{b_{ik}}((\rho \underline{u}), \underline{u}),$$

with:

$$\underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{u}) = [(\rho \underline{u})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}] \underline{u}_{f,ij}. \quad (\text{IV.M.9})$$

$$\underline{F}_{b_{ik}}((\rho \underline{u}), \underline{u}) = [(\rho \underline{u})_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}}] \underline{u}_{f,b_{ik}}. \quad (\text{IV.M.10})$$

The value of the flux \underline{F}_{ij} depends on the numerical scheme selected. Three different schemes are available in *Code_Saturne*:

i/ a first-order upwind scheme:

$$\underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{u}) = \underline{F}_{ij}^{upwind}((\rho \underline{u}), \underline{u})$$

where:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{f,ij} &= \underline{u}_i & \text{if } (\rho \underline{u})_{f,ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ \underline{u}_{f,ij} &= \underline{u}_j & \text{if } (\rho \underline{u})_{f,ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.M.11})$$

ii/ a second-order centred scheme:

$$\underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{u}) = \underline{F}_{ij}^{centred}((\rho \underline{u}), \underline{u})$$

with:

$$\underline{u}_{f,ij} = \alpha_{ij} \underline{u}_{I'} + (1 - \alpha_{ij}) \underline{u}_{J'}, \text{ and } \underline{u}_{K'} = \underline{u}_K + (\underline{\nabla} \underline{u})_K \cdot \underline{KK}' \text{ for } K = I \text{ or } J \quad (\text{IV.M.12})$$

iii/ a Second-Order Linear Upwind scheme (SOLU):

$$\underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{u}) = \underline{F}_{ij}^{SOLU}((\rho \underline{u}), \underline{u})$$

with:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{f,ij} &= \underline{u}_i + (\underline{\nabla} \underline{u})_I \cdot \underline{IF} \text{ if } (\rho \underline{u})_{f,ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0, \\ \underline{u}_{f,ij} &= \underline{u}_j + (\underline{\nabla} \underline{u})_j \cdot \underline{JF} \text{ if } (\rho \underline{u})_{f,ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.M.13})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 236/400
---------	--	---

The value of $\underline{F}_{b_{ik}}$ is calculated as:

$$\begin{aligned}\underline{u}_{f_{b_{ik}}} &= \underline{u}_I \text{ if } (\rho \underline{u})_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \geq 0 \\ &= \underline{u}_{b_{ik}} \text{ if } (\rho \underline{u})_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} < 0\end{aligned}\tag{IV.M.14}$$

with the boundary value $\underline{u}_{b_{ik}}$ obtained from the prescribed boundary conditions.

Remark M.3 When a centred scheme is used, for the simple reason of numerical stability we actually write:

$$\underline{u}_{f_{ij}} = \alpha_{ij} \underline{u}_i + (1 - \alpha_{ij}) \underline{u}_j + \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})_i + (\underline{\nabla} \underline{u})_j] \cdot \underline{OF}$$

to preserve the order in space.

Remark M.4 A slope test (which may introduce nonlinearities in the convection operator) allows switching between a second-order scheme and the first-order upwind scheme. Moreover, with standard models, we use at all points a value of the velocity field $\tilde{\underline{u}}_{f_{ij}}$ derived from a barycentric mean between the upwind value and the second-order value (blending, specified by the user).

Diffusion

Likewise, the diffusive components $\theta \operatorname{div}(\mu \underline{\operatorname{grad}} \tilde{\underline{u}}^{n+1})$ and $(1 - \theta) \operatorname{div}(\mu \underline{\operatorname{grad}} \underline{u}^n)$ are written:

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div}(\mu \underline{\nabla} \underline{u}) d\Omega = \sum_{j \in \operatorname{Neigh}(i)} \underline{D}_{ij}(\mu, \underline{u}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{D}_{ib}(\mu, \underline{u})$$

with:

$$\underline{D}_{ij}(\mu, \underline{u}) = \mu_{f_{ij}} \frac{\underline{u}_{j'} - \underline{u}_{i'}}{\underline{I}' \underline{J}'} S_{ij}\tag{IV.M.15}$$

and:

$$\underline{D}_{ib}(\mu, \underline{u}) = \mu_{f_b} \frac{\underline{u}_{f_b} - \underline{u}_{i'}}{\underline{I}' \underline{F}} S_{ib}\tag{IV.M.16}$$

keeping the same notations employed beforehand and with the value \underline{u}_{f_b} at the boundary provided directly by the specified boundary conditions.

The face value of the viscosity $\mu_{f_{ij}}$ is calculated from the cell centre values using a specified function f :

$$\mu_{f_{ij}} = f(\mu_i, \mu_j)$$

this function being either an arithmetic mean:

$$f(\mu_i, \mu_j) = \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_j)\tag{IV.M.17}$$

or a geometric mean:

$$f(\mu_i, \mu_j) = \frac{\mu_i \mu_j}{\alpha_{ij} \mu_i + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j}\tag{IV.M.18}$$

and the viscosity value μ_{f_b} at the boundary face is given by the equality:

$$\mu_{f_b} = \mu_i\tag{IV.M.19}$$

We also introduce here, for later use, the following additional notations:

$$\underline{D}_{ij}^{NRec}(\mu, \underline{u}) = \mu_{ij} \frac{\underline{u}_J - \underline{u}_I}{\underline{I}' \underline{J}'} S_{ij}\tag{IV.M.20}$$

$$\underline{D}_{ib}^{NRec}(\mu, \underline{u}) = \mu_{f_b} \frac{\underline{u}_{f_b} - \underline{u}_I}{\underline{I}' \underline{F}} S_{ib}\tag{IV.M.21}$$

which correspond to the non-reconstructed values at the internal and boundary faces, respectively.

Solution

As the system (IV.M.5) may contain nonlinearities owing to use of the slope test or may give rise *via* the (cell) gradient reconstruction to a nearly-full matrix when non orthogonality are present, we solve the system using the iterative sequence $(\tilde{\underline{u}}^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ defined by:

$$\begin{cases} \tilde{\underline{u}}^{n+1,0} &= \underline{u}^n \\ \tilde{\underline{u}}^{n+1,k+1} &= \tilde{\underline{u}}^{n+1,k} + \delta \tilde{\underline{u}}^{k+1} \\ \mathcal{EM}(\delta \tilde{\underline{u}}^{k+1}, i) &= -\mathcal{E}(\tilde{\underline{u}}^{n+1,k}, i) \end{cases} \quad (\text{IV.M.22})$$

which also defines the sequence $(\delta \tilde{\underline{u}}^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

The two operators \mathcal{E} and \mathcal{EM} have the respective expressions:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{\underline{u}}, i) &= \theta \mathcal{J}(\tilde{\underline{u}}, i) + (1 - \theta) \mathcal{J}(\underline{u}^n, i) + |\Omega_i| \frac{\rho_i}{\Delta t} (\tilde{\underline{u}}_i - \underline{u}_i^n) \\ &+ |\Omega_i| \left[(\underline{TS})_i^{n+\theta_s} - (\underline{\nabla} P)_i^{n-1+\theta} \right] \\ &+ \underbrace{\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left((\mu (\underline{\nabla} \underline{u})^T)^{n+\theta_s} - \frac{2}{3} (\mu \text{div } \underline{u})^{n+\theta_s} \underline{Id} \right)_{f_{ij}}}_{\text{average or linear interpolation between } I' \text{ and } J'} \cdot \underline{S}_{ij} \\ &+ \underbrace{\sum_{k \in \gamma_b(i)} \left((\mu (\underline{\nabla} \underline{u})^T)^{n+\theta_s} - \frac{2}{3} (\mu \text{div } \underline{u})^{n+\theta_s} \underline{Id} \right)_{f_b}}_{\text{obtained from the boundary conditions}} \cdot \underline{S}_{ib} \end{aligned} \quad (\text{IV.M.23})$$

with:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\underline{v}, i) &= |\Omega_i| [\underline{K}^n - \text{div}(\rho \underline{u})]_i \underline{v}_i \\ &+ \left(\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{F}_{ij}((\rho \underline{u}), \underline{v}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{F}_{ib}((\rho \underline{u}), \underline{v}) \right) \\ &- \left(\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{D}_{ij}(\mu, \underline{v}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{D}_{ib}(\mu, \underline{v}) \right) \\ \mathcal{EM}(\delta \underline{u}, i) &= |\Omega_i| \left(\frac{\rho_i}{\Delta t} + \theta [\underline{K}^n - \text{div}(\rho \underline{u})]_i \right) \delta \underline{u}_i \\ &+ \theta \left(\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{F}_{ij}^{upwind}((\rho \underline{u}), \delta \underline{u}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{F}_{ib}^{upwind}((\rho \underline{u}), \delta \underline{u}) \right) \\ &- \theta \left(\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{D}_{ij}^{NRec}(\mu, \delta \underline{u}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{D}_{ib}^{NRec}(\mu, \delta \underline{u}) \right) \end{aligned}$$

Furthermore, we assume that the sequence $(\tilde{\underline{u}}^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges towards $\tilde{\underline{u}}^{n+1}$.

Remark M.5 The boundary conditions associated with the operators \mathcal{E} and \mathcal{EM} of the system (IV.M.23) are those relating to the velocity field \underline{u} . They are either homogeneous Dirichlet- or homogeneous Neumann-type conditions on $\delta \underline{u}$, this being dependent on whether the same type of condition, in this case a Dirichlet and a Neumann-type condition has been used for the velocity \underline{u} . They are mixed if a symmetry condition applies to a face that is skewed with respect to the reference frame axes.

Remark M.6 The first two summations of the type $(\sum_{k \in \gamma_b(i)})$, i.e. comprising the $\underline{F}_{ib}((\rho \underline{u}), \underline{u})$ and $\underline{D}_{ib}(\mu, \underline{u})$ terms, use the velocity boundary conditions. The volume term:

$$\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underbrace{\left((\mu (\underline{\nabla} \underline{u})^T)^{n+\theta_s} - \frac{2}{3} (\mu \text{div } \underline{u})^{n+\theta_s} \underline{Id} \right)_{ij}}_{\text{average or linear interpolation between } I' \text{ and } J'} \cdot \underline{S}_{ij}$$

The associated boundary term:

$$\sum_{k \in \gamma_b(i)} \underbrace{\left((\mu (\underline{grad} \underline{u})^T)^{n+\theta_s} - \frac{2}{3} (\mu \underline{div} \underline{u})^{n+\theta_s} \underline{Id} \right)_{f_b}}_{\text{from the boundary conditions}} \cdot \underline{S}_{ib}$$

is treated in a specific way. In effect, the contribution of the first term (transposed gradient) is cancelled out for a cell Ω_i adjoining the boundary, no proper boundary condition being attributed to it at this time.

Remark M.7 The operator \mathcal{EM} approaches \mathcal{E} (there is no reconstruction of terms and the convective term is systematically treated using an upwind scheme). This can introduce non-negligible numerical diffusion if the sequence $(\underline{\tilde{u}}^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ has not converged.

Pressure correction step

Applying the divergence of the first equation of the system (IV.M.7), we obtain:

$$\text{div} [(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1}] = \text{div} (-\Delta t \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta}) \quad (\text{IV.M.24})$$

By applying the stationary constraint $\text{div} (\rho \underline{u})^{n+1} = \Gamma$, this becomes:

$$\text{div} (\Delta t \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta}) = \text{div} ((\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1}) - \Gamma \quad (\text{IV.M.25})$$

where:

$$\begin{cases} \text{div} (\Delta t \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta}) = \text{div} ((\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1}) - \Gamma \\ (\rho \underline{u})^{n+1} = (\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1} - \Delta t \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta} \end{cases} \quad (\text{IV.M.26})$$

and:

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{\tilde{u}}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta} \quad (\text{IV.M.27})$$

Integrating over a cell gives the discrete equation:

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (\Delta t \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta}) d\Omega = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \underline{D}_{ij}(\Delta t, \delta P^{n+\theta}) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \underline{D}_{ib}(\Delta t, \delta P^{n+\theta}) \quad (\text{IV.M.28})$$

and:

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (\rho \underline{\tilde{u}})^{n+1} d\Omega = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij}] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib}] \quad (\text{IV.M.29})$$

The formalism introduced previously for the integration of the diffusion term in the prediction step is also adopted here: the boundary conditions on the pressure gradient δP are either of the homogeneous Dirichlet or homogeneous Neumann type and correspond to the type of condition imposed on the pressure P , *i.e.* a Dirichlet or Neumann-type condition respectively.

Computation of the second member of the equation relating to the pressure increment.

Discretization of the sum $\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij}] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib}]$ presents a particularity.

The following choice denoted $[\]^{Init}$, for example, yields unsatisfactory results for a cell not touching the boundary with the discretization and numerical scheme here used, particularly for the following equation (IV.M.27):

$$(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} = [(\rho \underline{\tilde{u}})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij}]^{Init} = [\alpha_{ij} (\rho \underline{\tilde{u}})_{I'}^{n+1} + (1 - \alpha_{ij}) (\rho \underline{\tilde{u}})_{J'}^{n+1}] \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{IV.M.30})$$

As for the numerical flux calculation in the centred scheme, we legitimately use the following approximation:

$$\begin{aligned}
 (\rho \tilde{\underline{u}})_{f_{ij}}^{n+1} &= \alpha_{ij} \rho_i \tilde{\underline{u}}_i^{n+1} + (1 - \alpha_{ij}) \rho_j \tilde{\underline{u}}_j^{n+1} \\
 &+ \frac{1}{2} [(\underline{\nabla}(\rho \tilde{\underline{u}})^{n+1})_i + (\underline{\text{grad}}(\rho \tilde{\underline{u}})^{n+1})_j] \cdot \underline{OF}
 \end{aligned} \tag{IV.M.31}$$

which does not, in itself, pose a problem.

On the other hand, $[(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_{ij}}^{n+1}]^{Init}$ contains the term $\underline{G}_{cel,f_{ij}}^n$, effectively inherited from the prediction step, whose value is:

$$\underline{G}_{cel,f_{ij}}^{n-1+\theta} = \alpha_{ij} \underline{\nabla} P_{I'}^{n-1+\theta} + (1 - \alpha_{ij}) \underline{\nabla} P_{J'}^{n-1+\theta}$$

However, on a regular orthogonal Cartesian mesh, with a velocity field $\tilde{\underline{u}}^{n+1} = \underline{0}$ and a pressure field $P_I^{n-1+\theta} = (-1)^I$, we obtain $\underline{G}_{cel,f_{ij}}^{n-1+\theta} = 0$ and hence the pressure gradient $\delta P^{n+\theta} = 0$. In this case, the initial pressure anomaly can evidently never be corrected.

To fix this, we modify the $[\]^{Init}$ expression of $(\rho \tilde{\underline{u}})_{ij}^{n+1}$ and $(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1}$ by substituting the corrected value $[\]^{Corr}$:

$$\begin{aligned}
 (\rho \tilde{\underline{u}})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} &= [(\rho \tilde{\underline{u}})_{ij}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ij} \\
 &= \left([(\rho \tilde{\underline{u}})_{ij}^{n+1} - \beta(-\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta})]_{f_{ij}}^{Init} \cdot \underline{S}_{ij} + \beta(-D_{ij}(\Delta t, P^{n-1+\theta})) \right)
 \end{aligned} \tag{IV.M.32}$$

with, for the inlet, symmetry (if any) or wall boundary conditions:

$$(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib} = [(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ib} = \rho_{f_b} \underline{u}_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib}$$

and for the outflow boundary conditions:

$$\begin{aligned}
 (\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib} &= [(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ib} \\
 &= \left([\rho_{f_b} \underline{u}_{f_b}^{n+1} - \beta(-\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta})_{I'}] \cdot \underline{S}_{ib} + \beta(-D_{ib}(\Delta t, P^{n-1+\theta})) \right)
 \end{aligned}$$

β is the Arakawa coefficient. When it has a value of 1 (default value), it is the weighting factor in the Rhie & Chow filter.

Remark M.8 *This approach can be generalized to other source terms of the same type, for example those in the $R_{ij} - \varepsilon$ model.*

Solution

To solve the equation (IV.M.28), which can lead, *via* reconstruction of the cell gradient, to a nearly-full matrix when non-orthogonalities are present, we construct a sequence $(\delta P^{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ defined by:

$$\begin{cases} \delta P^{n+\theta,0} = 0 \\ \delta P^{n+\theta,k+1} = \delta P^{n+\theta,k} + C_{relax} \delta(\delta P)^{n+\theta,k+1} \\ \mathcal{FM}(\delta(\delta P)^{n+\theta,k+1}, i) = \mathcal{F}(\delta P^{n+\theta,k}, i) \end{cases} \tag{IV.M.33}$$

which also defines the sequence $(\delta(\delta P)^{n+\theta,k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

The operators \mathcal{F} and \mathcal{FM} are expressed by:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\delta P, i) &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \left[D_{ij}(\Delta t, \delta P) - [(\rho \tilde{\underline{u}})_{ij}^{n+1}]^{Corr} \right] \\
 &+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[D_{ib}(\Delta t^n, \delta P) - [(\rho \tilde{\underline{u}})_{f_b}^{n+1}]^{Corr} \right] + \Gamma
 \end{aligned} \tag{IV.M.34}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 240/400
---------	--	---

and:

$$\mathcal{FM}(\delta(\delta P), i) = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [-D_{ij}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P))] + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [-D_{ib}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P))] \quad (\text{IV.M.35})$$

respectively.

C_{relax} is a given coefficient of relaxation set to 1 by default. We assume that the sequence $(\delta P^{n+\theta, k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges to $\delta P^{n+\theta}$.

The mass flux is updated at each iteration step, using $\delta(\delta P)$. At convergence, the updated mass flux equation is:

$$(\rho \underline{u})_{ij}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} = [(\rho \underline{u})_{f_{ij}}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ij} - \underline{D}_{ij}(\Delta t^n, \delta P^{n+\theta}) \quad (\text{IV.M.36})$$

and we compute the new velocity field at the centre of the cells thanks to the equality:

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \delta P^{n+\theta} \quad (\text{IV.M.37})$$

Remark M.9 A specific treatment is implemented in order to ensure the conservation of mass expressing the mass budget for the fluxes computed at the cell faces is always verified to strictly and perfectly uphold at the end of the correction step, whether or not the sequence $(\delta P^{n+\theta, k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ has reached convergence. The term $\delta P^{n+\theta, k_{end}+1}$, which is in effect the last term evaluated in the sequence, is given by:

$$\mathcal{FM}(\delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1}, i) = \mathcal{F}(\delta P^{n+\theta, k_{end}}, i) \quad (\text{IV.M.38})$$

Instead of updating the mass flux in the classical way, we compute it as follows:

$$(\rho \underline{u})_{ij}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} = [(\rho \underline{u})_{f_{ij}}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ij} - D_{ij}(\Delta t, \delta P^{n+\theta, k_{end}}) - D_{ij}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1})$$

and:

$$(\rho \underline{u})_{ib}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib} = [(\rho \underline{u})_{f_b}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ib} - D_{ib}(\Delta t, \delta P^{n+\theta, k_{end}}) - D_{ib}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1})$$

enabling to arrive at the formulation:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} (\rho \underline{u})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib} \\ &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [(\rho \underline{u})_{f_{ij}}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [(\rho \underline{u})_{f_b}^{n+1}]^{Corr} \cdot \underline{S}_{ib} \\ & - \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} D_{ij}(\Delta t, \delta P^{n+\theta, k_{end}}) - \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{ib}(\Delta t, \delta P^{n+\theta, k_{end}}) \\ & - \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} D_{ij}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1}) - \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{ib}^{NRec}(\Delta t, \delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1}) \end{aligned}$$

corresponding to:

$$\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} (\rho \underline{u})_{f_{ij}}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\rho \underline{u})_{f_b}^{n+1} \cdot \underline{S}_{ib} = -\mathcal{F}(\delta P^{n+\theta, k_{end}}, i) + \mathcal{FM}(\delta(\delta P)^{n+\theta, k_{end}+1}, i) + \Gamma$$

and thus:

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\rho \underline{u})^{n+1} d\Omega = \Gamma$$

Implementation

Refer to the following appendices relating to the subroutines **Predvv** (prediction of velocities) and **Resopv** (pressure correction).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 241/ 400
---------	--	---

N- predvv routine

Function

This subroutine implements the prediction step for the velocity field \underline{u} . This consists of solving the momentum equation by treating the pressure explicitly. Once the pressure correction step has been performed in the subroutine `resopv`, the velocity-pressure solution is obtained using the mass conservation law:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma, \quad (\text{IV.N.1})$$

where Γ is the mass source term¹.

The Reynolds-averaged momentum conservation equation obtained by applying the fundamental theorem of dynamics is:

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{S} - \text{div}(\rho \underline{R}) \quad (\text{IV.N.2})$$

where:

$$\underline{\sigma} = -p \underline{Id} + \underline{\tau} \quad (\text{IV.N.3})$$

with the following linear relationship for the Newtonian flows:

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= 2 \mu \underline{D} + \lambda \text{tr}(\underline{D}) \underline{Id} \\ \underline{D} &= \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u}) \end{aligned} \quad (\text{IV.N.4})$$

$\underline{\sigma}$ represents the stress tensor, $\underline{\tau}$ the viscous stress tensor, μ the dynamic viscosity (molecular and potentially turbulent), \underline{D} the rate of deformation tensor², \underline{R} the Reynolds which appears when applying the average operator to the simultaneous equation, \underline{S} the source terms.

λ is the second coefficient of viscosity. It is related to the volume viscosity κ via the expression

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3} \mu \quad (\text{IV.N.5})$$

When the Stokes hypothesis holds, the volume viscosity κ is zero, in other words $3\lambda + 2\mu = 0$. This hypothesis is implicit in the code and in the rest of this, except in the compressible module.

The equation for the conservation of momentum is finally written as:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = & - \underbrace{\text{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u})}_{\text{convection}} + \underbrace{\text{div}(\mu \underline{\text{grad}} \underline{u})}_{\text{diffusion}} \\ & + \underbrace{\text{div}(\mu {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u})}_{\text{transpose of the velocity gradient term}} - \underbrace{\frac{2}{3} \nabla(\mu \text{div} \underline{u})}_{\text{secondary viscosity}} - \text{div}(\rho \underline{R}) - \nabla(p) + (\rho - \rho_0) \underline{g} + \underline{u} \text{div}(\rho \underline{u}) \\ & + \underbrace{\Gamma(\underline{u}_i - \underline{u})}_{\text{mass source term}} - \underbrace{\rho \underline{K}_{pdc} \underline{u}}_{\text{head loss}} + \underbrace{T_s^{exp} + T_s^{imp}}_{\text{other source terms}} \underline{u} \end{aligned} \quad (\text{IV.N.6})$$

with p denoting the difference in pressure relative to the reference hydrostatic pressure (the real hydrostatic pressure being calculated with the density ρ and not with ρ_0):

$$p = p^* - \rho_0 \underline{g} \cdot \underline{X} \quad (\text{IV.N.7})$$

¹In $kg.m^{-3}.s^{-1}$

²Not to be confused, despite the same notation D , with the diffusive fluxes described in the subroutine `navstv`

(\underline{X} being the vector of components x , y and z).

μ_t , \underline{K}_{pdc} , \underline{u}_i represent respectively the turbulent dynamic viscosity, the tensor related to head losses and the value of the variable associated with the mass source.

The divergence of the Reynolds stress tensor is expressed by:

$$-\operatorname{div}(\rho \underline{R}) = \begin{cases} 0 & \text{in laminar,} \\ -\frac{2}{3} \nabla(\mu_t \operatorname{div} \underline{u}) + \operatorname{div}(\mu_t (\underline{\operatorname{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\operatorname{grad}} \underline{u})) - \frac{2}{3} \nabla(\rho k) & \text{for turbulent} \\ -\operatorname{div}(\rho \underline{R}) & \text{viscosity,} \\ & \text{for second-order} \\ & \text{models,} \\ -\frac{2}{3} \nabla(\mu_t \operatorname{div} \underline{u}) + \operatorname{div}(\mu_t (\underline{\operatorname{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\operatorname{grad}} \underline{u})) & \text{in LES} \end{cases} \quad (\text{IV.N.8})$$

The mass source term involves terms corresponding to the local velocity field \underline{u} as well as a velocity field \underline{u}_i associated with the mass injected (or extracted). When $\Gamma < 0$, we remove mass from the system thereby obtaining $\underline{u}_i = \underline{u}$. The mass term is zero (*i.e.* $\Gamma(\underline{u}_i - \underline{u}) = 0$). When $\Gamma > 0$, a non-zero mass term if $\underline{u}_i \neq \underline{u}$. All terms appearing in the conservation of momentum equation, apart from the convection and diffusion terms, are computed in this subroutine and transmitted to the subroutine `codits` which solves the full equation (convection-diffusion with source terms).

Discretization

The convective term in $\operatorname{div}(\underline{u} \otimes \rho \underline{u})$ introduces a nonlinearity and coupling of the components of the velocity \underline{u} in the equation (IV.N.6). The three velocity components are linearized and decoupled during discretization of the momentum equation in this prediction step.

For instance, taking:

$$\tilde{\underline{u}} = \underline{u}^n + \delta \underline{u} \quad (\text{IV.N.9})$$

The exact contribution of the convective term to take into account in the prediction step would be:

$$\operatorname{div}(\tilde{\underline{u}} \otimes \rho \tilde{\underline{u}}) = \operatorname{div}(\underline{u}^n \otimes \rho \underline{u}^n) + \operatorname{div}(\delta \underline{u} \otimes \rho \underline{u}^n) + \underbrace{\operatorname{div}(\underline{u}^n \otimes \rho \delta \underline{u})}_{\text{linear coupling term}} + \underbrace{\operatorname{div}(\delta \underline{u} \otimes \rho \delta \underline{u})}_{\text{nonlinear coupling term}} \quad (\text{IV.N.10})$$

The last two terms of the expression (IV.N.10) are *a priori* neglected so as to obtain a velocity system that is decoupled and thereby avoid the inversion of a potentially very large matrix. These two terms can nevertheless be taken into account in an approximate manner by explicit extrapolation of the mass flux in $n + \theta_F$ (for the linear coupling term arising from the convection of \underline{u}^n by $\delta \underline{u}$) and by applying a fixed-point subiteration over the subroutine `navstv` (for the nonlinear term) implemented by specifying `NTERUP > 1`.

The equation (IV.N.6) is discretized at the time level $n + \theta$ using a θ -scheme and the tensor of velocity head losses decomposed into the sum of its diagonal \underline{K}_d and extra diagonal \underline{K}_e terms (such that $\underline{K}_{pdc} = \underline{K}_d + \underline{K}_e$).

- The pressure is assumed to be known at the point in time $n - 1 + \theta$ (pressure/velocity time lag) and the gradient evidently calculated at this instant.
- The secondary viscosity and the gradient transpose source terms, those coming from the turbulence model³, $\rho \underline{K}_e \underline{u}$, $(\rho - \rho_0) \underline{g}$ as well as \underline{T}_s^{exp} and $\Gamma \underline{u}_i$ are evaluated explicitly at time n or else extrapolated according to the time scheme selected for the physical properties and the source terms.
- The source terms $\underline{u} \operatorname{div}(\rho \underline{u})$, $\Gamma \underline{u}$, $\underline{T}_s^{imp} \underline{u}$ and $-\rho \underline{K}_d \underline{u}$ are implicit and calculated at instant $n + \theta$.
- The diffusion term $\operatorname{div}(\mu_{tot} \underline{\operatorname{grad}} \underline{u})$ is implicitized: the velocity is taken at the instant $n + \theta$ and the viscosity either explicitized or extrapolated.
- Lastly, the convection term in $\operatorname{div}(\underline{u} \otimes \rho \underline{u})$ is treated implicitly: the resolved velocity component is taken at $n + \theta$ and the mass flux determined explicitly or extrapolated at $n + \theta_F$.

³with the exception of $\operatorname{div}(\mu_t (\underline{\operatorname{grad}} \underline{u}))$

For clarification, unless explicitly stated otherwise the physical properties $\Phi(\rho, \mu_{tot}, \dots)$ and the mass flux $(\rho \underline{u})$ are to be evaluated respectively at time steps $n + \theta_\Phi$ and $n + \theta_F$, with θ_Φ and θ_F dependent upon the specific time schemes selected for these quantities⁴.

The time-discrete form of the momentum equation (IV.N.6) then reads:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\underline{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}^n}{\Delta t} + \text{div}(\underline{\tilde{u}}^{n+\theta} \otimes (\rho \underline{u})) - \text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{\tilde{u}}^{n+\theta}) = \\ -\underline{\nabla} p^{n-1+\theta} + \text{div}(\rho \underline{u}) \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} + (\Gamma \underline{u}_i)^{n+\theta_S} - \Gamma^n \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} \\ -\rho \underline{K}_d^n \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} - (\rho \underline{K}_e \underline{u})^{n+\theta_S} + (\underline{T}_s^{exp})^{n+\theta_S} + T_s^{imp} \underline{\tilde{u}}^{n+\theta} \\ + [\text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{u})]^{n+\theta_S} - \frac{2}{3} [\underline{\nabla}(\mu_{tot} \text{div} \underline{u})]^{n+\theta_S} + (\rho - \rho_0) \underline{g} - (\underline{turb})^{n+\theta_S} \end{aligned} \quad (\text{IV.N.11})$$

where, for simplification, the following definitions have been set:

$$\mu_{tot} = \begin{cases} \mu + \mu_t & \text{for turbulent viscosity or LES models,} \\ \mu & \text{for second order models or in laminar regimes} \end{cases} \quad (\text{IV.N.12})$$

and:

$$\underline{turb}^n = \begin{cases} \frac{2}{3} \underline{\nabla}(\rho^n k^n) & \text{for turbulent viscosity models,} \\ \text{div}(\rho^n \underline{R}^n) & \text{for second order models,} \\ 0 & \text{in laminar or LES} \end{cases} \quad (\text{IV.N.13})$$

By analogy with the θ -scheme equation for a scalar variable, $\underline{\tilde{u}}^{n+\theta}$ is interpolated from the predicted velocity $\underline{\tilde{u}}^{n+1}$ in the following manner⁵:

$$\underline{\tilde{u}}^{n+\theta} = \theta \underline{\tilde{u}}^{n+1} + (1 - \theta) \underline{u}^n \quad (\text{IV.N.14})$$

With:

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{For a first-order implicit Euler scheme.} \\ \theta = 1/2 & \text{For a second-order Crank-Nicolson scheme.} \end{cases} \quad (\text{IV.N.15})$$

Using the above interpolation function, (IV.N.11) is then rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{\rho}{\Delta t} - \theta \text{div}(\rho \underline{u}) + \theta \Gamma^n + \theta \rho \underline{K}_d^n - \theta T_s^{imp} \right)}_{f_s^{imp}} (\underline{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}^n) \\ + \theta \text{div}(\underline{\tilde{u}}^{n+1} \otimes (\rho \underline{u})) - \theta \text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{\tilde{u}}^{n+1}) = \\ - (1 - \theta) \text{div}(\underline{u}^n \otimes (\rho \underline{u})) + (1 - \theta) \text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{u}^n) \\ - \underline{\nabla} p^{n-1+\theta} + \text{div}(\rho \underline{u}) \underline{u}^n + (\Gamma^n \underline{u}_i)^{n+\theta_S} - \Gamma^n \underline{u}^n \\ - (\rho \underline{K}_e \underline{u})^{n+\theta_S} - \rho \underline{K}_d^n \underline{u}^n + (\underline{T}_s^{exp})^{n+\theta_S} + T_s^{imp} \underline{u}^n \\ + [\text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{u})]^{n+\theta_S} - \frac{2}{3} [\underline{\nabla}(\mu_{tot} \text{div} \underline{u})]^{n+\theta_S} + (\rho - \rho_0) \underline{g} - (\underline{turb})^{n+\theta_S} \end{aligned} \quad (\text{IV.N.16})$$

from which the equation solved by the subroutine `codits` is obtained:

$$\begin{aligned} f_s^{imp} (\underline{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}^n) + \theta \text{div}(\underline{\tilde{u}}^{n+1} \otimes (\rho \underline{u})) - \theta \text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{\tilde{u}}^{n+1}) = \\ - (1 - \theta) \text{div}(\underline{u}^n \otimes (\rho \underline{u})) + (1 - \theta) \text{div}(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \underline{u}^n) + f_s^{exp} \end{aligned} \quad (\text{IV.N.17})$$

The spatial discretization scheme is elaborated further in the section relating to the subroutine `codits`.

⁴cf. `introd`

⁵if $\theta = 1/2$, or a time extrapolation is used, second-order is only obtained provided the time step Δt is constant and spatially uniform.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 245/400
---------	--	---

REMARKS:

- In the standard case without extrapolation, the term $-T_s^{imp}$ is only added to the coefficient f_s^{imp} if it is positive so as not to weaken the diagonal dominance of the matrix to invert.
- If, on the other hand, an extrapolation is used, T_s^{imp} is added to f_s^{imp} whatever its sign. In effect, the intuitive idea which consists of taking:

$$\begin{cases} (\underline{T}_s^{exp} + T_s^{imp} \underline{u})^{n+\theta_s} & \text{if } T_s^{imp} > 0 \\ (\underline{T}_s^{exp})^{n+\theta_s} + T_s^{imp} \underline{u}^{n+\theta} & \text{if not} \end{cases} \quad (\text{IV.N.18})$$

leads to inconsistency (loss of coherence) in the numerical treatment of the problem should T_s^{imp} changes sign between two time steps.

- The diagonal part $\underline{\underline{K}}_d$ of the head loss tensor term is used in f_s^{imp} . Strictly speaking, only the positive contributions should in fact be retained (as pointed out in the associated user subroutine `uskpdc`). The approach currently in use requires improvement.
- The term $\theta \Gamma^n - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u})$ is not problematic for the diagonal dominance of the matrix as it is exactly counterbalanced by the convection term (cf. `covofi`).

Implementation

The conservation of momentum equation is solved in a decoupled manner. The integration of the different terms has therefore been carried out in order to treat separately the equations obtained for each component of the velocity.

For each of these components, the second member f_s^{exp} of the system (IV.N.16), the implicit terms of the system (with the exception of the convection-diffusion terms) and the term representing the total viscosity at the internal⁶ and boundary faces is calculated in the subroutine `predvv`. These terms are then transmitted to the subroutine `codits` which constructs and then solves the resulting complete system of equations, with the convection-diffusion terms, for each component of the velocity.

The normalized residual for convergence of the solution of the system for the pressure correction (`resopv`) is calculated in `predvv`. It is defined as the norm of magnitude

$$\operatorname{div}(\rho \tilde{\underline{u}}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma$$

integrated over each cell `IEL` of the mesh (Ω_{iel}) or, symbolically, as the square root of the sum over the mesh cells of the quantity

$$\text{XNORM}(\text{IEL}) = \int_{\Omega_{iel}} [\operatorname{div}(\rho \tilde{\underline{u}}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma] d\Omega.$$

It represents the second member of the equation system that would be solved for the pressure if the pressure gradient were not taken into account in the velocity prediction step. Note that, if the second member of the pressure increment equation were to be used directly, a normalized residual tending to zero would be obtained for a stationary calculation that had been run to convergence. This result would be penalizing and of little use for the computations.

At the start of `predvv`, $\tilde{\underline{u}}^{n+1}$ is not yet available and it is not possible therefore to calculate the total normalized residual. On the other hand, calculating the total residual at the end of `predvv` is undesirable as this would require monopolising a working array to store the pressure gradient for the duration of the subroutine `predvv`. The calculation of the normalized residual is therefore carried out in two stages.

The quantity $\int_{\Omega_{iel}} \operatorname{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma d\Omega$ is calculated at the beginning of `predvv` and the complement $\int_{\Omega_{iel}} \operatorname{div}(\rho \tilde{\underline{u}}^{n+1}) d\Omega$ added at the end of `predvv`.

⁶value required for the integration of the diffusion term in `codits`, $(\mu_{tot})_{ij} \frac{\text{SURFN}}{\text{DIST}}$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 246/400
---------	--	---

The pressure gradient at the cells is thus first computed at instant $n - 1 + \theta$ by a call to `grdccl`. The subroutine `inimas` is then used to evaluate $\Delta t S \underline{\nabla} P^{n-1+\theta} \cdot \underline{n}$ at the faces (of surface S and normal \underline{n}). On entry into `inimas`, the working array `TRAV` contains $\frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}$; when exiting this subroutine, the `VISCF` and `VISCB` arrays contain the value of $\Delta t S \underline{\nabla} P^{n-1+\theta} \cdot \underline{n}$ at the internal and boundary faces respectively.

We then use `divmas` takes the value of $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) d\Omega$ at the cells from the contents of `VISCF` and `VISCB` and places it into the array `XNORMP`.

Lastly, the contribution $\int_{\Omega_{iel}} -\Gamma^n d\Omega$ of the mass source term is added to `XNORMP`.

For $\rho \underline{\tilde{u}} + \Delta t \underline{\nabla} P$, we apply the velocity boundary conditions. For the computation of $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) d\Omega$, the boundary conditions for the pressure gradient (or more precisely for $\frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}$) are therefore the homogenized boundary conditions of the velocity. The pressure gradient (or rather $\frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}$) is consequently assumed to be zero normal to the walls and the inlets and to remain constant in the direction normal to symmetries and to the outlets.

In addition, to save computation time when passing through `inimas`, the face values on non-orthogonal meshes are evaluated merely to first-order accuracy in space (no reconstruction: `NSWRP=1`). Local accuracy is moreover of no particular interest as the aim here is simply to determine a normalized global residual.

The computation of the residual will be completed at the end of `predvv`.

• Partial calculation of the normalized residual for the pressure step

During this first step, we use the array `XNORMP(NCELET)` to compute the quantity

$$\text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma$$

integrated over each cell `IEL` of the mesh (Ω_{iel}), which is expressed as:

$$\text{XNORMP}(\text{IEL}) = \int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma d\Omega$$

This operation is carried out by successively implementing `inimas` (calculation at the faces in `VISCF` and `VISCB` of $\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}$ using the contents of the working array `TRAV` = $\frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}$ together with homogeneous velocity boundary conditions and without reconstruction) followed by `divmas` (computation in `XNORMP` of the integral over the cells). With a simple loop, we then add the mass source term contribution Γ . This calculation is completed at the end of `predvv`.

• Partial calculation of the term \underline{f}_s^{exp}

To represent the second member corresponding to each component of the velocity, we use the arrays `TRAV(IEL,DIR)`, `TRAVA(IEL,DIR)` and `PROPCE`, with `IEL` being the number of the cell and `DIR` the direction (x, y, z). Four cases need to be considered depending on whether or not the source terms are extrapolated at $n + \theta_S$ and whether or not a fixed-point iteration is implemented on the velocity-pressure system (`NTERUP > 1`).

- If the source terms are extrapolated and we iterate over `navstv`

- `TRAV` receives the source terms which are recomputed during each iteration over `navstv` but are

not extrapolated ($\nabla P^{n-1+\theta}$ and $(\rho - \rho_0)g^7$).

- TRAVA receives the source terms whose values do not change during the course of the iterations over **navstv** nor are they extrapolated ($T_s^{imp} u^n, -\rho \underline{\underline{K}}_d u^n, -\Gamma^n u^n, \dots$).
- PROPCE receives the source terms that have to be extrapolated.

- When there is no iteration over **navstv**, TRAVA has no use and its contents are directly stored in TRAV.
- If there is no source term extrapolation, PROPCE serves no purpose and its contents are directly stored in TRAVA (or in TRAV if TRAVA is also of no use).
Therefore, when there is neither source term extrapolation nor iteration over **navstv**, all the source terms go directly into TRAV.

- We already have a pressure gradient on the cells at the instant in time $n - 1 + \theta$. The gravity term is then added to the vector TRAV which already contains pressure gradient. This means we have, for example, for the direction x:

$$\text{TRAV}(\text{IEL}, 1) = |\Omega_{IEL}| \left(-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{IEL}} + (\rho(\text{IEL}) - \rho_0)g_x \right) \quad (\text{IV.N.19})$$

- If source term extrapolation is used, at the first iteration over **navstv**, the vector TRAV (or TRAVA) receives $-\theta_S$ times the contribution at time $n - 1$ of the source terms to be extrapolated⁸ (stored in PROPCE). PROPCE is then reinitialised to zero so as to be able to receive afterwards the contribution at the current time step of the extrapolated source terms.
- The value of the term corresponding to the turbulence model is only calculated during the first iteration over **navstv** then added to TRAVA, TRAV or PROPCE depending on whether the source terms are extrapolated, and/or whether we iterate over **navstv**.

■ Turbulent viscosity models:

If **IGRHOK** = 1, then we calculate $-\frac{2}{3} \rho \nabla k$ (and not, as should be the case, $-\frac{2}{3} \nabla(\rho k)$) by way of simplification (cf. paragraph N). The gradient of the turbulent kinetic energy k is computed on the cell by the subroutine **grdcel**.

If **IGRHOK** = 0, this term is expected to be implicitly taken into account in the pressure.

■ Second order models:

Computation of the term $-\text{div}(\rho \underline{\underline{R}})$ is implemented in two steps. A call is first made to the subroutine **divrij**, which projects the vector $\underline{\underline{R}}_{\text{e}_{\text{DIR}}}$ onto the cell faces along the direction **DIR**, following which we then call the subroutine **divmas** to compute the divergence.

- The secondary viscosity $-\frac{2}{3} \nabla(\mu_{tot} \text{div } u)$ and transposed gradient $\text{div}(\mu_{tot} {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} u)$ terms, when these taken into account (*i.e.* **IVISSE**(**IPHAS**) = 1, where **IPHAS** is the number of the phase treated) are computed by the subroutine **visecv**. They are only calculated at the first iteration over **navstv**. During this step, the array TRAV serves as a working array when the subroutine

⁷In reality, the value of $(\rho - \rho_0)g$ doesn't change, however this is a computation and it avoids the need for additional treatment of this term.

⁸Because $(\underline{\underline{T}}_s^{exp})^{n+\theta_S} = (1 + \theta_S) (\underline{\underline{T}}_s^{exp})^n - \theta_S (\underline{\underline{T}}_s^{exp})^{n-1}$

`visecv` is being called. It reverts to its normal value at the end of the call during which its contents are stored temporarily in the vectors `W7` to `W9`.

- The terms corresponding to the velocity head losses ($\rho \underline{K}_{pdc} u$), if there are any (`NCEPDP` > 0), are calculated by the subroutine `tspdcv` at the first iteration over `navstv`. They are decomposed into two parts:
 - The first part, corresponding to the contribution of the diagonal terms ($-\rho \underline{K}_d u$), is not extrapolated.
 - The second, which corresponds to the extra diagonal terms ($-\rho \underline{K}_e u$), may or may not be extrapolated.
 During this step, the array `TRAV` is used as a working array while the call is being made to the subroutine `tspdcv`. It reverts to its normal value at the end of this call, its contents having been meanwhile stored in the vectors `W7` to `W9`.

- **Calculation of the viscosity term at the faces** ($\mu_{tot} \frac{\text{SURFN}}{\text{DIST}}_{ij}$)

The calculation of the total viscosity term at the faces is performed by the subroutine `viscfa` and the solutions stored in the arrays `VISCF` and `VISCB` for the internal and boundary faces respectively.

During integration of the convection-diffusion terms in the subroutine `codits`, the non-reconstructed terms, integrated in the matrix \underline{EM} , are singled out from the full set of terms (unreconstructed + reconstruction gradients) associated to the operator \mathcal{E} (nonlinear)⁹. Likewise, we differentiate between the total viscosity at the faces used in \mathcal{E} , arrays `VISCF` and `VISCB`, and the total viscosity at the faces employed in \underline{EM} , arrays `VISCFI` and `VISCBi`.

For turbulent viscosity models and in LES, these two arrays are identical and contain $\mu_t + \mu$. For second order models, they normally contain μ however, for the simple reason of numerical stability, we can choose to put $\mu_t + \mu$ in the matrix (*i.e.* in \underline{EM}) while keeping μ in the second member (*i.e.* in \mathcal{E}). Because the solution is obtained by increments, this manipulation doesn't change the result. This option is activated by the indicator `IRIJNU` = 1

When there is no diffusion of the velocity (`IDIFF(IUIPH)` < 1), the terms `VISCF` and `VISCB` are set to zero.

- **Calculation of the whole second member, of f_s^{imp} and solving of the equation**

The evolution equations for the components of the momentum are solved in a coupled manner. Consequently, we use a single array, `ROVSDT`, to represent the diagonal of the matrix obtained for each of the velocity components.

For each of these components:

- During the first iteration over the subroutine `navstv`, the implicit and explicit parts of the user-prescribed source terms are computed by a call to the subroutine `ustsns`.
 - The implicit part (T_s^{imp}) is saved in the vector `XIMPA` for subsequent iterations if the fixed-point method is used on the velocity-pressure system, with the contribution resulting from the same implicit terms ($T_s^{imp} \underline{u}^n$) being added either to `TRAVA` or to `TRAV`.
 - The explicit part (T_s^{exp}) is added to `TRAVA`, `TRAV` or `PROPCE` depending on whether the source terms are extrapolated or not, and whether we iterate over `navstv`.
- The mass accumulation term ($\text{div}(\rho \underline{u})$) is calculated by calling the subroutine `divmas` with the mass flux as argument. During the first iteration of the subroutine `navstv`, the term corresponding to the explicit contribution of the mass accumulation ($\underline{u}^n \text{div}(\rho \underline{u})$) is added to `TRAVA` or to `TRAV`. The vector `ROVSDT` is initialized by $\theta \text{div}(\rho \underline{u})$ (to remain coherent with the approach

⁹Ensuring coherence with the definition of the operators \mathcal{EM} and \mathcal{E} employed in `navstv`

implemented in the subroutine `bilsc2`) after which the contribution of the non-stationary term ($\frac{\rho}{\Delta t}$) is added to the latter.

- The vector `ROVSDT` is next completed with the contribution of the user-defined implicit source terms (stored in `XIMPA`) and with that of the head loss term ($\rho \underline{\underline{K}}_d$) should `NCEPDP` > 0.
 - When there is no source term extrapolation, the implicit part of the user source terms is only added to `ROVSDT` if it is negative so as not to weaken the diagonal of the system.
 - When the source terms are extrapolated however, it is taken into account whatever its sign may be.
- The implicit and explicit mass source terms, if any (`NCESMP` > 0), are computed at the first iteration by the subroutine `catsma` over `navstv`. $\Gamma \underline{u}_i$ is added to `TRAV`, `TRAVAL` or `PROPCE` for potential extrapolation. $\Gamma \underline{u}^n$ is added to `TRAV` or `TRAVAL` and $-\Gamma$ to `ROVSDT`.
- The second member is then assembled taking account of all of the contributions stored in the arrays `PROPCE`, `TRAVAL` and `TRAV`.
 - If the source terms are extrapolated, then the second member reads:

$$\text{SMBR} = (1 - \theta_S) \text{PROPCE} + \text{TRAVAL} + \text{TRAV}$$

- If not, we directly obtain:

$$\text{SMBR} = \text{TRAVAL} + \text{TRAV}$$

- If a specific physics (lagrangian, electric arc, ...) is taken into account, its contribution is directly added to `SMBR`.
- The solution of the linear system is computed by the subroutine `codits`, taking as argument `ROVSDT` and `SMBR`.
- When strengthened transient velocity-pressure coupling (`IPUCOU` = 1) (only available with a first-order scheme, where there is neither source term extrapolation nor iteration over `navstv`) is implemented, `codits` solves the following equation:

$$\underline{\underline{EM}}_{\text{DIR}} \cdot (\underline{\underline{RHO}}^n)^{-1} \cdot \underline{T}_{\text{DIR}} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{1} \quad (\text{IV.N.20})$$

with $\underline{\underline{RHO}}^n$ the diagonal tensor of element ρ_{IEL}^n , $\underline{\underline{\Omega}}$ the diagonal tensor of element $|\Omega_{IEL}|$ and $\underline{1}$ denoting the vector whose components are all equal to one.

Inversion of the system by `codits` yields $(\underline{\underline{RHO}}^n)^{-1} \cdot \underline{T}_{\text{DIR}}$, which is subsequently multiplied by $\underline{\underline{RHO}}^n$ to obtain $\underline{T}_{\text{DIR}}$. This process is repeated for each component `DIR` of the velocity. $\underline{T}_{\text{DIR}}$ is therefore a diagonal matrix approximation of $\underline{\underline{RHO}}^n \cdot \underline{\underline{EM}}_{\text{DIR}}^{-1}$, with $\underline{\underline{EM}}_{\text{DIR}}$ representing the implicit part of the solution to the discrete momentum equation (*i.e.* `ROVSDT` + contribution of the convection-diffusion terms accounted for in the subroutine `matrix`). $\underline{T}_{\text{DIR}}$ is also involved in the correction step (cf. subroutine `resopv`).

This terminates the loop over the velocity components.

• Final calculation of the normalized residual for the pressure step

As mentioned beforehand, the computation of the normalized residual for the pressure step of `resopv` can now be completed.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 250/400
---------	--	---

The **XNORMP** array already contains $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) - \Gamma d\Omega$ to which we now add $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\rho \widetilde{\underline{u}^{n+1}}) d\Omega$.

To do so, we follow the same procedure used previously to compute the integral $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\Delta t \underline{\nabla} P^{n-1+\theta}) d\Omega$.

A call to **inimas** enables to obtain $\rho S \widetilde{\underline{u}}^{n+1} \cdot \widetilde{\underline{n}}$ at the faces calculated from the of $\widetilde{\underline{u}}^{n+1}$ known at the cells (array **RTP**). The boundary conditions employed in **inimas** are naturally those of the velocity. As beforehand, evaluation of the face values is only up to first-order in space on non-orthogonal meshes (no reconstruction : **NSWRP=1**) in order to save computation time when passing through **inimas**. The subroutine **divmas** is then used to compute the divergence $\int_{\Omega_{iel}} \text{div}(\rho \widetilde{\underline{u}}^{n+1}) d\Omega$ at the cells, which is

then added directly to **XNORMP**.

Lastly, the normalized residual is determined and then stored in **RNORMP(IIPHAS)** by a call to **prodsc** (which computes the sum of the squares of the values at the faces contained in **XNORMP** and then takes the square root of the result).

The different contributions (excluding convection-diffusion) assigned to each of the vectors **TRAV**, **TRAVA**, **PROPCE** and **ROVSDT** at iteration n are summarized in tables (IV.N.21), (IV.N.22), (IV.N.23) and (IV.N.24). We differentiate two cases for each of the time-stepping schemes applied to the source terms, depending on whether or not a fixed-point algorithm is used to solve the velocity-pressure system (iteration over **navstv** for **NTERUP** > 1). Unless otherwise specified, the physical properties Φ ($\rho, \mu, \text{etc.}$) are assumed to be evaluated at the time level $n + \theta_\Phi$, and the mass flux ($\rho \underline{u}$) at $n + \theta_F$, where θ_Φ and θ_F are dependent on the specific time-stepping schemes selected for these quantities (cf. **introd**).

The terms appearing in these tables are written as they have been implemented in the code, this being the source of some differences in relation to the form adopted in equation (IV.N.16).

In order to simplify the problem, we pose:

$$\mu_{tot} = \begin{cases} \mu + \mu_t & \text{for turbulent viscosity models and in LES,} \\ \mu & \text{for second-order models and in laminar regime} \end{cases}$$

WITH EXTRAPOLATION OF SOURCE TERMS

$$\underline{turb}^n = \begin{cases} \frac{2}{3} \rho^n \underline{\nabla}(k^n) & \text{for turbulent viscosity models,} \\ \text{div}(\rho^n \underline{R}^n) & \text{for second-order models,} \\ 0 & \text{in laminar or LES computations.} \end{cases}$$

- **NTERUP** = 1 : $\text{SMBR}^n = (1 - \theta_S) \text{PROPCE}^n + \text{TRAV}^n$

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} - \theta \text{div}(\rho \underline{u}) + \theta \Gamma^n + \theta \rho \underline{K}_d^n - \theta T_s^{imp}$	(IV.N.21)
PROPCE ⁿ	$\underline{T}_s^{exp, n} - \rho^n \underline{K}_e^n \underline{u}^n + \Gamma^n \underline{u}_i^n$ $-\underline{turb}^n + \text{div}(\mu_{tot}^n \text{grad} \underline{u}^n) + \frac{2}{3} \underline{\nabla}(\mu_{tot}^n \text{div} \frac{(\rho \underline{u})}{\rho^n})$	
TRAV ⁿ	$-\underline{\nabla} p^{n-1+\theta} + (\rho - \rho_0) \underline{g}$ $-\theta_S \text{PROPCE}^{n-1} - \rho \underline{K}_d^n \underline{u}^n$ $+ T_s^{imp} \underline{u}^n + \text{div}(\rho \underline{u}) \underline{u}^n - \Gamma^n \underline{u}^n$	

- **NTERUP** > 1 (sub-iteration k) : $\text{SMBR}^n = (1 - \theta_S) \text{PROPCE}^n + \text{TRAVA}^n + \text{TRAV}^n$

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} - \theta \text{div}(\rho \underline{u}) + \theta \Gamma^n + \theta \rho \underline{K}_d^n - \theta T_s^{imp}$	(IV.N.22)
PROPCE ⁿ	$\underline{T}_s^{exp, n} - \rho^n \underline{K}_e^n \underline{u}^n + \Gamma^n \underline{u}_i^n$ $-\underline{turb}^n + \text{div}(\mu_{tot}^n \text{grad} \underline{u}^n) + \frac{2}{3} \underline{\nabla}(\mu_{tot}^n \text{div} \frac{(\rho \underline{u})}{\rho^n})$	
TRAVA ⁿ	$-\theta_S \text{PROPCE}^{n-1} - \rho \underline{K}_d^n \underline{u}^n + T_s^{imp} \underline{u}^n + \text{div}(\rho \underline{u}) \underline{u}^n - \Gamma^n \underline{u}^n$	
TRAV ⁿ	$-\underline{\nabla}(p^{n+\theta})^{(k-1)} + (\rho - \rho_0) \underline{g}$	

WITHOUT SOURCE TERM EXTRAPOLATION

$$\underline{turb}^n = \begin{cases} \frac{2}{3} \rho \underline{\nabla}(k^n) & \text{for turbulent viscosity models,} \\ \text{div}(\rho \underline{R}^n) & \text{for second-order models,} \\ 0 & \text{in laminaire or LES computations.} \end{cases}$$

- NTERUP = 1 : $\text{SMBR}^n = \text{TRAV}^n$

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma^n + \rho \underline{\underline{K}}_d^n + \operatorname{Max}(-T_s^{imp}, 0)$	
TRAV ⁿ	$ \begin{aligned} & -\nabla p^{n-1+\theta} + (\rho - \rho_0)g \\ & + \underline{T}_s^{exp} - \rho \underline{\underline{K}}_e^n \underline{u}^n + \Gamma^n \underline{u}_i^n \\ & - \underline{turb}^n + \operatorname{div}(\mu_{tot} {}^t \underline{\underline{grad}} \underline{u}^n) + \frac{2}{3} \nabla(\mu_{tot} \operatorname{div} \frac{(\rho \underline{u})}{\rho}) \\ & - \rho \underline{\underline{K}}_d^n \underline{u}^n + T_s^{imp} \underline{u}^n + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \underline{u}^n - \Gamma^n \underline{u}^n \end{aligned} $	(IV.N.23)

- NTERUP > 1 (sub-iteration k) : $\text{SMBR}^n = \text{TRAVA}^n + \text{TRAV}^n$

ROVSDT ⁿ	$\frac{\rho}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma^n + \rho \underline{\underline{K}}_d^n + \operatorname{Max}(-T_s^{imp}, 0)$	
TRAVA ⁿ	$ \begin{aligned} & \underline{T}_s^{exp} - \rho \underline{\underline{K}}_e^n \underline{u}^n + \Gamma^n \underline{u}_i^n \\ & - \underline{turb}^n + \operatorname{div}(\mu_{tot} {}^t \underline{\underline{grad}} \underline{u}^n) + \frac{2}{3} \nabla(\mu_{tot} \operatorname{div} \frac{(\rho \underline{u})}{\rho}) \\ & - \rho \underline{\underline{K}}_d^n \underline{u}^n + T_s^{imp} \underline{u}^n + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \underline{u}^n - \Gamma^n \underline{u}^n \end{aligned} $	(IV.N.24)
TRAV ⁿ	$-\nabla(p^{n+\theta})^{(k-1)} + (\rho - \rho_0)g$	

Points to treat

- **Evaluation of the term $\nabla(\rho k)$ for turbulent viscosity models**

When modelling turbulent viscosity, we compute $\rho \nabla k$ instead of $\nabla(\rho k)$. This approximation was implemented from the outset because the ρk boundary conditions are not directly accessible, in contrast to those of k .

- **Account taken of the diagonal of $\underline{\underline{K}}_{pdc}$**

The user subroutine `uskpdc`, currently contains an explicit warning regarding this issue, however it is written in as a comment. If the user doesn't take sufficient care, the diagonal part $\underline{\underline{K}}_d$ of the velocity head loss tensor $\underline{\underline{K}}_{pdc}$ can be systematically taken into account in the computation of the coefficient f_s^{imp} , whether its contribution K_d is positive or not. A positivity test to check the positive definiteness of the elements of $\underline{\underline{K}}_d$ should be implemented to ensure these are correctly taken into account (contribution genuinely increasing the diagonal dominance of the global matrix).

- **Expression of $\underline{\underline{EM}}$**

With incremental solving, it is not absolutely necessary for convergence that the value of the viscosity appearing in the expression of the operator \mathcal{E} be the same as that taken into account in the incremental system matrix, $\underline{\underline{EM}}$. In $R_{ij} - \varepsilon$, for example, the total viscosity used in $\underline{\underline{EM}}$ contains the molecular viscosity but can also contain the turbulent viscosity if the option `IRIJNU = 1` is selected, whereas only the former is included in the operator \mathcal{E} . This addition of the turbulent viscosity, which is not at all relevant to the $R_{ij} - \varepsilon$ model, has been inherited from practices implemented in ESTET and N3S-EF to improve numerical stability (incremental smoothing). However, it may have other, potentially less desirable effects. Moreover, it has not been demonstrated to date that this practice is of absolute necessity in the use of *Code_Saturne*. An in-depth study would therefore be of some interest.

- **Normalized residual relating to the pressure step**

We could check the normalized residual computation and in particular the use of the velocity boundary conditions.

- **Calculation of the head losses**

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 253/ 400
---------	--	---

When the source terms are extrapolated in time, we now obtain:

$$(\underline{\underline{K}}_e \underline{u})^{n+\theta_S} + \underline{\underline{K}}_d^n \underline{u}^{n+\theta}$$

It would also be possible to envisage using:

$$(\underline{\underline{K}}_e \underline{u})^{n+\theta_S} + \underline{\underline{K}}_d^{n+\theta_S} \underline{u}^{n+\theta}$$

O- resopv routine

Function

The velocity projection (or pressure correction) step is effected in this subroutine, called from **navstv**. The equation of motion (prediction) is solved in **predvv** with a fully explicit treatment of the pressure term. The resulting velocity field does not satisfy the continuity equation. Two correction algorithms are proposed:

1. The algorithm that we will call "weak velocity-pressure coupling". This algorithm is implemented extensively in industrial source codes. It only couples the velocity and the pressure through the mass term (it is the algorithm proposed by default). It consists of a *SIMPLEC*-type algorithm, similar to *SIMPLE* although the latter accounts for the simplified diagonals of the convection, diffusion and implicit source terms in addition to the mass term.
2. The strengthened velocity-pressure coupling algorithm (option **IPUCOU** = 1). This algorithm couples the velocity and pressure through all of the terms (convection, diffusion and implicit source terms) of the equation of motion, though it is still approximate. In practice, the advantage of this algorithm is that it allows large time steps without entirely decoupling the velocity and the pressure.

Taking δp as the pressure increment (*i.e.* $p^{n+1} = p^n + \delta p$) and \tilde{u} the velocity field resulting from the prediction step, from a continuous point of view the projection step essentially comes down to solving a Poisson equation for the pressure:

$$\text{div}(\underline{\underline{T}}^n \nabla \delta p) = \text{div}(\rho \tilde{u}) \quad (\text{IV.O.1})$$

and then correcting the velocity:

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \frac{1}{\rho} \underline{\underline{T}}^n \nabla \delta p \quad (\text{IV.O.2})$$

$\underline{\underline{T}}^n$ is a second-order tensor whose components are homogeneous over a time step.

Discretization

The velocity description step is described in **predvv**. An operator notation is adopted here to provide a simplified explanation of the code-based algorithms. The discrete equation of motion at an intermediate point in time of solution is written, in each direction of space α ($\alpha \in \{1, 2, 3\}$) in the form:

$$\underline{\underline{M}}_{\alpha}^n \underline{\underline{R}}^n (\tilde{V}_{\alpha} - V_{\alpha}^n) + \underline{\underline{A}}_{\alpha}^n \tilde{V}_{\alpha} = - \underline{\underline{G}}_{\alpha} P^n + \underline{\underline{S}}_{\alpha}^n + \underline{\underline{I}}_{s,\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \quad (\text{IV.O.3})$$

- ★ $\underline{\underline{M}}_{\alpha}^n$, is a diagonal matrix, of dimension $\text{NCEL} \times \text{NCEL}$, containing the ratio of the volume of a cell to the local time step ($\underline{\underline{M}}_{\alpha}^n(i, i) = \frac{|\Omega_i|}{\Delta t_{\alpha, I}^n}$), $\Delta t_{\alpha, I}^n$ represents the time step at time level n in the (spatial) direction α at the cell Ω_i ,

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 255/400
---------	--	---

- ★ \underline{R}^n , is the diagonal matrix of dimension $\text{NCEL} \times \text{NCEL}$, that contains the density (which is separated out from the mass matrix during this step so that a projection can be made of the value of $\rho \underline{u}$). By definition, $\underline{R}^n(i, i) = \rho_I^n$, which means that the appearance of a vacuum (or null space) is naturally excluded and the matrix will therefore always be invertible,
- ★ $\widetilde{\underline{V}}_\alpha$, of dimension NCEL , is an array in which the α^{th} component of the predicted velocity field $\widetilde{\underline{u}}$ is stored,
- ★ \underline{V}_α^n , of dimension NCEL , is an array storing the α^{th} component of the velocity \underline{u}^n at the previous instant of time n ,
- ★ \underline{A}_α^n denotes the convection/diffusion operator (it is not necessarily linear owing to the possible use of slope tests in the convection scheme and may be dependent on \underline{V}_α),
- ★ \underline{G}_α is the linear, "cell" gradient operator¹ in the direction α (it is therefore applied on the vectors of dimension NCEL),
- ★ \underline{P}^n , of dimension NCEL , is an array used to store the pressure p^n computed at each cell during the previous time step,
- ★ \underline{S}_α^n is the array of dimension NCEL that contains all of the explicit source terms (see **predvv** for more detail),
- ★ $\underline{I}_{s,\alpha}$ is the diagonal tensor related to the implicit source terms of the velocity components.

The correction step consists of imposing the continuity constraint for the mass conservation:

$$\text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma \quad (\text{IV.O.4})$$

where Γ is an eventual mass source term.

Let \underline{W} be the array of dimension $3 \times \text{NCEL}$ that contains all of the momentum components (\underline{V} denotes \underline{V}^n , \underline{V}^{n+1} or $\widetilde{\underline{V}}$).

$$\underline{W} = \underline{R}^n \underline{V} = \begin{pmatrix} \rho^n \underline{V}_1 \\ \rho^n \underline{V}_2 \\ \rho^n \underline{V}_3 \end{pmatrix}$$

Let \underline{D} be the divergence operator. The continuity equation (IV.O.4) is rewritten in compact form as:

$$\underline{D} \underline{W} = \underline{\Gamma}$$

$\underline{\Gamma}$ contains the values of Γ at the cell centroids.

Rearranging the discrete equation (IV.O.3), we write for all $\alpha \in \{1, 2, 3\}$:

$$(\underline{M}_\alpha^n + \underline{A}_\alpha^n (\underline{R}^n)^{-1} - \underline{I}_{s,\alpha} (\underline{R}^n)^{-1}) \underline{R}^n \widetilde{\underline{V}}_\alpha = - \underline{G}_\alpha \underline{P}^n + \underline{S}_\alpha^n + \underline{M}_\alpha \underline{R}^n \underline{V}_\alpha^n \quad (\text{IV.O.5})$$

By grouping and posing the following definitions:

$$\underline{B}_\alpha = \underline{M}_\alpha^n + \underline{A}_\alpha^n (\underline{R}^n)^{-1} - \underline{I}_{s,\alpha} (\underline{R}^n)^{-1}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{B}_3 \end{pmatrix}$$

¹strictly speaking, this operator would no longer be truly linear if a gradient constraint option were to have been activated by the user

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{G}}_1 \\ \underline{\underline{G}}_2 \\ \underline{\underline{G}}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}}^n = \begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_1^n + \underline{\underline{M}}_1 \underline{\underline{R}}^n \underline{\underline{V}}_1^n \\ \underline{\underline{S}}_2^n + \underline{\underline{M}}_2 \underline{\underline{R}}^n \underline{\underline{V}}_2^n \\ \underline{\underline{S}}_3^n + \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{R}}^n \underline{\underline{V}}_3^n \end{pmatrix}$$

we can thus write the simplified equation as:

$$\underline{\underline{B}} \widetilde{\underline{W}} = - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}}^n + \underline{\underline{S}}^n \quad (\text{IV.O.6})$$

With the fractional step method, ??? is decomposed into a sequence of two steps:

1. solution of the equation (IV.O.3) (this equation yields equation(IV.O.6)), namely:

$$\underline{\underline{M}}_\alpha^n \underline{\underline{R}}^n (\widetilde{\underline{V}}_\alpha - \underline{\underline{V}}_\alpha^n) + \underline{\underline{A}}_\alpha^n \widetilde{\underline{V}}_\alpha - \underline{\underline{I}}_{s,\alpha} \widetilde{\underline{V}}_\alpha = - \underline{\underline{G}}_\alpha \underline{\underline{P}}^n + \underline{\underline{S}}_\alpha^n \quad (\text{IV.O.7})$$

2. subtraction² of the solved velocity prediction equation (IV.O.7) from the equation of motion evaluated at the subsequent time level $(n+1)$:

$$\underline{\underline{M}}_\alpha^n \underline{\underline{R}}^n (\underline{\underline{V}}_\alpha^{n+1} - \widetilde{\underline{V}}_\alpha) + \underline{\underline{A}}_\alpha^n (\underline{\underline{V}}_\alpha^{n+1} - \widetilde{\underline{V}}_\alpha) - \underline{\underline{I}}_{s,\alpha} (\underline{\underline{V}}_\alpha^{n+1} - \widetilde{\underline{V}}_\alpha) = - \underline{\underline{G}}_\alpha (\underline{\underline{P}}^{n+1} - \underline{\underline{P}}^n) \quad (\text{IV.O.8})$$

Reverting to compact notation, Equation (IV.O.8) gives:

$$\underline{\underline{B}} (\underline{\underline{W}}^{n+1} - \widetilde{\underline{W}}) = - \underline{\underline{G}} (\underline{\underline{P}}^{n+1} - \underline{\underline{P}}^n) \quad (\text{IV.O.9})$$

with:

$$\underline{\underline{W}}^{n+1} = \underline{\underline{R}}^n \underline{\underline{V}}^{n+1}$$

The continuity constraint has yet to be enforced:

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{W}}^{n+1} = \underline{\underline{\Gamma}}$$

By combining the equations of continuity and motion and postulating that $\delta \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^{n+1} - \underline{\underline{P}}^n$, the following Poisson-type equation is derived:

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{G}} \delta \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{D}} \widetilde{\underline{W}} - \underline{\underline{\Gamma}} \quad (\text{IV.O.10})$$

We still need to invert the system (IV.O.10) in order to determine δp (and thus p^{n+1}) and correct the projected velocity field so as to obtain $\underline{\underline{u}}^{n+1}$. The velocity correction is handled in **navstv**, by incrementing the velocity by the calculated magnitude of the gradient of the pressure increment δp .

The problem initially arises with the calculation of $\underline{\underline{B}}^{-1}$. It has already been judged too expensive computationally to calculate the inverse de $\underline{\underline{B}}$. The solutions computed by the "weak velocity-pressure coupling" and the "strengthened velocity-pressure coupling" algorithms correspond to an approximation of this operator.

In the case of the "weak velocity-pressure coupling" algorithm, we assume $\underline{\underline{B}}_\alpha^{-1} = \underline{\underline{M}}_\alpha^{-1}$ (we could also include the diagonal terms of the convection, diffusion and implicit source terms).

With "strengthened velocity-pressure coupling", we invert the system³ $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Omega}}$ and we define the equality $\underline{\underline{B}}_\alpha^{-1} = \text{diag}(\underline{\underline{T}}_\alpha)$. This step takes place in the subroutine **predvv**.

²We neglect any variation in the explicit source terms $\underline{\underline{S}}_\alpha^n$ which are still those estimated at n .

³ $\underline{\underline{\Omega}} = (|\Omega_1|, \dots, |\Omega_{\text{NCEL}}|, |\Omega_1|, \dots, |\Omega_{\text{NCEL}}|, |\Omega_1|, \dots, |\Omega_{\text{NCEL}}|)$.

The use of operators when writing out the equations presents a major inconvenience when used in conjunction with collocated discretization. More specifically, the operator⁴ $\underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{G}}$ can lead to odd-even decoupling of the nodes on a regular Cartesian mesh⁵. To avoid this problem, we use the operator $\underline{\underline{L}}$ (already present in the collocated finite volume formulation of the operator $\text{div}(\underline{\nabla})$) defined in each cell⁶ Ω_i of centre I by⁷:

$$(\underline{\underline{L}} \delta P)_I = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [\underline{\underline{T}}_{ij}^n (\underline{\nabla} \delta p)_{f_{ij}}] \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} [\underline{\underline{T}}_{b_{ik}}^n (\underline{\nabla} \delta p)_{f_{b_{ik}}}] \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \quad (\text{IV.O.11})$$

$\underline{\underline{T}}^n$ is a diagonal tensor of order 2 containing the time steps in the three spatial directions with \underline{S}_{ij} and $\underline{S}_{b_{ik}}$ the surface vector respectively of the purely internal face and of the boundary face ik . The gradient $(\underline{\nabla} \delta p)_f$ present in equation (IV.O.11) is a facet⁸ gradient.

From a continuous perspective, we can write⁹:

$$(\underline{\underline{L}} P^{n+1})_I = \int_{\Omega_i} \text{div}(\underline{\underline{T}}^n \underline{\nabla} P^{n+1}) d\Omega$$

The operator $\underline{\underline{L}}$ does not pose a problem of odd/even decoupling on regular Cartesian meshes.

With the "weak velocity-pressure coupling" algorithm: $\underline{\underline{T}}_I^n = \begin{pmatrix} \Delta t_I^n & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t_I^n & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t_I^n \end{pmatrix}$

and with the "strengthened velocity-pressure coupling" algorithm: $\underline{\underline{T}}_I^n = \begin{pmatrix} T_{11,I}^n & 0 & 0 \\ 0 & T_{22,I}^n & 0 \\ 0 & 0 & T_{33,I}^n \end{pmatrix}$

The pressure system matrix is not easy to compute when "strengthened velocity-pressure coupling" is being used, this being due to the term:

$$[\underline{\underline{T}}_{ij}^n (\underline{\nabla} \delta p)_{f_{ij}}] \cdot \underline{S}_{ij}$$

for an internal face ij and the term:

$$[\underline{\underline{T}}_{b_{ik}}^n (\underline{\nabla} \delta p)_{f_{b_{ik}}}] \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$$

for a boundary face.

The difficulty lies with the viscosity, which changes according to the spatial direction. As the tensor $\underline{\underline{T}}^n$ is effectively anisotropic, the pressure gradients for each direction must consequently be computed as a function of the normal gradient.

Without reference, for the moment, to the nature of the gradient $\underline{\nabla}$, we define for every scalar a :

$$\tilde{\underline{\underline{G}}} a = \underline{\underline{T}}^n \underline{\nabla} a = \begin{pmatrix} T_{11}^n \frac{\partial a}{\partial x} \\ T_{22}^n \frac{\partial a}{\partial y} \\ T_{33}^n \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$$

⁴We emphasize again that the operator $\underline{\underline{G}}$ is the "cell gradients" operator applied to the explicit pressure during velocity prediction.

⁵If u_i is the value of a variable at the cell centres on a 1D Cartesian mesh, the Laplacian of u calculated by this operator in i is written: $\frac{u_{i-2} + 2u_i - u_{i+2}}{4h^2}$, where h is the space step. This is where the decoupling of the cells originates.

⁶Recalling that $\text{Neigh}(i)$ is the set of cell centres of the neighbouring cells of Ω_i and $\gamma_b(i)$ the set of centres of the boundary faces, if any, of Ω_i .

⁷If u_i is the value of a variable at the cell centres on a 1D Cartesian mesh, the Laplacian of u calculated by the latter operator in i reads: $\frac{u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{4h^2}$, with h the spatial step.

⁸On orthogonal mesh, $(\underline{\nabla} p)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} = \frac{p_J - p_{I'}}{IJ} S_{ij}$. I (resp. J) et I' (resp. J') are in effect superimposed.

⁹In the "weak velocity-pressure coupling" algorithm case, $\tilde{\Delta t}_I^n = \Delta t_I^n$.

We can also define:

$$\left[(\tilde{G} a)_{cell} \right]_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \stackrel{def}{=} [\underline{T}^n (\nabla a)]_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}$$

where ∇a is the standard cell gradient of a .

and likewise for the facet gradient $(\nabla a)_f$ of a :

$$\left[(\tilde{G} a)_f \right]_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \stackrel{def}{=} [\underline{T}^n ((\nabla a)_f)]_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}$$

We need to calculate $\tilde{G}(\delta p) \cdot \underline{S}$ at the face.

This is relatively simple with a cell gradient as all the components of the latter perfectly calculable. The difficulty lies, on the contrary, with a facet gradient because the only exploitable options is the decomposition of the face normal gradient¹⁰. We need the quantities $\frac{\partial(\delta p)}{\partial x}$, $\frac{\partial(\delta p)}{\partial y}$ and $\frac{\partial(\delta p)}{\partial z}$ both explicitly and separately, which makes it difficult to use the normal pressure increment gradient. We therefore make an approximation of the gradient of the pressure increment by assuming it to be equal to its normal component¹¹, which is:

$$(\nabla(\delta p))_f \approx ((\nabla(\delta p))_f \cdot \underline{n}) \underline{n} \quad (\text{IV.O.12})$$

where \underline{n} denotes the outer unit normal vector. We then obtain:

$$\tilde{G}(\delta p) \approx ((\nabla(\delta p))_f \cdot \underline{n}) (\underline{T}^n \underline{n})$$

This enables reducing the computations to those of a scalar time step \tilde{T}_{ij}^n , given by:

$$\tilde{T}_{ij}^n = (\underline{T}_{ij}^n \underline{n}) \cdot \underline{n} \quad (\text{IV.O.13})$$

In which case:

$$\begin{aligned} [\underline{T}_{ij}^n (\nabla \delta p)_{f_{ij}}] \cdot \underline{S}_{ij} &\approx (\underline{T}_{ij}^n \underline{n}) \cdot \underline{S}_{ij} ((\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{n}) \\ &= (\underline{T}_{ij}^n \underline{n}) \cdot \underline{n} ((\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{n}) S_{ij} \\ &= \tilde{T}_{ij}^n ((\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{n}) S_{ij} \end{aligned} \quad (\text{IV.O.14})$$

or on the other hand:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}^n ((\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{n}) S_{ij} &= \tilde{T}_{ij}^n \nabla(\delta p)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} \\ &= \tilde{T}_{ij}^n \left[P_J - P_I + (\underline{JJ}' - \underline{II}') \frac{1}{2} (\underline{\nabla} P_I + \underline{\nabla} P_J) \right] \frac{S_{ij}}{\underline{I}' \underline{J}'} \end{aligned} \quad (\text{IV.O.15})$$

This is used during reconstruction of the gradients in the second member of the final system of equations to solve, by calling the subroutines **itrmas** and **itrgrp**.

The approximation $(\tilde{T}_{ij}^n = (\underline{T}_{ij}^n \underline{n}) \cdot \underline{n})$ is not in fact used. This is because the directional gradient of the pressure increment is computed using the subroutine **grdcel**, allowing us to take the liberty of using the tensor \underline{T} to correct the term $[\underline{T}_{ij}^n (\nabla \delta p)_{f_{ij}}] \cdot \underline{S}_{ij}$.

In practice, the latter is discretized, for an internal face ij , by¹²:

$$[\underline{T}_{ij}^n (\nabla \delta p)_{f_{ij}}] \cdot \underline{S}_{ij} = \left[\tilde{T}_{ij}^n \frac{P_J - P_I}{\underline{I}' \underline{J}'} + \frac{\underline{JJ}' - \underline{II}'}{\underline{I}' \underline{J}'} \frac{1}{2} (\underline{T}_I^n \underline{\nabla} P_I + \underline{T}_J^n \underline{\nabla} P_J) \right] S_{ij} \quad (\text{IV.O.16})$$

¹⁰According to the formula $\frac{P_{J'} - P_{I'}}{\underline{I}' \underline{J}'} S_{ij}$.

¹¹i.e. no account is taken of the tangential component $((\nabla(\delta p))_f \cdot \underline{\tau}) \underline{\tau}$, $\underline{\tau}$ denoting the tangential unit vector.

¹²The factor $\frac{1}{2}$ appearing in the discretization (IV.O.16) is introduced for reasons of numerical stability. Although the use of weighting coefficients on the faces would in effect yield a more accurate numerical solution, it would probably also be less stable.

rather than by (IV.O.15). We use the same approach for the boundary terms.

The expression $\tilde{T}_{ij}^n (\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij}$ will nevertheless be seen subsequently.

The last issue relating to the inversion of the system (IV.O.10) concerns the tensor term $\underline{\underline{D}} \widetilde{W}$. This term tends, *via* the cell pressure gradients present in the equation of motion, to decouple the odd and even-numbered cells on a Cartesian grid. To avoid this problem, we apply a variant of the Rhie & Chow filter which enables to dissipate (or smooth) the pressure field contribution in the equation of motion. Expressed in discretized form, this yields:

$$\begin{aligned}
 (\underline{\underline{D}} \widetilde{W})_I &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} [\rho^n \tilde{u} + \alpha_{Arak} (\tilde{G}(p^n))_{cell}]_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} - \alpha_{Arak} \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{T}_{ij}^n (\nabla p^n)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} \\
 &+ \sum_{k \in \gamma_b(i)} [\rho^n \tilde{u} + \alpha_{Arak} (\tilde{G}(p^n))_{cell}]_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} - \alpha_{Arak} \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{T}_{b_{ik}}^n (\nabla p^n)_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \\
 &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{m}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{m}_{b_{ik}}
 \end{aligned} \tag{IV.O.17}$$

where \tilde{m}_{ij} and $\tilde{m}_{b_{ik}}$ denote respectively the mass flux at the purely internal face and the boundary face ik) modified by the Rhie & Chow filter.

$(\nabla p^n)_{f_{ij}}$ represents a facet gradient while $[\rho^n \tilde{u} + \alpha_{Arak} (\tilde{G}(p^n))_{cell}]_{f_{ij}}$ denotes a face value interpolated from the estimated cell values (the pressure gradient in this term is a cell-based gradient). This clarification also applies to the boundary terms.

For historical reasons, α_{Arak} is known as "the Arakawa coefficient d'Arakawa" in *Code_Saturne*. It is denoted **ARAK**.

It should be reiterated that, for the Rhie & Chow filter, the tensor $\underline{\underline{T}}^n$ is used in the volumetric term \tilde{G} whereas the approximation (IV.O.13) is applied when computing the facet gradient.

In accordance with equations (IV.O.10) and (IV.O.11), we finally solve the Poisson equation under the form:

$$\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{T}_{ij}^n (\nabla(\delta p))_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{T}_{b_{ik}}^n (\nabla(\delta p))_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{m}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{m}_{b_{ik}} - \Gamma_I \tag{IV.O.18}$$

To take account of the non-orthogonal elements, we use an incremental method to solve the linear equation system, including the reconstructed terms in the second member. If $\delta(\delta p)$ denotes the increment of the increment (the increment of the variable δp to compute) and k the fixed-point iteration index, we solve exactly :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{T}_{ij}^n \frac{(\delta(\delta p))_I^{k+1} - (\delta(\delta p))_J^{k+1}}{\overline{I'J'}} S_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{T}_{b_{ik}}^n \frac{(\delta(\delta p))_I^{k+1} - (\delta(\delta p))_{b_{ik}}^{k+1}}{\overline{I'F}} S_{b_{ik}} \\
 &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{m}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{m}_{b_{ik}} \\
 &- \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{T}_{ij}^n (\nabla(\delta p)^k)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{T}_{b_{ik}}^n (\nabla(\delta p)^k)_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} - \Gamma_I \\
 &= \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} m_{ij}^k + \sum_{k \in \gamma_b(i)} m_{b_{ik}}^k - \Gamma_I
 \end{aligned} \tag{IV.O.19}$$

with:

$$\begin{cases} (\delta(\delta p))^0 &= 0 \\ (\delta(\delta p))^{k+1} &= (\delta p)^{k+1} - (\delta p)^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{IV.O.20}$$

The facet gradients, denoted $(\nabla(\delta p)^k)_{f_{ij}}$ and $(\nabla(\delta p)^k)_{f_{b_{ik}}}$, will be reconstructed.

Implementation

We present hereafter the algorithm as it is written in **resopv**.

$\underline{\underline{T}}^n$ designates an array of dimension 3 containing the local time steps in each direction (for use with

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 260/400
---------	--	---

”strengthened velocity-pressure coupling”). We keep the same notation for the ”weak velocity-pressure coupling” algorithm although in this case the time steps are equal in the three spatial directions.

- **Computation of the matrix of the equation system to be solved**

- calculation of the diffusion coefficient at the cell faces for use in the Laplacian of pressure (the diffusion coefficient uses the calculation time step or that of the ”strengthened velocity-pressure coupling” algorithm). One of two cases will apply, depending on the algorithm selected by the user for the velocity-pressure coupling:
 1. Call to **viscfa** with a total viscosity equal to the time step Δt_I^n for the ”weak velocity-pressure coupling” algorithm (**IPUCOU** = 0),
 2. Call to **visort** with a diagonal total viscosity for the ”strengthened velocity-pressure coupling” algorithm (**IPUCOU** = 1). It is at this level that \tilde{T}_{ij}^n is calculated. The equivalent time steps calculated in the subroutine **predvv** beforehand are stored in the array **TPUCOU**.
- Call to **matrix** for construction of the pressure diffusion matrix (without the reconstruction terms which cannot be taken into account if we wish to preserve a sparse matrix structure) using the previously calculated viscosity and the array **COEFB** of pressure boundary conditions p^n (we impose a homogeneous Neumann condition on δp for a Neumann condition on p and *vice versa*).

- **Calculation of the normalized residual RNORMP**

Since version 1.1.0.s, this step is accomplished within the subroutine **predvv** and the normalized residual transmitted *via* the variable **RNORMP**(**IPHAS**).

At this level of *Code_Saturne* the array **TRAV** contains the second member obtained from **predvv** without the user source terms. The computational procedure for the calculation of **RNORMP** is enumerated below:

1. $\text{TRAV}(I) = \tilde{u}_I - \frac{\Delta t_I^n}{\rho_I |\Omega_i|} \text{TRAV}(I) + \frac{(\rho_I - \rho_0) \Delta t_I^n}{\rho_I} \underline{g}$,
2. Call to **inimas** to compute the mass flux of the vector **TRAV** (we calculated at each face $\rho_{ij} \text{TRAV}_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}$, where \underline{S} is the surface vector). We set the total number of sweeps (or iterations) to 1 (**NSWRP** = 1), which means that there is no reconstruction of the gradients during this run through **inimas** (to save computation time). The boundary condition arrays passed into **inimas** contain those of the velocity \underline{u}^n .
3. Call to **divmas** to compute the divergence at each cell of the above mass flux, which is stored in the working array **W1**.
4. The mass source terms stored in the array **SMACEL** are added to **W1**.

$$\text{W1}(I) = \text{W1}(I) - \frac{|\Omega_i|}{\rho_I} \text{SMACEL}(I) \quad (\text{IV.O.21})$$

5. Call to **prodsc** (**RNORMP** = $\sqrt{\text{W1.W1}}$). **RNORMP** will be used in the stop test of the iterative pressure solver to normalize the residual (see routine **gradco** for the conjugate gradient inversion method).

- **Preparation for solving the system**

- Call to **grdcel** for computation of the pressure gradient p^n . The result is stored in **TRAV**. At this level, **TRAV** contains $\frac{\partial p^n}{\partial x}, \frac{\partial p^n}{\partial y}, \frac{\partial p^n}{\partial z}$.

- Introduction of the explicit pressure cell-based gradient p^n for use with the Rhie & Chow filter.

$$\text{TRAV}(I) = \underline{\tilde{u}}_I + \frac{\text{ARAK}}{\rho_I} \underline{\underline{T}}_I^n \nabla p^n_I$$

ARAK represents the "Arakawa" coefficient, so-named within the code, whose default setting is 1 although this value can be modified by the user in `usini1`. To simplify the notations, we define $\text{ARAK} = \alpha_{Arak}$.

- Call to `inimas` which calculates the mass flux in `TRAV`. The boundary conditions applied in this case are those of the velocity (*cf.* subroutine `navstv`). This is still just an approximation of the boundary conditions contained in `TRAV`. The mass flux (*cf.* subroutine `inimas` for further details concerning the calculation at the boundary faces) is thus equal to:

$$m_{ij} = [\rho \underline{\tilde{u}} + \alpha_{Arak} \underline{\underline{T}}_{ij}^n \nabla(p^n)]_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij}$$

- Call to `itrmas` to increment the mass flux at the faces¹³ by

$$-\alpha_{Arak} \tilde{T}_{ij}^n (\nabla p^n)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij}.$$

- Call to `clmlga` to compute the inversion of the pressure matrix with the algebraic multigrid algorithm.
- initialisation of δp , $\delta(\delta p)$ and `SMBR` to 0. `SMBR` will serve to store the second member. In the code, δp and $\delta(\delta p)$ are contained respectively in `RTP(*,IPRIPH)` and `DRTP`.
- Call to `divmas` for calculation of the divergence of the mass flux resulting from the last call to `itrmas`. This divergence is stored in the working array `W7`.
- Addition of the contributions of the mass source terms¹⁴ to `W7`.

$$W7(I) = W7(I) - |\Omega_i| \text{SMACEL}(I) \quad (\text{IV.O.22})$$

• Loop over the non orthogonalities

Assuming that the mesh is orthogonal, a single inversion would enable resolving the problem. The loop over the non-orthogonal elements is described below:

- Start of the loop at k (thereafter, we are at $k + 1$)

★ Updating of `SMBR` at the start of the loop¹⁵.

$$\text{SMBR}(I) = -W7(I) - \text{SMBR}(I)$$

★ Calculation of the norm of `SMBR` in `prodsc`. It is called `RESIDU` in the code. As we solve the system incrementally, the second member must cancel out convergence.

★ If `RESIDU` $< 10 \times \varepsilon \times \text{RNORMP}$, convergence is attained¹⁶.

⇒ Call to `itrmas` to reupdate the mass flux with the facet gradient $(\nabla(\delta p)^k)_f$. We calculate at each face $\tilde{T}_{ij}^n (\nabla(\delta p)^k)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij}$ et $\tilde{T}_{b_{ik}}^n (\nabla(\delta p)^k)_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$.

¹³ $(\nabla p^n)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij}$ is the gradient normal to the face that is equal to $\frac{p_J^n - p_I^n}{IJ} S_{ij}$ on an orthogonal mesh.

¹⁴The array `W7` contains the second member without the gradient of δp . It therefore remains invariant at each sweep. On the other hand, `SMBR` contains the entire second member and consequently varies at each sweep.

¹⁵The sign "-" results from the construction of the matrix.

¹⁶ ε is the pressure convergence tolerance which can be modified by the user in `usini1`, via the array `EPSILO`.

\Rightarrow Reupdate¹⁷ of the pressure $p^{n+1} = p^n + \sum_{l=1}^{l=k} (\delta(\delta p))^l$.

★ Alternatively,

$\Rightarrow (\delta(\delta p))^{k+1} = 0$,

\Rightarrow Call to **invers** for inversion of the system (IV.O.19). The inversion algorithm stop test data **RESIDU** is normalized by **RNORMP** (see **gradco** for the inversion of the pressure operator).

★ If the maximum number of sweeps is attained,

\Rightarrow Call to **itrmas** to increment the mass flux by the pressure gradient $(\delta p)^k$.

\Rightarrow Second call to **itrmas** for incrementation of the mass flux with the non-reconstructed gradient of $(\delta(\delta p))^{k+1}$ to ensure a final divergence-free field is obtained, thereby assuring consistency with the pressure matrix which does not take non orthogonalities into account¹⁸.

\Rightarrow Update of the pressure increment $(\delta p)^{k+1} = (\delta p)^k + (\delta(\delta p))^{k+1}$.

★ Otherwise,

\Rightarrow Incrementation of the mass flux taking into account a coefficient of relaxation. $(\delta p)^{k+1} = (\delta p)^k + \text{RELAX} \times (\delta(\delta p))^{k+1}$. The relaxation factor has a default setting of 1; however this can be modified in **usini1**.

\Rightarrow Call to **itrgrp** for calculation of the $\underline{T}^n \underline{\nabla}(\delta p)$ part of the second member (to which the array **W7** will be added at the start of a (new) loop).

$$\text{SMBR}(I) = \sum_{j \in \text{Neigh}(i)} \tilde{T}_{ij}^n (\underline{\nabla}(\delta p)^k)_{f_{ij}} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \tilde{T}_{b_{ik}}^n (\underline{\nabla}(\delta p)^k)_{f_{b_{ik}}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}}$$

• End of the loop

• Updating of the pressure

We update the pressure with the sum of the increments of δp .

$$p^{n+1} = p^n + (\delta p)_{k_{conv}}$$

where,

$$(\delta p)_{k_{conv}} = \sum_{k=1}^{k=k_{conv}} (\delta(\delta p))^k$$

In practice, RTP contains $(\delta p)_{k_{conv}}^k$. We therefore increment p^n by RTP:

$$\text{RTP} = \text{RTPA} + \text{RTP}$$

¹⁷ $(\delta p)^k = \sum_{l=1}^{l=k} (\delta(\delta p))^l$ is stored in **RTP(*,IPRIPH)**.

¹⁸Reference can be made to the subroutine **navstv** for further detail.

Points to treat

There are a number of outstanding issues that still need to be resolved:

1. The use of the normal gradient as an approximation of the pressure increment gradient can pose problems in terms of consistency, as indicated notably in the remark below.
2. The approximation $\tilde{T}^n \approx (\underline{T}^n \underline{n}) \cdot \underline{n}$ is not made for the reconstruction of the gradients in the second member of the pressure equation. Nor is it made when calculating the cell-based gradient during application of the Rhie & Chow filter.
3. Use of the weighting factor $\frac{1}{2}$ to improve numerical stability when computing calculations based on the values at the faces (e.g. in `itrmas` or `itrgrp` during reconstruction of the pressure increment gradient at the face).
4. We could verify the normalized residual calculation (see `predvv`).
5. When computing the mass flux of $\tilde{u} + \frac{\alpha}{\rho} \underline{T} \cdot \underline{\nabla} p^n$ in `inimas`, we use the boundary conditions of the velocity at the time level n . The validity of this approach remains to be clarified, particularly for the boundary conditions at the outlet. More generally, further analysis of the boundary conditions of the variables in `navstv` is required. This issue is linked to the problem highlighted at the end of `visecv`.
6. During the convergence test for the loop over the non-orthogonal elements, we multiply the tolerance by a factor of 10. Is this really necessary?
7. The problem with the relaxation factor used during updates of the pressure-correction term in the loop over the non orthogonalities (it might be worthwhile replacing this with a dynamic relaxation factor).
8. Use of the Rhie & Chow filter can prove quite problematic in some configurations. However, before undertaking any work to modify this, it would be worthwhile to first verify its utility by assessing whether or not it plays a clear and positive role in any of the configurations.

P- turbke routine

Fonction

Le but de ce sous-programme est de résoudre le système des équations de k et ε de manière semi-couplée.

Le système d'équations résolu est le suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \underline{u} k - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] = \mathcal{P} + \mathcal{G} - \rho \varepsilon + k \text{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(k_i - k) \\ \quad + \alpha_k k + \beta_k \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \underline{u} \varepsilon - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} [\mathcal{P} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \mathcal{G}] - \rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \varepsilon \text{div}(\rho \underline{u}) \\ \quad + \Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon) + \alpha_\varepsilon \varepsilon + \beta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.P.1})$$

\mathcal{P} est le terme de production par cisaillement moyen :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\rho R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \left[-\mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mu_t (\text{div } \underline{u})^2 - \frac{2}{3} \rho k \text{div}(\underline{u}) \\ &= \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{2}{3} \mu_t (\text{div } \underline{u})^2 - \frac{2}{3} \rho k \text{div}(\underline{u}) \end{aligned}$$

\mathcal{G} est le terme de production par gravité : $\mathcal{G} = -\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_i$

La viscosité turbulente est $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$.

Les constantes sont :

$C_\mu = 0,09$; $C_{\varepsilon_2} = 1,92$; $\sigma_k = 1$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$

$C_{\varepsilon_3} = 0$ si $\mathcal{G} \geq 0$ (stratification instable) et $C_{\varepsilon_3} = 1$ si $\mathcal{G} \leq 0$ (stratification stable).

Γ est un éventuel terme source de masse (tel que l'équation de conservation de masse devienne $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma$). φ_i ($\varphi = k$ ou ε) est la valeur de φ associée à la masse injectée ou retirée. Dans le cas où on retire de la masse ($\Gamma < 0$), on a forcément $\varphi_i = \varphi$. De même, quand on injecte de la masse, on spécifie souvent aussi $\varphi_i = \varphi$. Dans ces deux cas, le terme disparaît de l'équation. Dans la suite du document, on qualifera d'*injection forcée* les cas où on a $\Gamma > 0$ et $\varphi_i \neq \varphi$.

$\alpha_k, \beta_k, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ sont des termes sources utilisateur éventuels, conduisant à une implication partielle, imposés le cas échéant par le sous-programme **ustske**.

Discrétisation

La résolution se fait en trois étapes, afin de coupler partiellement les deux variables k et ε . Pour simplifier, réécrivons le système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial k}{\partial t} = D(k) + S_k(k, \varepsilon) + k \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(k_i - k) + \alpha_k k + \beta_k \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = D(\varepsilon) + S_\varepsilon(k, \varepsilon) + \varepsilon \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon) + \alpha_\varepsilon \varepsilon + \beta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.P.2})$$

D est l'opérateur de convection/diffusion. S_k (resp. S_ε) est le terme source de k (resp. ε).

PREMIÈRE PHASE : BILAN EXPLICITE

On résout le bilan explicite :

$$\begin{cases} \rho^{(n)} \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t} = D(k^{(n)}) + S_k(k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) + k^{(n)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(k_i - k^{(n)}) + \alpha_k k^{(n)} + \beta_k \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} = D(\varepsilon^{(n)}) + S_\varepsilon(k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) + \varepsilon^{(n)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon^{(n)}) + \alpha_\varepsilon \varepsilon^{(n)} + \beta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.P.3})$$

(le terme en Γ n'est pris en compte que dans le cas de l'injection forcée)

DEUXIÈME PHASE : COUPLAGE DES TERMES SOURCES

On implícite les termes sources de manière couplée :

$$\begin{cases} \rho^{(n)} \frac{k_{ts} - k^{(n)}}{\Delta t} = D(k^{(n)}) + S_k(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) + k^{(n)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(k_i - k^{(n)}) + \alpha_k k^{(n)} + \beta_k \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} = D(\varepsilon^{(n)}) + S_\varepsilon(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) + \varepsilon^{(n)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon^{(n)}) + \alpha_\varepsilon \varepsilon^{(n)} + \beta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.P.4})$$

soit

$$\begin{cases} \rho^{(n)} \frac{k_{ts} - k^{(n)}}{\Delta t} = \rho^{(n)} \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t} + S_k(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) - S_k(k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} = \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} + S_\varepsilon(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) - S_\varepsilon(k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) \end{cases} \quad (\text{IV.P.5})$$

Le terme en $\operatorname{div}(\rho \underline{u})$ n'est pas implicite car il est lié au terme D pour assurer que la matrice d'implication sera à diagonale dominante. Le terme en Γ et les termes sources utilisateur ne sont pas implicites non plus, mais ils le seront dans la troisième phase.

Et on écrit (pour $\varphi = k$ ou ε)

$$S_\varphi(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) - S_\varphi(k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) = (k_{ts} - k^{(n)}) \left. \frac{\partial S_\varphi}{\partial k} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} + (\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}) \left. \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varepsilon} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} \quad (\text{IV.P.6})$$

On résout donc finalement le système 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho^{(n)}}{\Delta t} - \left. \frac{\partial S_k}{\partial k} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} & - \left. \frac{\partial S_k}{\partial \varepsilon} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} \\ - \left. \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial k} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} & \frac{\rho^{(n)}}{\Delta t} - \left. \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{k^{(n)}, \varepsilon^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_{ts} - k^{(n)}) \\ (\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^{(n)} \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t} \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.P.7})$$

TROISIÈME PHASE : IMPLICITATION DE LA CONVECTION/DIFFUSION

On résout le système :

$$\begin{cases} \rho^{(n)} \frac{k^{(n+1)} - k^{(n)}}{\Delta t} = D(k^{(n+1)}) + S_k(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) + k^{(n+1)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(k_i - k^{(n+1)}) \\ \hspace{15em} + \alpha_k k^{(n+1)} + \beta_k \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} = D(\varepsilon^{(n+1)}) + S_\varepsilon(k_{ts}, \varepsilon_{ts}) + \varepsilon^{(n+1)} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon^{(n+1)}) \\ \hspace{15em} + \alpha_\varepsilon \varepsilon^{(n+1)} + \beta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.P.8})$$

soit

$$\begin{cases} \rho^{(n)} \frac{k^{(n+1)} - k^{(n)}}{\Delta t} = D(k^{(n+1)}) - D(k^{(n)}) + \rho^{(n)} \frac{k_{ts} - k^{(n)}}{\Delta t} + (k^{(n+1)} - k^{(n)}) \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \\ \hspace{15em} - \Gamma(k^{(n+1)} - k^{(n)}) + \alpha_k (k^{(n+1)} - k^{(n)}) \\ \rho^{(n)} \frac{\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} = D(\varepsilon^{(n+1)}) - D(\varepsilon^{(n)}) + \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} + (\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \\ \hspace{15em} - \Gamma(\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) + \alpha_\varepsilon (\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) \end{cases} \quad (\text{IV.P.9})$$

Le terme en Γ n'est là encore pris en compte que dans le cas de l'injection forcée. Le terme en α n'est pris en compte que si α est négatif, pour éviter d'affaiblir la diagonale de la matrice qu'on va inverser.

PRÉCISIONS SUR LE COUPLAGE

Lors de la phase de couplage, afin de privilégier la stabilité et la réalisabilité du résultat, tous les termes ne sont pas pris en compte. Plus précisément, on peut écrire :

$$\begin{cases} S_k = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} (\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}}) - \frac{2}{3} \rho k \operatorname{div}(\underline{u}) - \rho \varepsilon \\ S_\varepsilon = \rho C_{\varepsilon_1} C_\mu k (\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \tilde{\mathcal{G}}) - \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \rho \varepsilon \operatorname{div}(\underline{u}) - \rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases} \quad (\text{IV.P.10})$$

en notant $\tilde{\mathcal{P}} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \underline{u})^2$

et $\tilde{\mathcal{G}} = -\frac{1}{\rho \sigma_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_i$

On a donc en théorie

$$\begin{cases} \frac{\partial S_k}{\partial k} = 2\rho C_\mu \frac{k}{\varepsilon} (\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}}) - \frac{2}{3} \rho \operatorname{div}(\underline{u}) \\ \frac{\partial S_k}{\partial \varepsilon} = -\rho \\ \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial k} = \rho C_{\varepsilon_1} C_\mu (\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \tilde{\mathcal{G}}) + \rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k^2} \\ \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = -\frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \rho \operatorname{div}(\underline{u}) - 2\rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \end{cases} \quad (\text{IV.P.11})$$

En pratique, on va chercher à assurer $k_{ts} > 0$ et $\varepsilon_{ts} > 0$. En se basant sur un calcul simplifié, ainsi que sur le retour d'expérience d'ESTET, on montre qu'il est préférable de ne pas prendre en compte certains termes. Au final, on réalise le couplage suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_{ts} - k^{(n)}) \\ (\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t} \\ \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.P.12})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 267/400
---------	--	---

avec

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{1}{\Delta t} - 2C_\mu \frac{k^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}} \text{Min} \left[\left(\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}} \right), 0 \right] + \frac{2}{3} \text{Max} [\text{div}(\underline{u}), 0] \\ A_{12} = 1 \\ A_{21} = -C_{\varepsilon_1} C_\mu \left(\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \tilde{\mathcal{G}} \right) - C_{\varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon^{(n)}}{k^{(n)}} \right)^2 \\ A_{22} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \text{Max} [\text{div}(\underline{u}), 0] + 2C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^{(n)}}{k^{(n)}} \end{cases} \quad (\text{IV.P.13})$$

(par définition de C_{ε_3} , $\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \tilde{\mathcal{G}}$ est toujours positif)

Mise en œuvre

• Calcul du terme de production

On appelle trois fois `grdcel` pour calculer les gradients de u , v et w . Au final, on a

$$\text{TINSTK} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

et

$$\text{DIVU} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(le terme $\text{div}(\underline{u})$ n'est pas calculé par `divmas`, pour correspondre exactement à la trace du tenseur des déformations qui est calculé pour la production)

• Lecture des termes sources utilisateur

Appel de `cs_user_turbulence_source_terms` pour charger les termes sources utilisateurs. Ils sont stockés dans les tableaux suivants :

$$\text{W7} = \Omega \beta_k$$

$$\text{W8} = \Omega \beta_\varepsilon$$

$$\text{DAM} = \Omega \alpha_k$$

$$\text{W9} = \Omega \alpha_\varepsilon$$

Puis on ajoute le terme en $(\text{divu})^2$ à `TINSTK`. On a donc

$$\text{TINSTK} = \tilde{\mathcal{P}}$$

• Calcul du terme de gravité

Calcul uniquement si `IGRAKE` = 1.

On appelle `grdcel` pour `ROM`, avec comme conditions aux limites `COEFA` = `ROMB` et `COEFB` = `VISCB` = 0. `PRDTUR` = σ_t est mis à 1 si on n'a pas de scalaire température.

$\tilde{\mathcal{G}}$ est calculé et les termes sources sont mis à jour :

$$\text{TINSTK} = \tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}}$$

$$\text{TINSTE} = \tilde{\mathcal{P}} + \text{Max} [\tilde{\mathcal{G}}, 0] = \tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3}) \tilde{\mathcal{G}}$$

Si `IGRAKE` = 0, on a simplement

$$\text{TINSTK} = \text{TINSTE} = \tilde{\mathcal{P}}$$

• Calcul du terme d'accumulation de masse

On stocke $\text{W1} = \Omega \text{div}(\rho \underline{u})$ calculé par `divmas` (pour correspondre aux termes de convection de la matrice).

• Calcul des termes sources explicites

On affecte les termes sources explicites de k et ε pour la première étape.

$$\text{SMBRK} = \Omega \left(\mu_t (\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}}) - \frac{2}{3} \rho^{(n)} k^{(n)} \text{div} \underline{u} - \rho^{(n)} \varepsilon^{(n)} \right) + \Omega k^{(n)} \text{div}(\rho \underline{u})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 268/400
---------	--	---

$$\text{SMBRE} = \Omega \frac{\varepsilon^{(n)}}{k^{(n)}} \left(C_{\varepsilon_1} \left(\mu_t(\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3})\tilde{\mathcal{G}}) - \frac{2}{3}\rho^{(n)}k^{(n)}\text{div } \underline{u} \right) - C_{\varepsilon_2}\rho^{(n)}\varepsilon^{(n)} \right) + \Omega\varepsilon^{(n)}\text{div } (\rho\underline{u})$$

soit $\text{SMBRK} = \Omega S_k^{(n)} + \Omega k^{(n)}\text{div } (\rho\underline{u})$ et $\text{SMBRE} = \Omega S_\varepsilon^{(n)} + \Omega\varepsilon^{(n)}\text{div } (\rho\underline{u})$.

• Calcul des termes sources utilisateur

On ajoute les termes sources utilisateur explicites à SMBRK et SMBRE , soit :

$$\text{SMBRK} = \Omega S_k^{(n)} + \Omega k^{(n)}\text{div } (\rho\underline{u}) + \Omega\alpha_k k^{(n)} + \Omega\beta_k$$

$$\text{SMBRE} = \Omega S_\varepsilon^{(n)} + \Omega\varepsilon^{(n)}\text{div } (\rho\underline{u}) + \Omega\alpha_\varepsilon \varepsilon^{(n)} + \Omega\beta_\varepsilon$$

Les tableaux W7 et W8 sont libérés, DAM et W9 sont conservés pour être utilisés dans la troisième phase de résolution.

• Calcul des termes de convection/diffusion explicites

`bilsc2` est appelé deux fois, pour k et pour ε , afin d'ajouter à SMBRK et SMBRE les termes de convection/diffusion explicites $D(k^{(n)})$ et $D(\varepsilon^{(n)})$. Ces termes sont d'abord stockés dans W7 et W8, pour être conservés et réutilisés dans la troisième phase de résolution.

• Termes source de masse

Dans le cas d'une injection forcée de matière, on passe deux fois dans `catsma` pour ajouter les termes en $\Omega\Gamma(k_i - k^{(n)})$ et $\Omega\Gamma(\varepsilon_i - \varepsilon^{(n)})$ à SMBRK et SMBRE . La partie implicite ($\Omega\Gamma$) est stockée dans les variables W2 et W3, qui seront utilisées lors de la troisième phase (les deux variables sont bien nécessaires, au cas où on aurait une injection forcée sur k et pas sur ε , par exemple).

• Fin de la première phase

Ceci termine la première phase. On a

$$\text{SMBRK} = \Omega\rho^{(n)} \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\text{SMBRE} = \Omega\rho^{(n)} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t}$$

• Phase de couplage

(uniquement si $\text{IKECOU} = 1$)

On renormalise SMBRK et SMBRE qui deviennent les seconds membres du système de couplage.

$$\text{SMBRK} = \frac{1}{\Omega\rho^{(n)}} \text{SMBRK} = \frac{k_e - k^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\text{SMBRE} = \frac{1}{\Omega\rho^{(n)}} \text{SMBRE} = \frac{\varepsilon_e - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\text{et } \text{DIVP23} = \frac{2}{3} \text{Max} [\text{div } (\underline{u}), 0].$$

On remplit la matrice de couplage

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta t} - 2C_\mu \frac{k^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}} \text{Min} \left[\left(\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{G}} \right), 0 \right] + \frac{2}{3} \text{Max} [\text{div } (\underline{u}), 0]$$

$$A_{12} = 1$$

$$A_{21} = -C_{\varepsilon_1} C_\mu \left(\tilde{\mathcal{P}} + (1 - C_{\varepsilon_3})\tilde{\mathcal{G}} \right) - C_{\varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon^{(n)}}{k^{(n)}} \right)^2$$

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \text{Max} [\text{div } (\underline{u}), 0] + 2C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^{(n)}}{k^{(n)}}$$

On inverse le système 2×2 , et on récupère :

$$\text{DELTK} = k_{ts} - k^{(n)}$$

$$\text{DELTE} = \varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}$$

• Fin de la deuxième phase

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 269/400
---------	--	---

On met à jour les variables **SMBRK** et **SMBRE**.

$$\text{SMBRK} = \Omega \rho^{(n)} \frac{k_{ts} - k^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\text{SMBRE} = \Omega \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t}$$

Dans le cas où on ne couple pas ($\text{IKECOU} = 0$), ces deux variables gardent la même valeur qu'à la fin de la première étape.

• Calcul des termes implicites

On retire à **SMBRK** et **SMBRE** la partie en convection diffusion au temps n , qui était stockée dans **W7** et **W8**.

$$\text{SMBRK} = \Omega \rho^{(n)} \frac{k_{ts} - k^{(n)}}{\Delta t} - \Omega D(k^{(n)})$$

$$\text{SMBRE} = \Omega \rho^{(n)} \frac{\varepsilon_{ts} - \varepsilon^{(n)}}{\Delta t} - \Omega D(\varepsilon^{(n)})$$

On calcule les termes implicites, hors convection/diffusion, qui correspondent à la diagonale de la matrice.

$$\text{TINSTK} = \frac{\Omega \rho^{(n)}}{\Delta t} - \Omega \text{div}(\rho \underline{u}) + \Omega \Gamma + \Omega \text{Max}[-\alpha_k, 0]$$

$$\text{TINSTE} = \frac{\Omega \rho^{(n)}}{\Delta t} - \Omega \text{div}(\rho \underline{u}) + \Omega \Gamma + \Omega \text{Max}[-\alpha_\varepsilon, 0]$$

(Γ n'est pris en compte qu'en injection forcée, c'est-à-dire qu'il est forcément positif et ne risque pas d'affaiblir la diagonale de la matrice).

• Résolution finale

On passe alors deux fois dans **codits**, pour k et ε , pour résoudre les équations du type :

$$\text{TINST} \times (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) = D(\varphi^{(n+1)}) + \text{SMBR}.$$

• clipping final

On passe enfin dans la routine **clipke** pour faire un clipping éventuel de $k^{(n+1)}$ et $\varepsilon^{(n+1)}$.

Q- turrij routine

Fonction

Le but de ce sous-programme est de résoudre le système des équations des tensions de Reynolds et de la dissipation ε de manière totalement découplée dans le cadre de l'utilisation du modèle $R_{ij} - \varepsilon$ LRR¹ (option ITURB = 30 dans `usini1`).

Le tenseur symétrique des tensions de Reynolds est noté $\underline{\underline{R}}$. Les composantes de ce tenseur représentent le moment d'ordre deux de la vitesse : $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$.

Pour chaque composante R_{ij} , on résout :

$$\rho \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u} R_{ij} - \mu \underline{\nabla} R_{ij}) = \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{G}_{ij} + \Phi_{ij} + d_{ij} - \varepsilon_{ij} + R_{ij} \text{div}(\rho \underline{u}) + \Gamma(R_{ij}^{in} - R_{ij}) + \alpha_{R_{ij}} R_{ij} + \beta_{R_{ij}} \quad (\text{IV.Q.1})$$

$\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ est le tenseur de production par cisaillement moyen :

$$\mathcal{P}_{ij} = -\rho \left[R_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + R_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \quad (\text{IV.Q.2})$$

$\underline{\underline{\mathcal{G}}}$ est le tenseur de production par gravité :

$$\mathcal{G}_{ij} = \left[G_{ij} - C_3 (G_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} G_{kk}) \right] \quad (\text{IV.Q.3})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{C_\mu}{\sigma_t} \frac{k}{\varepsilon} (r_i g_j + r_j g_i) \\ k = \frac{1}{2} R_{ll} \\ r_i = R_{ik} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \end{array} \right. \quad (\text{IV.Q.4})$$

Dans ce qui précède, k représente l'énergie turbulente², g_i la composante de la gravité dans la direction i , σ_t le nombre de Prandtl turbulent et C_μ , C_3 des constantes définies dans Tab. [Q.1](#).

$\underline{\underline{\Phi}}$ est le terme de corrélations pression-déformation. Il est modélisé avec le terme de dissipation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ de la manière suivante :

$$\Phi_{ij} - [\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \varepsilon] = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \quad (\text{IV.Q.5})$$

Il en résulte :

$$\Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \varepsilon \quad (\text{IV.Q.6})$$

¹la description du SSG est prévue pour une version ultérieure de la documentation

²Les sommations se font sur l'indice l et on applique plus généralement la convention de sommation d'Einstein.

Le terme $\phi_{ij,1}$ est un terme "lent" de retour à l'isotropie. Il est donné par :

$$\phi_{ij,1} = -\rho C_1 \frac{\varepsilon}{k} (R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \quad (\text{IV.Q.7})$$

Le terme $\phi_{ij,2}$ est un terme "rapide" d'isotropisation de la production. Il est donné par :

$$\phi_{ij,2} = -C_2 (\mathcal{P}_{ij} - \frac{2}{3} \mathcal{P} \delta_{ij}) \quad (\text{IV.Q.8})$$

avec,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{kk}$$

Le terme $\phi_{ij,w}$ est appelé "terme d'écho de paroi". Il n'est pas utilisé par défaut dans *Code_Saturne*, mais peut être activé avec $\text{IRIJEC} = 1$. Si y représente la distance à la paroi :

$$\begin{aligned} \phi_{ij,w} = & \rho C'_1 \frac{k}{\varepsilon} \left[R_{km} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_i \right] f\left(\frac{l}{y}\right) \\ & + \rho C'_2 \left[\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_k n_i \right] f\left(\frac{l}{y}\right) \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.9})$$

f est une fonction d'amortissement construite pour valoir 1 en paroi et tendre vers 0 en s'éloignant des parois.

La longueur l représente $\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$, caractéristique de la turbulence. On prend :

$$f\left(\frac{l}{y}\right) = \min(1, C_\mu^{0,75} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon \kappa y}) \quad (\text{IV.Q.10})$$

d_{ij} est un terme de diffusion turbulente³ qui vaut :

$$d_{ij} = C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{k}{\varepsilon} R_{km} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \quad (\text{IV.Q.11})$$

On notera par la suite $\underline{\underline{A}} = C_S \rho \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}}$. Ainsi, $d_{ij} = \text{div}(\underline{\underline{A}} \nabla(R_{ij}))$ est une diffusion avec un coefficient tensoriel.

Le terme de dissipation turbulente $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est traité dans ce qui précède avec le terme $\underline{\underline{\Phi}}$.

Γ est le terme source de masse⁴, R_{ij}^{in} est la valeur de R_{ij} associée à la masse injectée ou retirée.

$(\alpha_{R_{ij}} R_{ij} + \beta_{R_{ij}})$ représente le terme source utilisateur (sous-programme `cs_user_turbulence_source_terms`) éventuel avec une décomposition permettant d'impliciter la partie $\alpha_{R_{ij}} R_{ij}$ si $\alpha_{R_{ij}} \geq 0$.

De même, on résout une équation de convection/diffusion/termes sources pour la dissipation ε . Cette équation est très semblable à celle du modèle $k-\varepsilon$ (voir `turbke`), seuls les termes de viscosité turbulente et de gravité changent. On résout :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}[\rho \underline{u} \varepsilon - (\mu \nabla \varepsilon)] = & d_\varepsilon + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} [\mathcal{P} + \mathcal{G}_\varepsilon] - \rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \varepsilon \text{div}(\rho \underline{u}) \\ & + \Gamma(\varepsilon^{in} - \varepsilon) + \alpha_\varepsilon \varepsilon + \beta_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.12})$$

³Dans la littérature, ce terme contient en général la dissipation par viscosité moléculaire.

⁴Dans ce cas, l'équation de continuité s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma$.

C_μ	C_ε	C_{ε_1}	C_{ε_2}	C_1	C_2	C_3	C_S	C'_1	C'_2
0,09	0,18	1,44	1,92	1,8	0,6	0,55	0,22	0,5	0,3

Table Q.1: Définition des constantes utilisées.

d_ε est le terme de diffusion turbulente :

$$d_\varepsilon = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{k}{\varepsilon} R_{km} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) \quad (\text{IV.Q.13})$$

On notera par la suite $\underline{\underline{A'}} = \rho C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}}$. Le terme de diffusion turbulente est donc modélisé par :

$$d_\varepsilon = \text{div}(\underline{\underline{A'}} \underline{\underline{\nabla}}(\varepsilon))$$

La viscosité turbulente usuelle (ν_t) en modèle $k - \varepsilon$ est remplacée par le tenseur visqueux $\underline{\underline{A'}}$.

\mathcal{P} est le terme de production par cisaillement moyen : $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{kk}$. Ce terme est modélisé avec la notion de viscosité turbulente dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$. Dans le cas présent, il est calculé à l'aide des tensions de Reynolds (à partir de \mathcal{P}_{ij}).

\mathcal{G}_ε est le terme de production des effets de gravité pour la variable ε .

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \max(0, \frac{1}{2} G_{kk}) \quad (\text{IV.Q.14})$$

Discrétisation

La résolution se fait en découplant totalement les tensions de Reynolds entre elles et la dissipation ε . On résout ainsi une équation de convection/diffusion/termes sources pour chaque variable. Les variables sont résolues dans l'ordre suivant : R_{11} , R_{22} , R_{33} , R_{12} , R_{13} , R_{23} et ε . L'ordre de la résolution n'est pas important puisque l'on a opté pour une résolution totalement découplée en n'implicitant que les termes pouvant être linéarisés par rapport à la variable courante⁵.

Les équations sont résolues à l'instant $n + 1$.

Variables tensions de Reynolds

Pour chaque composante R_{ij} , on écrit :

$$\begin{aligned} \rho^n \frac{R_{ij}^{n+1} - R_{ij}^n}{\Delta t^n} + \text{div} [(\rho \underline{u})^n R_{ij}^{n+1} - \mu^n \underline{\nabla} R_{ij}^{n+1}] = & \mathcal{P}_{ij}^n + \mathcal{G}_{ij}^n \\ & + \phi_{ij,1}^{n,n+1} + \phi_{ij,2}^n + \phi_{ij,w}^n \\ & + d_{ij}^{n,n+1} - \frac{2}{3} \rho^n \varepsilon^n \delta_{ij} + R_{ij}^{n+1} \text{div}(\rho \underline{u})^n \\ & + \Gamma(R_{ij}^{in} - R_{ij}^{n+1}) \\ & + \alpha_{R_{ij}}^n R_{ij}^{n+1} + \beta_{R_{ij}}^n \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.15})$$

μ^n est la viscosité moléculaire⁶.

L'indice $(n, n + 1)$ est relatif à une semi implicitation des termes (voir ci-dessous). Quand seul l'indice (n) est utilisé, il suffit de reprendre l'expression des termes et de considérer que toutes les variables sont explicites.

⁵En effet, aucune variable n'est actualisée pour la résolution de la suivante.

⁶La viscosité peut dépendre éventuellement de la température ou d'autres variables.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 273/400
---------	--	---

Dans le terme $\phi_{ij,1}^{n,n+1}$ donné ci-dessous, la tension de Reynolds R_{ij} est implicite (les tensions diagonales apparaissent aussi dans l'énergie turbulente k). Ainsi :

$$\phi_{ij,1}^{n,n+1} = -\rho^n C_1 \frac{\varepsilon^n}{k^n} \left[\left(1 - \frac{\delta_{ij}}{3}\right) R_{ij}^{n+1} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \left(k^n - \frac{1}{2} R_{ii}^n\right) \right] \quad (\text{IV.Q.16})$$

Le terme de diffusion turbulente \underline{d} s'écrit : $d_{ij} = \text{div} [\underline{A} \nabla R_{ij}]$. Le tenseur \underline{A} est toujours explicite. En intégrant sur un volume de contrôle (cellule) Ω_l , le terme \underline{d} de diffusion turbulente de R_{ij} s'écrit :

$$\int_{\Omega_l} d_{ij}^{n,n+1} d\Omega = \sum_{m \in \text{Vois}(l)} [\underline{A}^n \nabla R_{ij}^{n+1}]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \quad (\text{IV.Q.17})$$

\underline{n}_{lm} est la normale unitaire à la face⁷ $\partial\Omega_{lm} = \Gamma_{lm}$ de la frontière $\partial\Omega_l = \bigcup_m \partial\Omega_{lm}$ de Ω_l , face désignée par abus par lm et S_{lm} sa surface associée.

On décompose \underline{A}^n en partie diagonale \underline{D}^n et extra-diagonale \underline{E}^n :

$$\underline{A}^n = \underline{D}^n + \underline{E}^n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} d_{ij} d\Omega &= \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \underbrace{[\underline{D}^n \nabla R_{ij}]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm}}_{\text{partie diagonale}} \\ &+ \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \underbrace{[\underline{E}^n \nabla R_{ij}]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm}}_{\text{partie extra-diagonale}} \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.18})$$

La partie extra-diagonale sera prise totalement explicite et interviendra donc dans l'expression regroupant les termes purement explicites f_s^{exp} du second membre de **codits**.

Pour la partie diagonale, on introduit la composante normale du gradient de la variable principale R_{ij} . Cette contribution normale sera traitée en implicite pour la variable et interviendra à la fois dans l'expression de la matrice simplifiée du système résolu par **codits** et dans le second membre traité par **bilsc2**. La contribution tangentielle sera, elle, purement explicite et donc prise en compte dans f_s^{exp} intervenant dans le second membre de **codits**.

On a :

$$\nabla R_{ij} = \underline{\nabla} R_{ij} - (\underline{\nabla} R_{ij} \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm} + (\underline{\nabla} R_{ij} \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm} \quad (\text{IV.Q.19})$$

Comme

$$[\underline{D}^n [(\underline{\nabla} R_{ij} \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm}]] \cdot \underline{n}_{lm} = \gamma_{lm}^n (\underline{\nabla} R_{ij} \cdot \underline{n}_{lm})$$

avec :

$$\gamma_{lm}^n = (D_{11}^n) n_{1,lm}^2 + (D_{22}^n) n_{2,lm}^2 + (D_{33}^n) n_{3,lm}^2$$

on peut traiter ce terme γ_{lm}^n comme une diffusion avec un coefficient de diffusion indépendant de la direction.

Finalement, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} d_{ij}^{n,n+1} d\Omega &= \\ &+ \sum_{m \in \text{Vois}(l)} [\underline{E}^n \nabla R_{ij}^n]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\ &+ \sum_{m \in \text{Vois}(l)} [\underline{D}^n \nabla R_{ij}^n]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\ &- \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \gamma_{lm}^n (\underline{\nabla} R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} + \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \gamma_{lm}^n (\underline{\nabla} R_{ij}^{n+1} \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.20})$$

⁷La notion de face purement interne ou de bord n'est pas explicitée ici, pour alléger l'exposé. Pour être rigoureux et homogène avec les notations adoptées, il faudrait distinguer $m \in \text{Vois}(l)$ et $m \in \gamma_b(l)$.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 274/400
---------	--	---

Les trois premiers termes sont totalement explicites et correspondent à la discrétisation de l'opérateur continu :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{E}}^n \underline{\nabla} R_{ij}^n) + \operatorname{div}(\underline{\underline{D}}^n [\underline{\nabla} R_{ij}^n - (\underline{\nabla} R_{ij}^n \cdot \underline{n}) \underline{n}])$$

en omettant la notion de face.

Le dernier terme est implicite relativement à la variable R_{ij} et correspond à l'opérateur continu :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{D}}^n (\underline{\nabla} R_{ij}^{n+1} \cdot \underline{n}) \underline{n})$$

Variable ε

On résout l'équation de ε de façon analogue à celle de R_{ij} .

$$\begin{aligned} \rho^n \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}((\rho \underline{u})^n \varepsilon^{n+1}) - \operatorname{div}(\mu^n \underline{\nabla} \varepsilon^{n+1}) = & d_\varepsilon^{n,n+1} \\ & + C_{\varepsilon_1} \frac{k^n}{\bar{\varepsilon}^n} [\mathcal{P}^n + \mathcal{G}_\varepsilon^n] - \rho^n C_{\varepsilon_2} \frac{(\varepsilon^n)^2}{k^n} \\ & + \varepsilon^{n+1} \Gamma \operatorname{div}(\rho \underline{u})^n \\ & + \Gamma(\varepsilon^{in} - \varepsilon^{n+1}) + \alpha_\varepsilon^n \varepsilon^{n+1} + \beta_\varepsilon^n \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.21})$$

Le terme de diffusion turbulente $d_\varepsilon^{n,n+1}$ est traité comme celui des variables R_{ij} et s'écrit :

$$d_\varepsilon^{n,n+1} = \operatorname{div}[\underline{\underline{A'}}^n \underline{\nabla} \varepsilon^{n+1}]$$

Le tenseur $\underline{\underline{A'}}$ est toujours explicite. On le décompose en une partie diagonale $\underline{\underline{D'}}$ et une partie extra-diagonale $\underline{\underline{E'}}$:

$$\underline{\underline{A'}}^n = \underline{\underline{D'}}^n + \underline{\underline{E'}}^n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} d_\varepsilon^{n,n+1} d\Omega = & \sum_{m \in \text{Vois}(l)} [\underline{\underline{E'}}^n \underline{\nabla} \varepsilon^n]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\ + \sum_{m \in \text{Vois}(l)} [\underline{\underline{D'}}^n \underline{\nabla} \varepsilon^n]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} - & \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \eta_{lm}^n (\underline{\nabla} \varepsilon^n \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} \\ + \sum_{m \in \text{Vois}(l)} \eta_{lm}^n (\underline{\nabla} \varepsilon^{n+1} \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.22})$$

avec :

$$\eta_{lm}^n = (D'_{11})^n n_{1,lm}^2 + (D'_{22})^n n_{2,lm}^2 + (D'_{33})^n n_{3,lm}^2.$$

On peut traiter ce terme η_{lm}^n comme une diffusion avec un coefficient de diffusion indépendant de la direction.

Les trois premiers termes sont totalement explicites et correspondent à l'opérateur :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{E'}}^n \varepsilon^n) + \operatorname{div}(\underline{\underline{D'}}^n [\underline{\nabla} \varepsilon^n - (\underline{\nabla} \varepsilon^n \cdot \underline{n}) \underline{n}])$$

en omettant la notion de face.

Le dernier terme est implicite relativement à la variable ε et correspond à l'opérateur :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{D'}}^n (\underline{\nabla} \varepsilon^{n+1} \cdot \underline{n}) \underline{n})$$

Mise en œuvre

La numéro de la phase traitée fait partie des arguments de `turrij`. On omettra volontairement de le préciser dans ce qui suit, on indiquera par () la notion de tableau s'y rattachant.

• Calcul des termes de production $\underline{\underline{P}}$

★ Initialisation à zéro du tableau PRODUC dimensionné à $NCEL \times 6$.

★ On appelle trois fois `grdcel` pour calculer les gradients des composantes de la vitesse u , v et w prises au temps n .

Au final, on a :

$$\begin{aligned}
 PRODUC(1, IEL) &= -2 \left[R_{11}^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + R_{12}^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + R_{13}^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{11}^n) \\
 PRODUC(2, IEL) &= -2 \left[R_{12}^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + R_{22}^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + R_{23}^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{22}^n) \\
 PRODUC(3, IEL) &= -2 \left[R_{13}^n \frac{\partial w^n}{\partial x} + R_{23}^n \frac{\partial w^n}{\partial y} + R_{33}^n \frac{\partial w^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{33}^n) \\
 PRODUC(4, IEL) &= - \left[R_{12}^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + R_{22}^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + R_{23}^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \right] \\
 &\quad - \left[R_{11}^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + R_{12}^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + R_{13}^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{12}^n) \\
 PRODUC(5, IEL) &= - \left[R_{13}^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + R_{23}^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + R_{33}^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \right] \\
 &\quad - \left[R_{11}^n \frac{\partial w^n}{\partial x} + R_{12}^n \frac{\partial w^n}{\partial y} + R_{13}^n \frac{\partial w^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{13}^n) \\
 PRODUC(6, IEL) &= - \left[R_{13}^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + R_{23}^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + R_{33}^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \right] \\
 &\quad - \left[R_{12}^n \frac{\partial w^n}{\partial x} + R_{22}^n \frac{\partial w^n}{\partial y} + R_{23}^n \frac{\partial w^n}{\partial z} \right] \quad (\text{production de } R_{23}^n)
 \end{aligned}$$

• **Calcul du gradient de la masse volumique ρ^n prise au début du pas de temps courant⁸**
($n+1$)

Ce calcul n'a lieu que si les termes de gravité doivent être pris en compte (`IGRARI()` = 1).

★ Appel de `grdcel` pour calculer le gradient de ρ^n dans les trois directions de l'espace. Les conditions aux limites sur ρ^n sont des conditions de Dirichlet puisque la valeur de ρ^n aux faces de bord ik (variable `IFAC`) est connue et vaut $\rho_{b_{ik}}$. Pour écrire les conditions aux limites sous la forme habituelle,

$$\rho_{b_{ik}} = COEFA + COEFB \rho_I^n,$$

on pose alors `COEFA` = `PROPCE(IFAC, IPPROB(IROM))` et `COEFB` = `VISCB` = 0.

`PROPCE(1, IPPROB(IROM))` (resp. `VISCB`) est utilisé en lieu et place de l'habituel `COEFA` (`COEFB`), lors de l'appel à `grdcel`.

On a donc :

$$GRAROX = \frac{\partial \rho^n}{\partial x}, \quad GRAROY = \frac{\partial \rho^n}{\partial y} \quad \text{et} \quad GRAROZ = \frac{\partial \rho^n}{\partial z}.$$

Le gradient de ρ^n servira à calculer les termes de production par effets de gravité si ces derniers sont pris en compte.

• **Boucle ISOU de 1 à 6 sur les tensions de Reynolds**

Pour `ISOU` = 1, 2, 3, 4, 5, 6, on résout respectivement et dans l'ordre les équations de R_{11} , R_{22} , R_{33} , R_{12} , R_{13} et R_{23} par l'appel au sous-programme `resrij`.

La résolution se fait par incrément $\delta R_{ij}^{n+1, k+1}$, en utilisant la même méthode que celle décrite dans le sous-programme `codits`. On adopte ici les mêmes notations. `SMBR` est le second membre du système à inverser, système portant sur les incréments de la variable. `ROVSDT` représente la diagonale de la matrice, hors convection/diffusion.

⁸i.e. calculée à partir des variables du pas de temps précédent n si nécessaire.

On va résoudre l'équation (IV.Q.15) sous forme incrémentale en utilisant `codits`, soit :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\frac{\rho_L^n}{\Delta t^n} + \rho_L^n C_1 \frac{\varepsilon_L^n}{k_L^n} \left(1 - \frac{\delta_{ij}}{3}\right) - m_{lm}^n + \Gamma_L + \max(-\alpha_{R_{ij}}^n, 0) \right) |\Omega_l| (\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_L}_{\text{ROVSDT contribuant à la diagonale de la matrice simplifiée de } \mathbf{matrix}} \\
& + \underbrace{\sum_{m \in \text{Vis}(l)} \left[m_{lm}^n \delta R_{ij, f_{lm}}^{n+1,p+1} - (\mu_{lm}^n + \gamma_{lm}^n) \frac{(\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_M - (\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_L}{\overline{L'M'}} S_{lm} \right]}_{\text{convection upwind pur et diffusion non reconstruite relatives à la matrice simplifiée de } \mathbf{matrix}^9} \\
& = - \frac{\rho_L^n}{\Delta t^n} \left((R_{ij}^{n+1,p})_L - (R_{ij}^n)_L \right) \\
& - \underbrace{\int_{\Omega_l} \left(\text{div} [(\rho \underline{u})^n R_{ij}^{n+1,p} - (\mu^n + \gamma^n) \nabla R_{ij}^{n+1,p}] \right) d\Omega}_{\text{convection et diffusion traitées par } \mathbf{bilsc2}} \quad \text{(IV.Q.23)} \\
& + \int_{\Omega_l} \left[\mathcal{P}_{ij}^{n+1,p} + \mathcal{G}_{ij}^{n+1,p} - \rho^n C_1 \frac{\varepsilon^n}{k^n} \left[R_{ij}^{n+1,p} - \frac{2}{3} k^n \delta_{ij} \right] + \phi_{ij,2}^{n+1,p} + \phi_{ij,w}^{n+1,p} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega_l} \left[-\frac{2}{3} \rho^n \varepsilon^n \delta_{ij} + \Gamma (R_{ij}^{in} - R_{ij}^{n+1,p}) + \alpha_{R_{ij}}^n R_{ij}^{n+1,p} + \beta_{R_{ij}}^n \right] d\Omega \\
& + \sum_{m \in \text{Vis}(l)} \left[\underline{\underline{E}}^n \nabla R_{ij}^{n+1,p} \right]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\
& + \sum_{m \in \text{Vis}(l)} \left[\underline{\underline{D}}^n \nabla R_{ij}^{n+1,p} \right]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\
& - \sum_{m \in \text{Vis}(l)} \gamma_{lm}^n \left(\nabla R_{ij}^{n+1,p} \cdot \underline{n}_{lm} \right) S_{lm} \\
& + \sum_{m \in \text{Vis}(l)} m_{lm}^n (R_{ij}^{n+1,p})_L
\end{aligned}$$

où on rappelle :

pour n donné entier positif, on définit la suite $(R_{ij}^{n+1,p})_{p \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} R_{ij}^{n+1,0} = R_{ij}^n \\ R_{ij}^{n+1,p+1} = R_{ij}^{n+1,p} + \delta R_{ij}^{n+1,p+1} \end{cases}$$

$(\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_L$ désigne la valeur sur l'élément Ω_l du $(p+1)$ -ième incrément de R_{ij}^{n+1} , m_{lm}^n le flux de masse à l'instant n à travers la face lm , $\delta R_{ij, f_{lm}}^{n+1,p+1}$ vaut $(\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_L$ si $m_{lm}^n \geq 0$, $(\delta R_{ij}^{n+1,p+1})_M$ sinon, $\mathcal{P}_{ij}^{n+1,p}$, $\phi_{ij,2}^{n+1,p}$, $\phi_{ij,w}^{n+1,p}$ les valeurs des quantités associées correspondant à l'incrément $(\delta R_{ij}^{n+1,p})$.

Tous ces termes sont calculés comme suit :

- Terme de gauche de l'équation (IV.Q.23)

Dans `resrij` est calculée la variable ROVSDT. Les autres termes sont complétés par `codits`, lors de la construction de la matrice simplifiée, via un appel au sous-programme `matrix`. La quantité $(\mu_{lm}^n + \gamma_{lm}^n)$ à la face lm est calculée lors de l'appel à `visort`.

- Second membre de l'équation (IV.Q.23)

Le premier terme non détaillé est calculé par le sous-programme `bilsc2`, qui applique le schéma convectif choisi par l'utilisateur, qui reconstruit ou non selon le souhait de l'utilisateur les gradients intervenants dans la convection-diffusion.

Les termes sans accolade sont, eux, complètement explicites et ajoutés au fur et à mesure dans `SMR` pour former l'expression f_s^{exp} de `codits`.

⁹Si `IRIJNU` = 1, on remplace μ_{lm}^n par $(\mu + \mu_t)_{lm}^n$ dans l'expression de la diffusion non reconstruite associée à la matrice simplifiée de `matrix` (μ_t désigne la viscosité turbulente calculée comme en $k - \varepsilon$).

On décrit ci-dessous les étapes de `resrij` :

- $\text{DELTIJ} = 1$, pour $\text{ISOU} \leq 3$ et $\text{DELTIJ} = 0$ Si $\text{ISOU} > 3$. Cette valeur représente le symbole de Kroeneker δ_{ij} .
- Initialisation à zéro de **SMBR** (tableau contenant le second membre) et **ROVSDT** (tableau contenant la diagonale de la matrice sauf celle relative à la contribution de la diagonale des opérateurs de convection et de diffusion linéarisés¹⁰), tous deux de dimension **NCEL**.

- Lecture et prise en compte des termes sources utilisateur pour la variable R_{ij}

Appel à `cs_user_turbulence_source_terms` pour charger les termes sources utilisateurs. Ils sont stockés comme suit. Pour la cellule Ω_l de centre L , représentée par **IEL**, on a :

$$\begin{cases} \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= |\Omega_l| \alpha_{R_{ij}} \\ \text{SMBR}(\text{IEL}) &= |\Omega_l| \beta_{R_{ij}} \end{cases}$$

On affecte alors les valeurs adéquates au second membre **SMBR** et à la diagonale **ROVSDT** comme suit :

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \alpha_{R_{ij}} (R_{ij}^n)_L \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= \max(-|\Omega_l| \alpha_{R_{ij}}, 0) \end{cases}$$

La valeur de **ROVSDT** est ainsi calculée pour des raisons de stabilité numérique. En effet, on ne rajoute sur la diagonale que les valeurs positives, ce qui correspond physiquement à impliciter les termes de rappel uniquement.

- Calcul du terme source de masse si $\Gamma_L > 0$

Appel de `catsma` et incrémentation si nécessaire de **SMBR** et **ROVSDT** *via* :

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) = \text{SMBR}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \Gamma_L [(R_{ij}^{in})_L - (R_{ij}^n)_L] \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) = \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \Gamma_L \end{cases}$$

- Calcul du terme d'accumulation de masse et du terme instationnaire

On stocke $W1 = \int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega$ calculé par `divmas` à l'aide des flux de masse aux faces internes $m_{lm}^n = \sum_{m \in \text{Vois}(l)} (\rho \underline{u})_{lm}^n \cdot \underline{S}_{lm}$ (tableau **FLUMAS**) et des flux de masse aux bords $m_{b_{lk}}^n = \sum_{k \in \gamma_b(l)} (\rho \underline{u})_{b_{lk}}^n \cdot \underline{S}_{b_{lk}}$ (tableau **FLUMAB**). On incrémente ensuite **SMBR** et **ROVSDT**.

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + \text{ICONV} (R_{ij}^n)_L \left(\int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega \right) \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + \text{ISTAT} \frac{\rho_L^n |\Omega_l|}{\Delta t^n} - \text{ICONV} \left(\int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega \right) \end{cases}$$

- Calcul des termes sources de production, des termes $\phi_{ij,1} + \phi_{ij,2}$ et de la dissipation $-\frac{2}{3}\varepsilon \delta_{ij}$:

On effectue une boucle d'indice **IEL** sur les cellules Ω_l de centre L :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{TRPROD} &= \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{ii}^n)_L = \frac{1}{2} [\text{PRODUC}(1, \text{IEL}) + \text{PRODUC}(2, \text{IEL}) + \text{PRODUC}(3, \text{IEL})] \\ \Rightarrow \text{TRRIJ} &= \frac{1}{2} (R_{ii}^n)_L \\ \Rightarrow \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + \\ &\quad \rho_L^n |\Omega_l| \left[\frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{C_2}{2} (\mathcal{P}_{ii}^n)_L + (C_1 - 1) \varepsilon_L^n \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - C_2) \text{PRODUC}(\text{ISOU}, \text{IEL}) - C_1 \frac{2 \varepsilon_L^n}{(R_{ii}^n)_L} (R_{ij}^n)_L \right] \end{aligned}$$

¹⁰qui correspondent aux schémas convectif upwind pur et diffusif sans reconstruction.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 278/400
---------	--	---

$$\Rightarrow \text{ROVSDT}(\text{IEL}) = \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + \rho_L^n |\Omega_l| \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + 1\right) C_1 \frac{2 \varepsilon_L^n}{(R_{ii}^n)_L}$$

- Appel de **rijech** pour le calcul des termes d'écho de paroi $\phi_{ij,w}^n$ si **IRIJE**() = 1 et ajout dans **SMBR**.

$$\text{SMBR} = \text{SMBR} + \phi_{ij,w}^n$$

Suivant son mode de calcul (**ICDPAR**), la distance à la paroi est directement accessible par **RA**(**IDIPAR**+**IEL**-1) (**ICDPAR** = 1) ou bien est calculée à partir de **IA**(**IIFAPA**+**IEL** - 1), qui donne pour l'élément **IEL** le numéro de la face de bord paroi la plus proche (**ICDPAR** = 2). Ces tableaux ont été renseignés une fois pour toutes au début de calcul.

- Appel de **rijthe** pour le calcul des termes de gravité \mathcal{G}_{ij}^n et ajout dans **SMBR**.

$$\text{Ce calcul n'a lieu que si } \text{IGRARI}(\text{)} = 1. \text{ SMBR} = \text{SMBR} + \mathcal{G}_{ij}^n$$

- Calcul de la partie explicite du terme de diffusion $\text{div} \left[\underline{A} \underline{\nabla} R_{ij}^n \right]$, plus précisément des contributions du terme extradiagonal pris aux faces purement internes (remplissage du tableau **VISCF**), puis aux faces de bord (remplissage du tableau **VISCB**).

- ★ Appel de **grdcel** pour le calcul du gradient de R_{ij}^n dans chaque direction. Ces gradients sont respectivement stockés dans les tableaux de travail **W1**, **W2** et **W3**.
- ★ boucle d'indice **IEL** sur les cellules Ω_l de centre L pour le calcul de $\underline{E}^n \underline{\nabla} R_{ij}^n$ aux cellules dans un premier temps :

$$\Rightarrow \text{TRRIJ} = \frac{1}{2} (R_{ii}^n)_L$$

$$\Rightarrow \text{CSTRIJ} = \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n}$$

$$\Rightarrow \text{W4}(\text{IEL}) = \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} [(R_{12}^n)_L \text{W2}(\text{IEL}) + (R_{13}^n)_L \text{W3}(\text{IEL})]$$

$$\Rightarrow \text{W5}(\text{IEL}) = \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} [(R_{12}^n)_L \text{W1}(\text{IEL}) + (R_{23}^n)_L \text{W3}(\text{IEL})]$$

$$\Rightarrow \text{W6}(\text{IEL}) = \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} [(R_{13}^n)_L \text{W1}(\text{IEL}) + (R_{23}^n)_L \text{W2}(\text{IEL})]$$

- ★ Appel de **vectds**¹¹ pour assembler $\left[\underline{E}^n \underline{\nabla} R_{ij}^n \right] \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm}$ aux faces lm .
- ★ Appel de **divmas** pour calculer la divergence du flux défini par **VISCF** et **VISCB**. Le résultat est stocké dans **W4**.
Ajout au second membre **SMBR**.
 $\text{SMBR} = \text{SMBR} + \text{W4}$

A l'issue de cette étape, seule la partie extradiagonale de la diffusion prise entièrement explicite :

$$\sum_{m \in \text{Vois}(l)} \left[\underline{E}^n \underline{\nabla} R_{ij}^n \right]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm}$$

a été calculée.

- Calcul de la partie diagonale du terme de diffusion¹² :
Comme on l'a déjà vu, une partie de cette contribution sera traitée en implicite (celle relative à la composante normale du gradient) et donc ajoutée au second membre par **bilsc2** ; l'autre partie sera explicite et prise en compte dans f_s^{exp} .

- ★ On effectue une boucle d'indice **IEL** sur les cellules Ω_l de centre L :

¹¹Le résultat est stocké dans **VISCF** et **VISCB**. Dans **vectds**, les valeurs aux faces internes sont interpolées linéairement sans reconstruction et **VISCB** est mis à zéro.

¹²Seule la composante normale du gradient de R_{ij} aux faces sera implicite.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 279/400
---------	--	---

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{TRRIJ} &= \frac{1}{2} (R_{ii}^n)_L \\
\Rightarrow \text{CSTRIJ} &= \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} \\
\Rightarrow \text{W4(IEL)} &= \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{11}^n)_L \\
\Rightarrow \text{W5(IEL)} &= \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{22}^n)_L \\
\Rightarrow \text{W6(IEL)} &= \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{33}^n)_L
\end{aligned}$$

★ On effectue une boucle d'indice IFAC sur les faces purement internes lm pour remplir le tableau VISCF :

- ⇒ Identification des cellules Ω_l et Ω_m de centre respectif L (variable II) et M (variable JJ), se trouvant de chaque côté de la face lm ¹³.
- ⇒ Calcul du carré de la surface de la face. La valeur est stockée dans le tableau SURFN2.
- ⇒ Interpolation du gradient de R_{ij}^n à la face lm (gradient facette $[\underline{\nabla} R_{ij}^n]_{lm}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{GRDPX} = \frac{1}{2} (\text{W1(II)} + \text{W1(JJ)}) \\ \text{GRDPY} = \frac{1}{2} (\text{W2(II)} + \text{W2(JJ)}) \\ \text{GRDPZ} = \frac{1}{2} (\text{W3(II)} + \text{W3(JJ)}) \end{array} \right.$$

⇒ Calcul du gradient de R_{ij}^n normal à la face lm , $[\underline{\nabla} R_{ij}^n]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm}$.

GRDSN = GRDPX SURFAC(1,IFAC) + GRDPY SURFAC(2,IFAC) + GRDPZ SURFAC(3,IFAC)
SURFAC est le vecteur surface de la face IFAC.

⇒ calcul de $[\underline{\nabla} R_{ij}^n - (\underline{\nabla} R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm}]$, les vecteurs étant calculés à la face lm :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{GRDPX} = \text{GRDPX} - \frac{\text{GRDSN}}{\text{SURFN2}} \text{SURFAC}(1, \text{IFAC}) \\ \text{GRDPY} = \text{GRDPY} - \frac{\text{GRDSN}}{\text{SURFN2}} \text{SURFAC}(2, \text{IFAC}) \\ \text{GRDPZ} = \text{GRDPZ} - \frac{\text{GRDSN}}{\text{SURFN2}} \text{SURFAC}(3, \text{IFAC}) \end{array} \right.$$

⇒ finalisation du calcul de l'expression totalement explicite

$$\begin{aligned}
& \underline{D}^n (\underline{\nabla} R_{ij}^n - (\underline{\nabla} R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm}) \cdot \underline{n}_{lm} \\
\text{VISCF} &= \frac{1}{2} (\text{W4(II)} + \text{W4(JJ)}) \text{GRDPX SURFAC}(1, \text{IFAC}) + \\
& \frac{1}{2} (\text{W5(II)} + \text{W5(JJ)}) \text{GRDPY SURFAC}(2, \text{IFAC}) + \\
& \frac{1}{2} (\text{W6(II)} + \text{W6(JJ)}) \text{GRDPZ SURFAC}(3, \text{IFAC})
\end{aligned}$$

★ Mise à zéro du tableau VISCB.

¹³La normale à la face est orientée de L vers M.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 280/400
---------	--	---

★ Appel de **divmas** pour calculer la divergence de :

$$\underline{\underline{D}}^n (\nabla R_{ij}^n - (\nabla R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm})$$

défini aux faces dans **VISCF** et **VISCB**.

Le résultat est stocké dans le tableau **W1**.

Ajout au second membre **SMBR**.

SMBR = **SMBR** + **W1**

- Calcul de la viscosité orthotrope γ_{lm}^n à la face lm de la variable principale R_{ij}^n
Ce calcul permet au sous-programme **codits** de compléter le second membre **SMBR** par :

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in Vois(l)} \mu_{lm}^n (\nabla R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} + \sum_{m \in Vois(l)} (\nabla R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) [\underline{\underline{D}}^n \underline{n}_{lm}]_{lm} \cdot \underline{n}_{lm} S_{lm} \\ &= \sum_{m \in Vois(l)} (\mu_{lm}^n + \gamma_{lm}^n) (\nabla R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) S_{lm} \end{aligned} \quad (\text{IV.Q.24})$$

sans préciser la nature de la face lm , *via* l'appel à **bilsc2** et de disposer de la quantité $(\mu_{lm}^n + \gamma_{lm}^n)$ pour construire sa matrice simplifiée.

★ On effectue une boucle d'indice **IEL** sur les cellules Ω_l :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{TRRIJ} &= \frac{1}{2} (R_{ii}^n)_L \\ \Rightarrow \text{RCSTE} &= \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} \\ \Rightarrow \text{W1(IEL)} &= \mu^n + \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{11}^n)_L \\ \Rightarrow \text{W2(IEL)} &= \mu^n + \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{22}^n)_L \\ \Rightarrow \text{W3(IEL)} &= \mu^n + \rho_L^n C_S \frac{(R_{ii}^n)_L}{2 \varepsilon_L^n} (R_{33}^n)_L \end{aligned}$$

★ Appel de **visort** pour calculer la viscosité orthotrope ¹⁴ $\gamma_{lm}^n = (\underline{\underline{D}}^n \underline{n}_{lm}) \cdot \underline{n}_{lm}$ aux faces lm
Le résultat est stocké dans les tableaux **VISCF** et **VISCB**.

- appel de **codits** pour la résolution de l'équation de convection/diffusion/termes sources de la variable R_{ij} . Le terme source est **SMBR**, la viscosité **VISCF** aux faces purement internes (resp. **VISCB** aux faces de bord) et **FLUMAS** le flux de masse interne (resp. **FLUMAB** flux de masse au bord). Le résultat est la variable R_{ij} au temps $n+1$, donc R_{ij}^{n+1} . Elle est stockée dans le tableau **RTP** des variables mises à jour.

• Appel de **reseps** pour la résolution de la variable ε

On décrit ci-dessous le sous-programme **reseps**, les commentaires du sous-programme **resrij** ne seront pas répétés puisque les deux sous-programmes ne diffèrent que par leurs termes sources.

- Initialisation à zéro de **SMBR** et **ROVSDT**.
- Lecture et prise en compte des termes sources utilisateur pour la variable ε :

¹⁴Comme dans le sous-programme **viscfa**, on multiplie la viscosité par $\frac{S_{lm}}{L'M'}$, où S_{lm} et $L'M'$ représentent respectivement la surface de la face lm et la mesure algébrique du segment reliant les projections des centres des cellules voisines sur la normale à la face. On garde dans ce sous-programme la possibilité d'interpoler la viscosité aux cellules linéairement ou d'utiliser une moyenne harmonique. La viscosité au bord est celle de la cellule de bord correspondante.

Appel de `cs_user_turbulence_source_terms` pour charger les termes sources utilisateurs. Ils sont stockés dans les tableaux suivants :
pour la cellule Ω_l représentée par IEL de centre L , on a :

$$\begin{cases} \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= |\Omega_l| \alpha_\varepsilon \\ \text{SMBR}(\text{IEL}) &= |\Omega_l| \beta_\varepsilon \end{cases}$$

On affecte alors les valeurs adéquates au second membre SMBR et à la diagonale ROVSDT comme suit :

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \alpha_\varepsilon \varepsilon_L^n \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= \max(-|\Omega_l| \alpha_\varepsilon, 0) \end{cases}$$

- Calcul du terme source de masse si $\Gamma_L > 0$:

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \Gamma_L (\varepsilon_L^{in} - \varepsilon_L^n) \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + |\Omega_l| \Gamma_L \end{cases}$$

- Calcul du terme d'accumulation de masse et du terme instationnaire

On stocke $\mathbf{W1} = \int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega$ calculé par `divmas` à l'aide des flux de masse internes et aux bords.

On incrémente ensuite SMBR et ROVSDT.

$$\begin{cases} \text{SMBR}(\text{IEL}) &= \text{SMBR}(\text{IEL}) + \text{ICONV} \varepsilon_L^n \left(\int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega \right) \\ \text{ROVSDT}(\text{IEL}) &= \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + \text{ISTAT} \frac{\rho_L^n |\Omega_l|}{\Delta t^n} - \text{ICONV} \left(\int_{\Omega_l} \text{div}(\rho \underline{u}) d\Omega \right) \end{cases}$$

- Traitement du terme de production $\rho C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P}$ et du terme de dissipation $-\rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon$ pour cela, on effectue une boucle d'indice IEL sur les cellules Ω_l de centre L :

$$\Rightarrow \text{TRPROD} = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{ii}^n)_L = \frac{1}{2} [\text{PRODUC}(1, \text{IEL}) + \text{PRODUC}(2, \text{IEL}) + \text{PRODUC}(3, \text{IEL})]$$

$$\Rightarrow \text{TRRIJ} = \frac{1}{2} (R_{ii}^n)_L$$

$$\Rightarrow \text{SMBR}(\text{IEL}) = \text{SMBR}(\text{IEL}) + \rho_L^n |\Omega_l| \left[-C_{\varepsilon_2} \frac{2(\varepsilon_L^n)^2}{(R_{ii}^n)_L} + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_L^n}{(R_{ii}^n)_L} (\mathcal{P}_{ii}^n)_L \right]$$

$$\Rightarrow \text{ROVSDT}(\text{IEL}) = \text{ROVSDT}(\text{IEL}) + C_{\varepsilon_2} \rho_L^n |\Omega_l| \frac{2\varepsilon_L^n}{(R_{ii}^n)_L}$$

- Appel de `rijthe` pour le calcul des termes de gravité $\mathcal{G}_\varepsilon^n$ et ajout dans SMBR.

$$\text{SMBR} = \text{SMBR} + \mathcal{G}_\varepsilon^n$$

Ce calcul n'a lieu que si `IGRARI()` = 1.

- Calcul de la diffusion de ε

Le terme $\text{div} [\mu \underline{\nabla}(\varepsilon) + \underline{A}' \underline{\nabla}(\varepsilon)]$ est calculé exactement de la même manière que pour les tensions de Reynolds R_{ij} en remplaçant \underline{A} par \underline{A}' .

- Appel de `codits` pour la résolution de l'équation de convection/diffusion/termes sources de la variable principale ε . Le résultat ε^{n+1} est stocké dans le tableau RTP des variables mises à jour.

• clippings finaux

On passe enfin dans le sous-programme `clprij` pour faire un clipping éventuel des variables R_{ij}^{n+1} et ε^{n+1} . Le sous-programme `clprij` est appelé¹⁵ avec `ICLIP` = 2. Cette option¹⁶ contient l'option `ICLIP` = 1 et permet de vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les grandeurs extra-diagonales du tenseur \underline{R} (pour $i \neq j$, $|R_{ij}|^2 \leq R_{ii} R_{jj}$).

¹⁵L'option `ICLIP` = 1 consiste en un clipping minimal des variables R_{ii} et ε en prenant la valeur absolue de ces variables puisqu'elles ne peuvent être que positives.

¹⁶Quand la valeur des grandeurs R_{ii} ou ε est négative, on la remplace par le minimum entre sa valeur absolue et (1,1) fois la valeur obtenue au pas de temps précédent.

Points à traiter

Sauf mention explicite, ϕ représentera une tension de Reynolds ou la dissipation turbulente ($\phi = R_{ij}$ ou ε).

- La vitesse utilisée pour le calcul de la production est explicite. Est-ce qu’une implication peut améliorer la précision temporelle de ϕ ¹⁷ ?
- Dans quelle mesure le terme d’écho de paroi est-il valide ? En effet, ce terme est remis en question par certains auteurs.
- On peut envisager la résolution d’un système hyperbolique pour les tensions de Reynolds afin d’introduire un couplage avec le champ de vitesse.
- Le flux au bord **VISCB** est annulé dans le sous-programme **vectds**. Peut-on envisager de mettre au bord la valeur de la variable concernée à la cellule de bord correspondant ? De même, il faudrait se pencher sur les hypothèses sous-jacentes à l’annulation des contributions aux bords de **VISCB** lors du calcul de :

$$[\underline{\underline{D}}^n (\underline{\nabla} R_{ij}^n - (\underline{\nabla} R_{ij}^n \cdot \underline{n}_{lm}) \underline{n}_{lm})] \cdot \underline{n}_{lm}.$$

- Un problème de pondération apparaît plus généralement. Si on prend la partie explicite de $\underline{\underline{D}} \underline{\nabla}(\phi)$, la pondération aux faces internes utilise le coefficient $\frac{1}{2}$ avec pondération séparée de $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\nabla}(\phi)$, alors que pour $\underline{\underline{E}} \underline{\nabla}(\phi)$, on calcule d’abord ce terme aux cellules pour ensuite l’interpoler linéairement aux faces¹⁸. Ceci donne donc deux types d’interpolations pour des termes de même nature.
- On laisse la possibilité dans **visort** d’utiliser une moyenne harmonique aux faces. Est-ce que ceci est valable puisque les interpolations utilisées lors du calcul de la partie explicite de $\underline{\underline{A}} \underline{\nabla} \phi$ sont des moyennes arithmétiques ?
- Les techniques adoptées lors du clipping sont à revoir.
- On utilise dans le cadre du modèle $R_{ij} - \varepsilon$ une semi-implication de termes comme $\phi_{ij,1}$ ou $-\rho C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k}$. On peut envisager le même type d’implication dans **turbke** même en présence du couplage $k - \varepsilon$.
- L’adoption d’une résolution découplée fait perdre l’invariance par rotation.
- La formulation et l’implantation des conditions aux limites de paroi devront être vérifiées. En effet, il semblerait que, dans certains cas, des phénomènes “oscillatoires” apparaissent, sans qu’il soit aisé d’en déterminer la cause.
- L’implication partielle (du fait de la résolution découplée) des conditions aux limites conduit souvent à des calculs instables. Il conviendrait d’en connaître la raison. L’implication partielle avait été mise en œuvre afin de tenter d’utiliser un pas de temps plus grand dans le cas de jets axisymétriques en particulier.

¹⁷Cette remarque peut être généralisée. En effet, peut-on envisager d’actualiser les variables déjà résolues (sans réactualiser les variables turbulentes après leur résolution) ? Ceci obligerait à modifier les sous-programmes tels que **condli** qui sont appelés au début de la boucle en temps.

¹⁸Cette interpolation se fait dans **vectds** avec des coefficients de pondération aux faces.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 283/ 400
---------	--	---

R- viscfa routine

Fonction

Dans ce sous-programme est calculé le coefficient de diffusion isotrope aux faces. Ce coefficient fait intervenir la valeur de la viscosité aux faces multipliée par le rapport surface de la face sur la distance algébrique $\overline{I'J'}$ ou $\overline{I'F}$ (cf. figure IV.R.1), rapport résultant de l'intégration du terme de diffusion. Par analogie du terme calculé, ce sous-programme est aussi appelé par le sous-programme **resopv** pour calculer le coefficient “diffusif” de la pression faisant intervenir le pas de temps.

La valeur de la viscosité aux faces est déterminée soit par une moyenne arithmétique, soit par une moyenne harmonique de la viscosité au centre des cellules, suivant le choix de l'utilisateur. Par défaut, cette valeur est calculée par une moyenne arithmétique.

Discrétisation

On rappelle dans la figure IV.R.1, la définition des différents points géométriques utilisés par la suite.

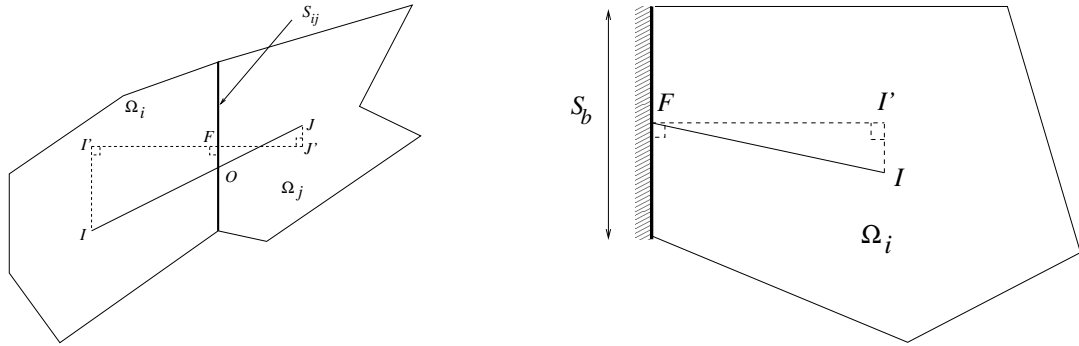


Figure IV.R.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

L'intégration du terme de diffusion sur une cellule Ω_i est la suivante :

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\mu \nabla(f)) d\Omega = \sum_{j \in \text{Vis}(i)} \mu_{ij} \frac{f_{J'} - f_{I'}}{\overline{I'J'}} \cdot S_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \mu_{b_{ik}} \frac{f_{b_{ik}} - f_{I'}}{\overline{FI'}} \cdot S_{b_{ik}} \quad (\text{IV.R.1})$$

Dans ce sous-programme, on calcule les termes de diffusion $\mu_{ij} \frac{S_{ij}}{\overline{I'J'}}$ et $\mu_{b_{ik}} \cdot \frac{S_{b_{ik}}}{\overline{FI'}}$.

La valeur de la viscosité sur la face interne ij , μ_{ij} , est calculée :

★ soit par moyenne arithmétique :

$$\mu_{ij} = \alpha_{ij} \mu_i + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j \quad (\text{IV.R.2})$$

avec $\alpha_{ij} = 0.5$ car ce choix semble stabiliser, bien que cette interpolation soit d'ordre 1 en espace en convergence.

★ soit par moyenne harmonique :

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\alpha_{ij} \mu_i + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j}$$

avec $\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}}$.

La valeur de la viscosité sur la face de bord ik , $\mu_{b_{ik}}$, est définie ainsi :

$$\mu_{b_{ik}} = \mu_I.$$

REMARQUE

Lors de l'appel de **viscfa** par le sous-programme **resopv**, le terme à considérer est :

$$\text{div}(\Delta t^n \nabla(\delta p))$$

soit :

$$\mu = \mu^n = \Delta t$$

Mise en œuvre

La valeur de la viscosité au centre des cellules est entrée en argument *via* la variable **VISTOT**. On calcule sa valeur moyenne aux faces et on la multiplie par le rapport surface **SURFN** sur la distance algébrique **DIST** pour une face interne (**SURFBN** et **DISTBR** respectivement pour une face de bord). La valeur du terme de diffusion résultant est mise dans le vecteur **VISCF** pour une face interne et **VISCB** pour une face de bord.

La variable **IMVISF** détermine quel type de moyenne est utilisé pour calculer la viscosité aux faces. Si **IMVISF**= 0, la moyenne est arithmétique, sinon la moyenne est harmonique.

Points à traiter

L'obtention des interpolations utilisées dans le code *Code_Saturne* du paragraphe [R](#) est résumée dans le rapport de Davroux et al¹. Les auteurs de ce rapport ont montré que, pour un maillage monodimensionnel irrégulier et avec une viscosité non constante, la convergence mesurée est d'ordre 2 en espace avec l'interpolation harmonique et d'ordre 1 en espace avec l'interpolation linéaire (pour des solutions régulières).

Par conséquent, il serait préférable d'utiliser l'interpolation harmonique pour calculer la valeur de la viscosité aux faces. Des tests de stabilité seront nécessaires au préalable.

De même, on envisage d'extrapoler la viscosité sur les faces de bord plutôt que de prendre la valeur de la viscosité au centre de la cellule jouxtant cette face.

Dans le cas de la moyenne arithmétique, l'utilisation de la valeur 0.5 pour les coefficients α_{ij} serait à revoir.

¹Davroux A., Archambeau F. et Hérard J.M., Tests numériques sur quelques méthodes de résolution d'une équation de diffusion en volumes finis, HI-83/00/027/A.

S- visort routine

Fonction

Dans ce sous-programme est calculé le coefficient de diffusion “orthotrope” aux faces. Ce type de coefficient se rencontre pour la diffusion de R_{ij} et ε en $R_{ij} - \varepsilon$ (cf. `turrij`), ainsi que pour la correction de pression dans le cadre de l’algorithme avec couplage vitesse-pression renforcé (`resopv`). Ce coefficient fait intervenir la valeur de la viscosité aux faces multipliée par le rapport surface de la face sur la distance algébrique $\overline{I'J'}$, rapport résultant de l’intégration du terme de diffusion. La valeur de la viscosité aux faces est basée soit sur une moyenne arithmétique, soit sur une moyenne harmonique de la viscosité au centre des cellules.

Discrétisation

La figure IV.S.1 rappelle les diverses définitions géométriques pour les faces internes et les faces de bord.

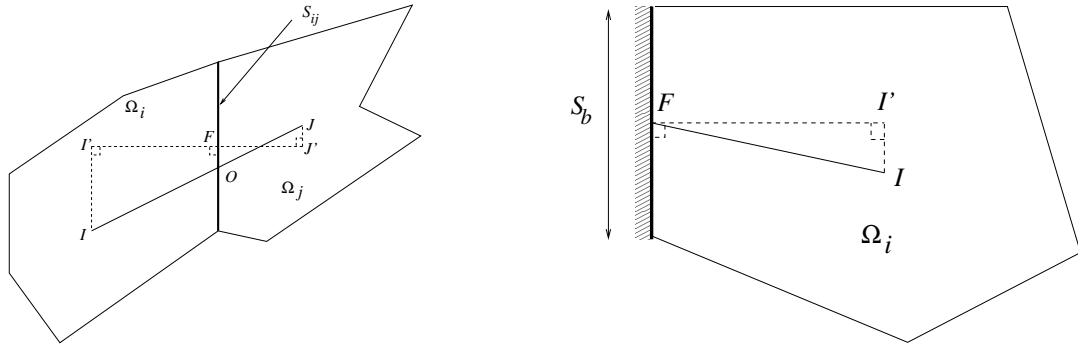


Figure IV.S.1: Définition des différentes entités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite).

L’intégration du terme de diffusion “orthotrope” sur une cellule est la suivante :

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla} f) d\Omega = \sum_{j \in \text{Vis}(i)} (\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla} f)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla} f)_{b_{ik}} \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \quad (\text{IV.S.1})$$

avec :

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.S.2})$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{S}_{ij} &= S_{ij} \underline{n}_{ij} \\ \underline{S}_{b_{ik}} &= S_{b_{ik}} \underline{n}_{b_{ik}} \end{aligned} \quad (\text{IV.S.3})$$

Le terme $(\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla}(f))_{ij} \underline{n}_{ij}$ est calculé à l’aide de la décomposition suivante :

$$(\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla} f)_{ij} = (\underline{\nabla} f \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij} + (\underline{\nabla} f \cdot \underline{\tau}_{ij}) \underline{\underline{\mu}} \underline{\tau}_{ij} \quad (\text{IV.S.4})$$

où $\underline{\tau}_{ij}$ représente un vecteur tangent (unitaire) à la face. Une décomposition similaire est utilisée aux faces de bord.

Dans la matrice, seul le terme $(\underline{\nabla} f \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij}$ est intégrable facilement en implicite. Par conséquent, la partie projetée sur $\underline{\tau}_{ij}$ est :

- négligée dans le cas du calcul des échelles de temps relatives au couplage vitesse-pressure renforcé,
- traitée en explicite dans les termes de diffusion de $R_{ij} - \varepsilon$ (cf. `turrij`).

L'intégration implicite du terme de diffusion s'écrit :

$$\int_{\Omega_i} \text{div} (\underline{\underline{\mu}} \underline{\nabla} f) d\Omega = \sum_{j \in \text{Vis}(i)} (\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij}) \cdot \underline{S}_{ij} \frac{f_{j'} - f_{i'}}{I' J'} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{b_{ik}}) \cdot \underline{S}_{b_{ik}} \frac{f_{b_{ik}} - f_{i'}}{I' F} \quad (\text{IV.S.5})$$

Dans ce sous-programme, on calcule le terme $\frac{(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij}) \cdot \underline{S}_{ij}}{I' J'}$ à l'aide la formule :

$$(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij}) \cdot \underline{n}_{ij} = \mu_{ij}^{moy} = \mu_{ij}^x (n_{ij}^x)^2 + \mu_{ij}^y (n_{ij}^y)^2 + \mu_{ij}^z (n_{ij}^z)^2$$

soit encore :

$$\mu_{ij}^{moy} = \frac{\mu_{ij}^x (S_{ij}^x)^2 + \mu_{ij}^y (S_{ij}^y)^2 + \mu_{ij}^z (S_{ij}^z)^2}{S_{ij}^2}$$

Au bord, on calcule de même :

$$\frac{(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{b_{ik}}) \cdot \underline{S}_{b_{ik}}}{I' F}$$

avec :

$$(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{b_{ik}}) \cdot \underline{n}_{b_{ik}} = \mu_{b_{ik}}^{moy} = \frac{\mu_I^x (S_{b_{ik}}^x)^2 + \mu_I^y (S_{b_{ik}}^y)^2 + \mu_I^z (S_{b_{ik}}^z)^2}{S_{b_{ik}}^2}$$

La valeur de la viscosité dans une direction l sur la face, μ_{ij}^l , est calculée :

- soit par interpolation linéaire :

$$\mu_{ij}^l = \alpha_{ij} \mu_i^l + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j^l \quad (\text{IV.S.6})$$

avec $\alpha_{ij} = 0.5$ car ce choix semble stabiliser bien que cette interpolation soit d'ordre 1 en espace en convergence,

- soit par interpolation harmonique :

$$\mu_{ij}^l = \frac{\mu_i^l \mu_j^l}{\alpha_{ij} \mu_i^l + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j^l}$$

où :

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{F J'}}{\overline{I' J'}}$$

Mise en œuvre

La viscosité orthotrope au centre des cellules est entrée en argument *via* les variables W_1 , W_2 et W_3 . On calcule la valeur moyenne de chaque viscosité aux faces de façon arithmétique ou harmonique.

Ensuite, on calcule la viscosité équivalente correspondant à $(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{ij}) \cdot \frac{\underline{S}_{ij}}{I' J'}$ pour les faces internes et à $(\underline{\underline{\mu}} \underline{n}_{b_{ik}}) \cdot \frac{\underline{S}_{b_{ik}}}{I' F}$ pour les faces de bord.

Cette écriture fait intervenir les vecteurs surface stockés dans le tableau **SURFAC**, la norme de la surface **SURFN** et la distance algébrique **DIST** pour une face interne (**SURFBO**, **SURFBN** et **DISTBR** respectivement pour une face de bord). La valeur du terme de diffusion résultant est mise dans le vecteur **VISCF** (**VISCB** aux faces de bord).

La variable **IMVISF** détermine quel type de moyenne est utilisé pour calculer la viscosité dans une direction à la face. Si **IMVISF**= 0, alors la moyenne est arithmétique, sinon la moyenne est harmonique).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 288/ 400
---------	--	---

Points à traiter

L'obtention des interpolations utilisées dans le code *Code_Saturne* du paragraphe [S](#) est résumée dans le rapport de Davroux et al¹. Les auteurs de ce rapport ont montré que, pour un maillage monodimensionnel irrégulier et avec une viscosité non constante, la convergence mesurée est d'ordre 2 en espace avec l'interpolation harmonique et d'ordre 1 en espace avec l'interpolation linéaire (pour des solutions régulières). Par conséquent, il serait préférable d'utiliser l'interpolation harmonique pour calculer la valeur de la viscosité aux faces. Des tests de stabilité seront nécessaires au préalable.

De même, on envisage d'extrapoler la viscosité sur les faces de bord plutôt que de prendre la valeur de la viscosité de la cellule jouxtant cette face.

Dans le cas de la moyenne arithmétique, l'utilisation de la valeur 0.5 pour les coefficients α_{ij} serait à revoir.

¹Davroux A., Archambeau F. et Hérard J.M., Tests numériques sur quelques méthodes de résolution d'une équation de diffusion en volumes finis, HI-83/00/027/A.

T- visecv routine

Fonction

Dans ce sous-programme sont calculés les termes de gradient transposé et de viscosité secondaire (fluide newtonien). Ils seront traités en explicite pur. En effet, si on traitait ces termes en implicite, cela reviendrait à coupler les équations des différentes composantes de la vitesse, ce qui n'est pas compatible avec le schéma de résolution actuel (*cf.* sous-programme **navstv**).

Discrétisation

L'intégration des termes de gradient transposé $\text{div}(\mu_{tot}^t \underline{\text{grad}}(\underline{v}))$ et de viscosité secondaire $-\frac{2}{3} \underline{\nabla}(\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))$ est la suivante¹ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_i} \text{div}(\mu_{tot}^t \underline{\text{grad}}(\underline{v})) d\Omega \\
&= \sum_{l=x,y,z} \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} \mu_{tot,ij} \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial l} \right)_{moy,ij} n_{ij}^x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial l} \right)_{moy,ij} n_{ij}^y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial l} \right)_{moy,ij} n_{ij}^z \right) S_{ij} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \mu_{tot,b_{ik}} \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial l} \right)_{moy,b_{ik}} n_{b_{ik}}^x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial l} \right)_{moy,b_{ik}} n_{b_{ik}}^y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial l} \right)_{moy,b_{ik}} n_{b_{ik}}^z \right) S_{b_{ik}} \right] \underline{e}_l \\
&-\frac{2}{3} \int_{\Omega_i} \underline{\nabla}(\mu_{tot} \text{div}(\underline{v})) d\Omega \\
&= -\frac{2}{3} \sum_{l=x,y,z} \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))_{ij} S_{ij}^l + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))_{b_{ik}} S_{b_{ik}}^l \right] \underline{e}_l
\end{aligned}$$

Le terme de viscosité μ_{tot} est calculé en fonction du modèle de turbulence utilisé :

$$\mu_{tot} = \begin{cases} \mu + \mu_t & \text{pour les modèles à viscosité turbulente ou en LES,} \\ \mu & \text{pour les modèles au second ordre ou en laminaire.} \end{cases}$$

où μ et μ_t représentent respectivement la viscosité dynamique moléculaire et la viscosité dynamique turbulente.

Mise en œuvre

Terme de gradient transposé

Avant de calculer l'intégration des deux termes, on calcule dans un premier temps la viscosité totale en fonction du modèle de turbulence considéré.

Les termes calculés dans ce sous-programme, appelé par **predvv**, interviennent dans le second membre de l'équation de quantité de mouvement, et sont donc directement stockés dans le tableau correspondant **TRAV**.

Le terme $\text{div}(\mu_{tot}^t \underline{\text{grad}}(\underline{v}))$ est calculé en opérant comme suit.

On effectue une boucle sur les composantes v_α où $\alpha = x, y, z$ de la vitesse (α correspond à **ISOU** dans le code) :

¹la viscosité de volume κ est supposée nulle, *cf.* **navstv**

- on calcule le gradient cellule de v_α par un appel au sous-programme **grdccl**.
- on initialise un tableau nommé W_6 à la valeur 1 pour les cellules internes, et à la valeur 0 pour les cellules de bord. Ce tableau sert par la suite à ne pas considérer la contribution du terme de gradient transposé sur les cellules de bord. En effet, on ne sait pas écrire de conditions aux limites correctes pour le gradient transposé. On préfère donc tout simplement annuler son effet sur les cellules de bord (*cf.* paragraphe T).
- pour chaque direction l ($l = x, y, z$), l correspondant à **IDIM** dans le code, on calcule pour chaque cellule Ω_i dont le centre correspond à la variable **II** ou **JJ** (pour les centres voisins) dans le code :

$$\begin{aligned} \text{TRAV}(i, l) &= \text{TRAV}(i, l) \\ &+ W_6(i) \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} \mu_{tot, ij} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial l} \right)_{moy, ij} S_{ij}^\alpha + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \mu_{tot, b_{ik}} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial l} \right)_{moy, b_{ik}} S_{b_{ik}}^\alpha \right] \\ \text{avec } \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial l} \right)_{moy, ij} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial l} \right)_i + \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial l} \right)_j \right] \end{aligned}$$

Fin de la boucle sur les composantes de la vitesse.

Terme de viscosité secondaire

Le terme de seconde viscosité $-\frac{2}{3}\nabla(\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))$ est calculé de la façon suivante :

- on calcule la valeur de la vitesse sur la face ij en divisant le flux masse connu à la face par la densité moyenne $\rho_{moy, ij}$ de la face ($\rho_{moy, ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$).
- on calcule ensuite l'intégrale volumique de la divergence de la vitesse sur chaque cellule en appelant le sous-programme **divmas**.
- on calcule alors pour chaque cellule Ω_i le terme $-\frac{2}{3}(\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))_i$ que l'on met dans le tableau de travail W_4 . La valeur de ce terme sur la face interne ij est obtenue en prenant la moyenne arithmétique des valeurs des deux cellules avoisinantes (tableau **VISCF**) et celle sur la face de bord est prise égale la valeur de la cellule avoisinante (tableau **VISCB**).
- on calcule alors pour chaque direction l le terme final, *i.e.* :

$$\text{TRAV}(i, l) = \text{TRAV}(i, l) - \frac{2}{3} \left[\sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))_{moy, ij} S_{ij}^l + \sum_{k \in \gamma_b(i)} (\mu_{tot} \text{div}(\underline{v}))_{moy, b_{ik}} S_{b_{ik}}^l \right]$$

Le traitement est similaire pour le terme de viscosité de volume dans le module compressible.

Points à traiter

L'intégration du terme de gradient transposé pose un problème de compatibilité. En effet, le gradient transposé provient de l'écriture de la divergence du tenseur des contraintes (*cf.* **predvv**), soit :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = \text{div}(-p\underline{Id} + \underline{\tau})$$

où :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left[\underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} v + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} v)}_{\text{partie 1}} - \underbrace{\frac{2}{3} \text{tr} \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} v + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} v) \right) \underline{\underline{Id}}}_{\text{partie 2}} \right]$$

Or, lorsque l'on intègre la première partie de la divergence de $\underline{\underline{\tau}}$, on implice le terme $\text{div} (\mu \underline{\underline{\text{grad}}} v)$ et on explicite le gradient transposé $\text{div} (\mu {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} v)$. Ce traitement fait intervenir la vitesse au centre des cellules. Elle ne vérifie pas exactement la condition $\text{div} (\rho \underline{v}) = 0$. En effet, au cours de l'étape de correction, on utilise un filtre Rhie et Chow (*cf. resopv*) et la vitesse n'est mise à jour qu'à la fin de l'étape. Par contre, lorsque l'on intègre la deuxième partie de la divergence de $\underline{\underline{\tau}}$ de façon explicite, on utilise la vitesse issue du flux masse aux faces qui vérifie la condition $\text{div} (\rho \underline{v}) = 0$ (du moins à ρ constant, l'interpolation de ρ à la face étant également un point à considérer). Ainsi, la discrétisation de ces deux parties n'est pas totalement cohérente. Il serait utile de baser la discrétisation de ces termes sur une vitesse vérifiant la contrainte $\text{div} (\rho \underline{v}) = 0$.

Pour la même raison, il est difficile de connaître les conditions aux limites du terme en gradient transposé. Sur les cellules de bord, on sait uniquement que la contrainte totale normale doit équilibrer le frottement et toutes les autres forces. Or, le tenseur des contraintes est scindé en une partie explicite et une partie implicite, donc c'est un peu difficile d'utiliser cette condition physique.

Actuellement, la contribution aux cellules de bord du terme de gradient transposé est annulée, ce qui élimine l'influence des conditions aux limites mais n'est naturellement pas satisfaisant. Quelques essais d'intégration des conditions aux limites pour ce terme n'ont pas été concluants jusqu'à présent. Cependant, des essais supplémentaires sont envisageables.

U- vortex routine

Fonction

Ce sous-programme est dédié à la génération des conditions d'entrée turbulente utilisées en LES.

La méthode des vortex est basée sur une approche de tourbillons ponctuels. L'idée de la méthode consiste à injecter des tourbillons 2D dans le plan d'entrée du calcul, puis à calculer le champ de vitesse induit par ces tourbillons au centre des faces d'entrée.

Discrétisation

Pour utiliser la méthode, on se place tout d'abord dans un repère local défini de manière à ce que le plan $(0yz)$, où sont injectés les vortex, soit confondu avec le plan d'entrée du calcul (voir figure IV.U.1).

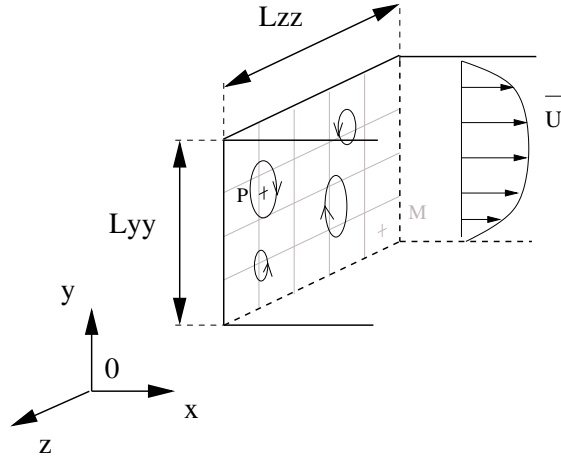


Figure IV.U.1: Définition des différentes grandeurs dans le repère local correspondant à l'entrée d'une conduite de section carrée.

u , v et w sont les composantes de la vitesse fluctuante (principale et transverse) dans ce plan, et $\omega(y, z) = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ la vorticité dans la direction normale au plan d'entrée. $\bar{U}(y, z)$ représente ici la vitesse principale moyenne imposée par l'utilisateur dans le plan d'entrée.

Chaque vortex p va être caractérisé par sa fonction de forme ξ (identique pour tous les vortex), sa circulation Γ_p , son rayon σ_p et les coordonnées (y_p, z_p) du point P où est situé le vortex dans le plan $(0yz)$.

Pour cela, on suppose que la vorticité générée par un vortex p au point M de coordonnée (y, z) s'écrit :

$$\omega_p(y, z) = \Gamma_p \xi_{\sigma_p}(r)$$

où $r = \sqrt{(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}$ est la distance séparant le point M du point P .

Dans la méthode implantée, la fonction de forme est de type gaussienne modifiée :

$$\xi_{\sigma}(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} - 1 \right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

Le champ de vitesse induit par cette distribution de vorticité s'obtient par inversion des deux équations de poisson suivantes qui sont déduites de la condition d'incompressibilité dans la plan¹ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \Delta w \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\Delta v$$

Dans le cas général, ce système peut être intégré à l'aide de la formule de Biot et Savart.

Dans le cas d'une distribution de vorticité de type gaussienne modifiée, les composantes de vitesse vérifient :

$$\begin{cases} v_p(y, x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(z - z_p)}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ w_p(y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - y_p)}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

Ces relations s'étendent de façon immédiate au cas de N vortex distincts. Le champ de vitesse induit par la distribution de vorticité

$$\omega(y, z) = \sum_{p=1}^N \Gamma_p \xi_{\sigma_p}(r) \quad (\text{IV.U.1})$$

vaut au point M :

$$v(x, y) = \sum_{p=1}^N \Gamma_p v_p(y, z) \quad \text{et} \quad w(y, z) = \sum_{p=1}^N \Gamma_p w_p(y, z)$$

Paramètres physiques

Marche en temps

La position initiale de chaque vortex est tirée de manière aléatoire. On calcul les déplacements successifs de chacun des vortex dans le plan d'entrée par intégration explicite du champ de vitesse lagrangien :

$$\frac{dy_p}{dt} = V(y, z) \quad \text{et} \quad \frac{dz_p}{dt} = W(y, z)$$

Les vortex sont alors assimilés à des particules ponctuelles qui sont convectées par le champ (V, W) . Ce champ peut être imposé par des tirages aléatoires ou bien déduit de la vitesse induite par les vortex dans le plan d'entrée. Dans ce cas $V(x, y) = \bar{V}(y, z) + v(y, z)$ et $W(y, z) = \bar{W}(y, z) + w(y, z)$ où \bar{V} et \bar{W} sont les composantes de la vitesse transverse moyenne qu'impose l'utilisateur à l'aide des fichiers de données.

Intensité et durée de vie des vortex

Il serait possible, à partir de l'équation de transport de la vorticité, d'obtenir un modèle d'évolution pour l'intensité du vecteur tourbillon ω_p associé à chacun des vortex. En pratique, on préfère utiliser un modèle simplifié dans lequel la circulation des tourbillons ne dépend que de la position de ces derniers à l'instant considéré. La circulation initiale de chaque vortex est alors obtenue à partir de la relation :

$$|\Gamma_p| = 4 \sqrt{\frac{\pi S k}{3N [2\ln(3) - 3\ln(2)]}}$$

où S est la surface du plan d'entrée, N le nombre de vortex, et k l'énergie cinétique turbulente au point où se trouve le vortex à l'instant considéré. Le signe de Γ_p correspond au sens de rotation du vortex et est tiré aléatoirement.

¹i.e $\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial w} = 0$

Ce paramètre est celui qui contrôle l'intensité des fluctuations. Sa dépendance en k exprime que, plus l'écoulement est turbulent, plus les vortex sont intenses. La valeur de k est spécifiée par l'utilisateur. Elle peut être constante ou imposée à partir de profils d'énergie cinétique turbulente en entrée.

Pour éviter que des structures trop allongées ne se développent au niveau de l'entrée, l'utilisateur doit également spécifier un temps limites τ_p au bout duquel le vortex p va être détruit. Ce temps τ_p peut être pris constant ou estimé au moyen de la relation :

$$\tau_p = \frac{5C_\mu k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon \bar{U}}$$

\bar{U} et ε représentent respectivement la vitesse moyenne principale et la dissipation turbulente au point où est initialement généré le vortex ($C_\mu = 0,09$).

Lorsque le temps écoulé depuis la création du vortex p est supérieur à τ_p , le vortex est détruit et un nouveau vortex généré (sa position et le signe de Γ_p sont tirés de façon aléatoire).

Taille des vortex

La taille des vortex peut être prise constante, ou calculée à partir des relations :

$$\sigma = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \sigma = \max[L_t, L_k]$$

avec:

$$L_t = \sqrt{\left(\frac{5\nu k}{\varepsilon}\right)} \quad \text{et} \quad L_k = 200 \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

où ν , k et ε sont la viscosité dynamique, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation turbulente au point où se trouve le vortex.

Dans tous les cas, la taille du vortex doit être supérieure à la taille des mailles en entrée afin que le vortex soit effectivement simulé.

Conditions aux limites

Le champ de vitesse généré à l'aide de la relation [IV.U.2](#) ne tient pas compte *a priori* des conditions aux limites appliquées sur les bords du plan d'entrée. Pour obtenir des valeurs de la vitesse qui soient cohérentes sur les frontières du domaine d'entrée, des "vortex images", pseudo-vortex situés en dehors du domaine d'entrée, sont générés à des positions particulières et leur champ de vitesse associé est superposé au champ précédemment calculé.

Seuls les cas d'une conduite rectangulaire et d'une conduite circulaire permettent la génération de ces pseudo-vortex. On distingue pour cela trois types de conditions aux limites.

Condition de paroi

On crée, pour chaque vortex P contenu dans le plan d'entrée, un vortex image P' identique à P (*i.e* de même caractéristiques) et symétrique de P par rapport au point J (J étant la projection orthogonalement à la paroi du point M correspondant au centre de la face où l'on cherche à calculer la vitesse). La figure [IV.U.2](#) illustre la technique dans le cas d'une conduite carrée. Dans ce cas les coordonnées du vortex situé en P' vérifient $(y_{p'} + y_p)/2 = y_J$ et $(z_{p'} + z_p)/2 = z_J$. Le champ de vitesse perçu depuis le point M au niveau du point J est nul, ce qui est bien l'effet recherché.

Condition de symétrie

La technique est identique à celle utilisée pour les conditions de paroi, mais seule la composante pour la vitesse normale au bord est modifiée dans ce cas.

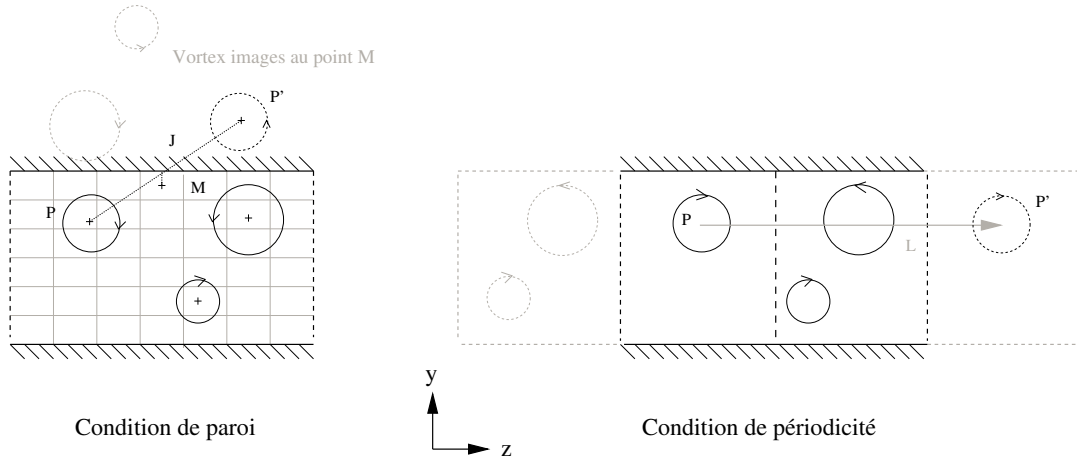


Figure IV.U.2: Principe de génération des “vortex images” suivant le type de conditions aux limites dans une conduite carrée.

Condition de périodicité

On crée pour chaque vortex, un vortex images P' identique à P mais translaté d'une quantité L correspondant à la longueur qui sépare les deux plans de la section d'entrée où sont appliquées les conditions de périodicité. Dans le cas où il y a deux directions de périodicité, on crée deux vortex image.

Composante de vitesse principale

La méthode des vortex ne générant pas de fluctuation u de la vitesse dans la direction principale, la dernière composante est calculée à partir d'une équation de Langevin. Les coefficients de cette équation sont déterminés par identification des expressions obtenues pour les contraintes de Reynolds en $R_{ij} - \varepsilon$. Dans le cas d'un écoulement en canal plan, cette technique conduit à l'équation :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{C_1}{2T}u + \left(\frac{2}{3}C_2 - 1\right) \frac{\partial U}{\partial y}v + \sqrt{C_0\varepsilon}dW_i$$

avec $T = \frac{k}{\varepsilon}$, $C_1 = 1,8$, $C_2 = 0,6$, $C_0 = \frac{14}{15}$, et dW_i une variable aléatoire Gaussienne de variance \sqrt{dt} .

En pratique, l'équation de Langevin n'améliore pas vraiment les résultats. Elle n'est utilisée que dans le cas de conduites circulaires.

Mise en œuvre

- ★ Après une étape de préparation de la mémoire (**memvor**), on repère dans **usvort** les faces d'entrée pour lesquelles la méthode va être utilisée.
- ★ Vérification des dimensions rentrées (**vvor**).
- ★ Le sous-programme **vorpre** se charge ensuite de préparer le calcul (transmission de la géométrie des entrées à tous les processeurs en cas de parallélisme, et construction d'un tableau de connectivité). Le sous-programme procède ainsi :

- On compte, pour chaque entrée **IENT**, le nombre de faces où est appliquée la méthode. Celui-ci est stocké dans le tableau **ICVOR(IENT)**. Un passage dans la sous-routine **memvor** (avec **IAPPEL = 2**) permet d'allouer la mémoire nécessaire à cette phase de préparation.
- Pour chaque processeur, on stocke les coordonnées des faces d'entrée repérées précédemment dans les tableaux de travail **RA(IW1X), RA(IW1Y), RA(IW1Z), ...**
- On regarde ensuite pour chaque processeur (boucle **IPROC=1, NRANGP-1**), si le processeur **IPROC** a des données à envoyer aux autres processeurs (afin que tous disposent des coordonnées).
 - * Si c'est le cas : **ICVOR(IENT)>0**, et on place les données à envoyer dans les tableaux de travail **RA(IW2X), RA(IW2Y), RA(IW2Z), ...**. La valeur **NCOMV = ICVOR(IENT)** correspond alors à la longueur des tableaux à envoyer.
 - * Sinon, on ne fait rien et **NCOM=0**.
- Le processeur numéro **IPROC** distribue à tous les autres processeurs la valeur **NCOM**. Si **NCOM > 0**, il envoie également les données contenues dans les tableaux de travaux **RA(IW2X), ...**. Ces données sont ensuite stockées par tous les processeurs dans les tableaux **RA(IXYZV+III), ...** afin de libérer les tableaux de travail pour la communication suivante, et l'indice **III = III + NCOM** est incrémenté de manière à ranger les valeurs de façon chronologique.

→ Au final de la boucle sur **IPROC**, chaque processeur dispose des coordonnées des faces d'entrée pour lesquelles la méthode va être utilisée, et il est donc simple de construire la connectivité.

- Construction de la connectivité. Au final, la vitesse au centre de la **II** ème face d'entrée utilisant la méthode est contenue à la **IA(IIFAGL+II)** ème ligne du tableau **RA(IUVORT)**.
- La routine se termine par un appel au sous-programme **memvor** (avec **IAPPEL = 3**) afin de réserver la mémoire utile à la méthode des vortex.

Cette phase d'initialisation est réalisée une seule fois au début du calcul. C'est après cette phase seulement que commence la méthode des vortex proprement dite.

- ★ Initialisation des variables avant intervention utilisateur (**inivor**).
- ★ Appel au sous-programme utilisateur **usvort** (**IAPPEL = 2**).
- ★ Vérification des paramètres rentrés (**vvor**).
- ★ Calcul de la vitesse par la méthode des vortex (**vortex**)
- Initialisation du calcul génération du champ initial par appel au sous-programme **vorini** :
 - * Construction du repère local (et calcul de l'équation du plan d'entrée suivant les cas), localisation du centre de l'entrée, et transformation des coordonnées de l'entrée dans le repère local. Les tableaux **YZCEL(II,1)** et **YZCEL(II,2)** contiennent les coordonnées des faces du plan d'entrée une fois ramenées dans le repère (*Oyz*) (**II** est compris entre 1 et **NCEVOR** où **NCEVOR=ICVOR** représente le nombre de faces pour lesquelles la méthode va être utilisée a cette entrée).
 - * Lecture du fichier de données, et initialisation des tableaux **XDAT, YDAT, UDAT, VDAT, WDAT, DUYDAT, KDAT, EPSDAT, ...**
 - * Si on ne fait pas de suite (**ISUIVO=0**) ou que l'on réinitialise le calcul (**INITVO=1**), tirage aléatoire de la position des vortex et de leur sens de rotation, ainsi que calcul de leur durée de vie. Les positions sont stockées dans les tableaux **YZVOR(IVOR,1)** et **YZVOR(IVOR,2)** (**IVOR** désignant le numéro du vortex).

- * Stockage de la vitesse principale moyenne au centre de la cellule dans le tableau **XU**, et recherche pour chaque vortex, de la face d'entrée qui lui est la plus proche.
 - Déplacement des vortex par appel au sous-programme **vordep** :
 - * Convection des vortex.
 - * Traitement des conditions aux limites. Les vortex qui sortent du domaine de calcul sont replacés à leur position d'origine.
 - * Régénération des vortex "morts". Si le temps de vie cumulé **TEMPS(II)** du vortex **II** est supérieur à son temps de vie limite **TPSLIM(II)**, alors le vortex est détruit, et un nouveau vortex est généré.
 - * Recherche pour chaque vortex de la face d'entrée qui lui est la plus proche après déplacement (mise à jour du tableau **IVORCE**).
 - Calcul du champ de vitesse induit par appel au sous-programme **vorvit** :
 - * Calcul de l'intensité du vortex.
 - * Calcul de la taille du vortex.
 - * Calcul du champ de vitesse induit par l'ensemble des vortex au centre des faces d'entrée.
 - * Traitement suivant les cas, des conditions de périodicité de symétrie et des conditions de paroi par génération de vortex images.
 - * Ajout de la vitesse moyenne dans les directions transverse aux tableaux **XV** et **XW**.
 - Génération des fluctuations de vitesse dans la direction principale par appel au sous-programme **vorlgv**.
- ★ appel au sous-programme **vor2cl** :
- Communication en cas de parallélisme de la vitesse calculée en entrée par le processeur 0 aux autres processeurs.
 - Application des conditions aux limites après utilisation d'un changement de repère éventuel.

Points à traiter

Il serait possible de gagner de la mémoire en libérant l'espace alloué aux tableaux **IW1X**,...,**IW2V** après le passage dans **vorpre**.

Part V

Compressible module

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 302/ 400
---------	--	---

A- cfbl** routine

Fonction

On s'intéresse à la résolution des équations de Navier-Stokes en compressible, en particulier pour des configurations sans choc. Le schéma global correspond à une extension des algorithmes volumes finis mis en œuvre pour simuler les équations de Navier-Stokes en incompressible.

Dans les grandes lignes, le schéma est constitué d'une étape "acoustique" fournissant la masse volumique (ainsi qu'une prédiction de pression et un débit acoustique), suivie de la résolution de l'équation de la quantité de mouvement ; on résout ensuite l'équation de l'énergie et, pour terminer, la pression est mise à jour. Moyennant une contrainte sur la valeur du pas de temps, le schéma permet d'assurer la positivité de la masse volumique.

La thermodynamique prise en compte à ce jour est celle des gaz parfaits, mais l'organisation du code à été prévue pour permettre à l'utilisateur de fournir ses propres lois.

Pour compléter la présentation, on pourra se reporter à la référence suivante :

[**Mathon**] P. Mathon, F. Archambeau, J.-M. Hérard : "Implantation d'un algorithme compressible dans *Code_Saturne* ", HI-83/03/016/A

Le cas de validation "tube à choc" de la version 1.2 de *Code_Saturne* permettra également d'apporter quelques compléments (tube à choc de Sod, discontinuité de contact instationnaire, double détente symétrique, double choc symétrique).

Notations

Symbole	Unité	Signification
C_p, C_{p_i}	$J/(kg.K)$	capacité calorifique à pression constante $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$
C_v, C_{v_i}	$J/(kg.K)$	capacité calorifique à volume constant $C_v = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho$
$\mathcal{D}_{f/b}$	m^2/s	diffusivité moléculaire du composant f dans le bain
E	J/m^3	énergie totale volumique $E = \rho e$
F		centre de gravité d'une face
H	J/kg	enthalpie totale massique $H = \frac{E+P}{\rho}$
I		point de co-location de la cellule i
I'		pour une face ij partagée entre les cellules i et j , I' est le projeté de I sur la normale à la ij passant par F , centre de ij
K	$kg/(m.s)$	diffusivité thermique
M, M_i	kg/mol	masse molaire (M_i pour le constituant i)
P	Pa	pression
\underline{Q}	$kg/(m^2.s)$	vecteur quantité de mouvement $\underline{Q} = \rho \underline{u}$
\underline{Q}_{ac}	$kg/(m^2.s)$	vecteur quantité de mouvement issu de l'étape acoustique
\overline{Q}	$kg/(m^2.s)$	norme de \underline{Q}
R	$J/(mol.K)$	constante universelle des gaz parfaits
S	$J/(K.m^3)$	entropie volumique
\mathcal{S}	$[f].kg/(m^3.s)$	Terme de production/dissipation volumique pour le scalaire f
T	K	température (> 0)
Y_i		fraction massique du composé i ($0 \leq Y_i \leq 1$)

Symbole	Unité	Signification
c^2	$(m/s)^2$	carré de la vitesse du son $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$
e	J/kg	énergie totale massique $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$
\underline{f}_v	N/kg	$\rho \underline{f}_v$ représente le terme source volumique pour la quantité de mouvement : gravité, pertes de charges, tenseurs des contraintes turbulentes, forces de Laplace...
\underline{g}	m/s^2	accélération de la pesanteur
\underline{h}	J/kg	enthalpie massique $h = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$
i		indice faisant référence à la cellule i ; f_i est la valeur de la variable f associée au point de co-location I
I'		indice faisant référence à la cellule i ; f'_I est la valeur de la variable f associée au point I'
$\underline{j} \wedge \underline{B}$	N/m^3	forces de Laplace
r, r_i	$J/(kg.K)$	constante massique des gaz parfaits $r = \frac{R}{M}$ (pour le constituant i , on a $r_i = \frac{R}{M_i}$)
s	$J/(K.kg)$	entropie massique
t	s	temps
\underline{u}	m/s	vecteur vitesse
u	m/s	norme de \underline{u}

Symbole	Unité	Signification
β	$kg/(m^3.K)$	$\beta = \frac{\partial P}{\partial s} \bigg _\rho$
γ	$kg/(m^3.K)$	constante caractéristique d'un gaz parfait $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
ε	J/kg	énergie interne massique
κ	$kg/(m.s)$	viscosité dynamique en volume
λ	$W/(m.K)$	conductivité thermique
μ	$kg/(m.s)$	viscosité dynamique ordinaire
ρ	kg/m^3	densité
$\underline{\varphi}_f$	$[f].kg/(m^2.s)$	vecteur flux diffusif du composé f
φ_f	$[f].kg/(m^2.s)$	norme de $\underline{\varphi}_f$
$\underline{\underline{\Sigma}}^v$	$kg/(m^2.s^2)$	tenseur des contraintes visqueuses
$\underline{\Phi}_s$	W/m^2	vecteur flux conductif de chaleur
Φ_s	W/m^2	norme de $\underline{\Phi}_s$
Φ_v	W/kg	$\rho\Phi_v$ représente le terme source volumique d'énergie, comprenant par exemple l'effet Joule $\underline{j} \cdot \underline{E}$, le rayonnement...

Système d'équations laminaires de référence

L'algorithme développé propose de résoudre l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation d'énergie totale de manière conservative, pour des écoulements compressibles.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\underline{Q}) = 0 \\ \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \underline{\nabla} P = \rho \underline{f}_v + \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\Sigma}}^v) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(\underline{u}(E + P)) = \rho \underline{f}_v \cdot \underline{u} + \text{div}(\underline{\underline{\Sigma}}^v \underline{u}) - \text{div} \underline{\Phi}_s + \rho \Phi_v \end{array} \right. \quad (\text{V.A.1})$$

Nous avons présenté ici le système d'équations laminaires, mais il faut préciser que la turbulence ne pose pas de problème particulier dans la mesure où les équations supplémentaires sont découplées du système (V.A.1).

Expression des termes intervenant dans les équations

- Énergie totale volumique :

$$E = \rho e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (\text{V.A.2})$$

avec l'énergie interne $\varepsilon(P, \rho)$ donnée par l'équation d'état

- Forces volumiques : $\rho \underline{f}_v$ (dans la plupart des cas $\rho \underline{f}_v = \rho \underline{g}$)

- Tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^v = \mu(\underline{\nabla} \underline{u} + {}^t \underline{\nabla} \underline{u}) + (\kappa - \frac{2}{3} \mu) \text{div} \underline{u} \underline{Id} \quad (\text{V.A.3})$$

avec $\mu(T, \dots)$ et $\kappa(T, \dots)$ mais souvent $\kappa = 0$

- Flux de conduction de la chaleur : loi de Fourier

$$\underline{\Phi}_s = -\lambda \underline{\nabla} T \quad (\text{V.A.4})$$

avec $\lambda(T, \dots)$

- Source de chaleur volumique : $\rho \Phi_v$

Équations d'état et expressions de l'énergie interne

Gaz parfait

Équation d'état : $P = \rho r T$

Énergie interne massique : $\varepsilon = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}$

Soit :

$$P = (\gamma - 1)\rho(e - \frac{1}{2}u^2) \quad (\text{V.A.5})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 307/400
---------	--	---

Mélange de gaz parfaits

On considère un mélange de N constituants de fractions massiques $(Y_i)_{i=1\dots N}$

Équation d'état : $P = \rho r_{\text{mélange}} T$

Énergie interne massique : $\varepsilon = \frac{P}{(\gamma_{\text{mélange}} - 1)\rho}$

Soit :

$$P = (\gamma_{\text{mélange}} - 1)\rho(e - \frac{1}{2}u^2) \quad (\text{V.A.6})$$

$$\text{avec } \gamma_{\text{mélange}} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i C_{pi}}{\sum_{i=1}^N Y_i C_{vi}} \quad \text{et} \quad r_{\text{mélange}} = \sum_{i=1}^N Y_i r_i$$

Equation d'état de Van der Waals

Cette équation est une correction de l'équation d'état des gaz parfaits pour tenir compte des forces intermoléculaires et du volume des molécules constitutives du gaz. On introduit deux coefficients correctifs : a [$\text{Pa} \cdot \text{m}^6 / \text{kg}^2$] est lié aux forces intermoléculaires et b [m^3 / kg] est le covolume (volume occupé par les molécules).

Équation d'état : $(P + a\rho^2)(1 - b\rho) = \rho r T$

Énergie interne massique : $\varepsilon = \frac{(P + a\rho^2)(1 - b\rho)}{(\hat{\gamma} - 1)\rho} - a\rho$

Soit :

$$P = (\hat{\gamma} - 1) \frac{\rho}{(1 - b\rho)} (e - \frac{1}{2}u^2 + a\rho) - a\rho^2 \quad (\text{V.A.7})$$

$$\text{avec } \hat{\gamma} = 1 + \frac{r}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{P - a\rho^2(1 - 2b\rho)}{P + a\rho^2} \right) + \frac{2a\rho^2(1 - b\rho)}{P + a\rho^2}$$

Calcul des grandeurs thermodynamiques

Pour un gaz parfait à γ constant

Equation d'état : $P = \rho r T$

On suppose connues la chaleur massique à pression constante C_p et la masse molaire M du gaz, ainsi que les variables d'état.

Chaleur massique à volume constant : $C_v = C_p - \frac{R}{M} = C_p - r$

Constante caractéristique du gaz : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - r}$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 308/400
---------	--	---

Vitesse du son : $c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$

Entropie : $s = \frac{P}{\rho^\gamma}$ et $\beta = \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_\rho = \rho^\gamma$

Remarque : L'entropie choisie ici n'est pas l'entropie physique, mais une entropie mathématique qui vérifie $c^2 \frac{\partial s}{\partial P} \Big|_\rho + \frac{\partial s}{\partial \rho} \Big|_P = 0$

Pression : $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$

Energie interne : $\varepsilon = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$ avec $\varepsilon_{sup} = 0$

Enthalpie : $h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$

Pour un mélange de gaz parfaits

Une intervention de l'utilisateur dans le sous-programme utilisateur `uscfth` est nécessaire pour pouvoir utiliser ces lois.

Equation d'état : $P = \rho r_{mél} T$ avec $r_{mél} = \sum_{i=1}^N Y_i r_i = \sum_{i=1}^N Y_i \frac{R}{M_i}$

On suppose connues la chaleur massique à pression constante des différents constituants C_{p_i} , la masse molaire M_i des constituants du gaz, ainsi que les variables d'état (dont les fractions massiques Y_i).

Masse molaire du mélange : $M_{mél} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{M_i} \right)^{-1}$

Chaleur massique à pression constante du mélange :

$$C_{p_{mél}} = \sum_{i=1}^N Y_i C_{p_i}$$

Chaleur massique à volume constant du mélange :

$$C_{v_{mél}} = \sum_{i=1}^N Y_i C_{v_i} = C_{p_{mél}} - \frac{R}{M_{mél}} = C_{p_{mél}} - r_{mél}$$

Constante caractéristique du gaz : $\gamma_{mél} = \frac{C_{p_{mél}}}{C_{v_{mél}}} = \frac{C_{p_{mél}}}{C_{p_{mél}} - r_{mél}}$

Vitesse du son : $c^2 = \gamma_{mél} \frac{P}{\rho}$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 309/400
---------	--	---

Entropie : $s = \frac{P}{\rho^{\gamma_{mél}}} \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho = \rho^{\gamma_{mél}}$

Pression : $P = (\gamma_{mél} - 1)\rho\varepsilon$

Energie interne : $\varepsilon = C_{vmél} T \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{sup} = 0$

Enthalpie : $h = C_{pmél} T = \frac{\gamma_{mél}}{\gamma_{mél} - 1} \frac{P}{\rho}$

Pour un gaz de Van der Waals

Ces lois n'ont pas été programmées, mais l'utilisateur peut intervenir dans le sous-programme utilisateur `uscfth` s'il souhaite le faire.

Equation d'état : $(P + a\rho^2)(1 - b\rho) = \rho r T$

avec a [$Pa \cdot m^6/kg^2$] lié aux forces intermoléculaires et b [m^3/kg] le covolume (volume occupé par les molécules).

On suppose connus les coefficients a et b , la chaleur massique à pression constante C_p , la masse molaire M du gaz et les variables d'état.

Chaleur massique à volume constant : $C_v = C_p - r \frac{P + a\rho^2}{P - a\rho^2(1 - 2b\rho)}$

Constante "équivalente" du gaz : $\hat{\gamma} = 1 + \frac{r}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{P - a\rho^2(1 - 2b\rho)}{P + a\rho^2} \right) + \frac{2a\rho^2(1 - b\rho)}{P + a\rho^2}$

Vitesse du son : $c^2 = \hat{\gamma} \frac{P + a\rho^2}{\rho(1 - b\rho)} - 2a\rho$

Entropie : $s = (P + a\rho^2) \left(\frac{1 - b\rho}{\rho} \right)^{\hat{\gamma}} \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho = \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\hat{\gamma}}$

Pression : $P = (\hat{\gamma} - 1) \frac{\rho}{(1 - b\rho)} (\varepsilon + a\rho) - a\rho^2$

Energie interne : $\varepsilon = C_v T - a\rho \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{sup} = -a\rho$

Enthalpie : $h = \frac{\hat{\gamma} - b\rho}{\hat{\gamma} - 1} \frac{P + a\rho^2}{\rho} - 2a\rho$

Algorithme de base

On suppose connues toutes les variables au temps t^n et on cherche à les déterminer à l'instant t^{n+1} . On résout en deux blocs principaux : d'une part le système masse-quantité de mouvement, de l'autre

l'équation portant sur l'énergie et les scalaires transportés. Dans le premier bloc, on distingue le traitement du système (couplé) acoustique et le traitement de l'équation de la quantité de mouvement complète.

Au début du pas de temps, on commence par mettre à jour les propriétés physiques variables (par exemple $\mu(T)$, $\kappa(T)$, $C_p(Y_1, \dots, Y_N)$ ou $\lambda(T)$), puis on résout les étapes suivantes :

1. **Acoustique : sous-programme cfmsvl**
Résolution d'une équation de convection-diffusion portant sur ρ^{n+1} .
On obtient à la fin de l'étape ρ^{n+1} , Q_{ac}^{n+1} et éventuellement une prédiction de la pression $P^{pred}(\rho^{n+1}, e^n)$.
2. **Quantité de mouvement : sous-programme cfqdmv**
Résolution d'une équation de convection-diffusion portant sur u^{n+1} qui fait intervenir Q_{ac}^{n+1} et P^{pred} .
On obtient à la fin de l'étape u^{n+1} .
3. **Énergie totale : sous-programme cfener**
Résolution d'une équation de convection-diffusion portant sur e^{n+1} qui fait intervenir Q_{ac}^{n+1} , P^{pred} et u^{n+1} .
On obtient à la fin de l'étape e^{n+1} et une valeur actualisée de la pression $P(\rho^{n+1}, e^{n+1})$.
4. **Scalaires passifs**
Résolution d'une équation de convection-diffusion standard par scalaire, avec Q_{ac}^{n+1} pour flux convectif.

Discrétisation

On se reportera aux sections relatives aux sous-programmes **cfmsvl** (masse volumique), **cfqdmv** (quantité de mouvement) et **cfener** (énergie). La documentation du sous-programme **cfxtcl** fournit des éléments relatifs aux conditions aux limites.

Mise en œuvre

Le module compressible est une “physique particulière” activée lorsque le mot-clé **IPPMOD(ICOMP)** est positif ou nul.

Dans ce qui suit, on précise les inconnues et les propriétés principales utilisées dans le module. On fournit également un arbre d'appel simplifié des sous-programmes du module : initialisation avec **initil** puis (**iniva0** et) **inivar** et enfin, boucle en temps avec **tridim**.

Inconnues et propriétés

Les NSCAPP inconnues scalaires associées à la physique particulière sont définies dans **cfvarp** dans l'ordre suivant :

- la masse volumique **RTP(*, ISCA(IRHO))**,
- l'énergie totale **RTP(*, ISCA(IENERG))**,
- la température **RTP(*, ISCA(ITEMPK))**

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 311/400
---------	--	--

On souligne que la température est définie en tant que variable “RTP” et non pas en tant que propriété physique “PROPCE”. Ce choix a été motivé par la volonté de simplifier la gestion des conditions aux limites, au prix cependant d’un encombrement mémoire légèrement supérieur (une grandeur RTP consomme plus qu’une grandeur PROPCE).

La pression et la vitesse sont classiquement associées aux tableaux suivants :

- pression : RTP(*, IPR)
- vitesse : RTP(*, IU), RTP(*, IV), RTP(*, IW).

Outre les propriétés associées en standard aux variables identifiées ci-dessus, le tableau PROPCE contient également :

- la chaleur massique à volume constant C_v , stockée dans PROPCE(*, IPPROC(ICV)), si l’utilisateur a indiqué dans `uscftth` qu’elle était variable.
- la viscosité en volume PROPCE(*, IPPROC(IVISCV)) si l’utilisateur a indiqué dans `uscfx2` qu’elle était variable.

Pour la gestion des conditions aux limites et en particulier pour le calcul du flux convectif par le schéma de Rusanov aux entrées et sorties (hormis en sortie supersonique), on dispose des tableaux suivants dans PROPFB :

- flux convectif de quantité de mouvement au bord pour les trois composantes dans les tableaux PROPFB(*, IPPROB(IFBRHU)) (composante x), PROPFB(*, IPPROB(IFBRHV)) (composante y) et PROPFB(*, IPPROB(IFBRHW)) (composante z)
- flux convectif d’énergie au bord PROPFB(*, IPPROB(IFBENE))

et on dispose également dans IA :

- d’un tableau d’entiers dont la première “case” est IA(IIFBRU), dimensionné au nombre de faces de bord et permettant de repérer les faces de bord pour lesquelles on calcule le flux convectif par le schéma de Rusanov,
- d’un tableau d’entiers dont la première “case” est IA(IIFBET), dimensionné au nombre de faces de bord et permettant de repérer les faces de paroi à température ou à flux thermique imposé.

Arbre d'appel simplifié

usini1	Initialisation des mots-clés utilisateur généraux et positionnement des variables
usppmo	Définition du module “physique particulière” employé
varpos	Positionnement des variables
pplecd	Branchement des physiques particulières pour la lecture du fichier de données éventuel
ppvarp	Branchement des physiques particulières pour le positionnement des inconnues
cfvarp	Positionnement des inconnues spécifiques au module compressible
uscfth	Appelé avec ICCFTH=-1, pour indiquer que C_p et C_v sont constants ou variables
uscfx2	Conductivité thermique moléculaire constante ou variable et viscosité en volume constante ou variable (ainsi que leur valeur, si elles sont constantes)
ppprop	Branchement des physiques particulières pour le positionnement des propriétés
cfprop	Positionnement des propriétés spécifiques au module compressible
ppini1	Branchement des physiques particulières pour l'initialisation des mots-clés spécifiques
cfini1	Initialisation des mots-clés spécifiques au module compressible
uscfi1	Initialisation des mots-clés utilisateur spécifiques au module compressible

Table A.1: Sous-programme `init1` : initialisation des mots-clés et positionnement des variables

ppiniv	Branchement des physiques particulières pour l'initialisation des variables
cfiniv	Initialisation des variables spécifiques au module compressible
memcfv	Réservation de tableaux de travail locaux
uscfth	Initialisation des variables par défaut (en calcul suite : seulement C_v ; si le calcul n'est pas une suite : C_v , la masse volumique et l'énergie)
uscfxi	Initialisation des variables par l'utilisateur (seulement si le calcul n'est pas une suite)

Table A.2: Sous-programme **inivar** : initialisation des variables

phyvar	Calcul des propriétés physiques variables
ppphyv	Branchement des physiques particulières pour le calcul des propriétés physiques variables
cfphyv	Calcul des propriétés physiques variables pour le module compressible
usphyv	Calcul par l'utilisateur des propriétés physiques variables pour le module compressible (C_v est calculé dans uscfth qui est appelé par usphyv)

Table A.3: Sous-programme **tridim** : partie 1 (propriétés physiques)

dtvar		Calcul du pas de temps variable
cfdtv		Calcul de la contrainte liée au CFL en compressible
	memcft	Gestion de la mémoire pour le calcul de la contrainte en CFL
	cfmsfl	Calcul du flux associé à la contrainte en CFL
precli		Initialisation des tableaux avant calcul des conditions aux limites (IITYPF, ICODCL, RCODCL)
	ppprcl	Initialisations spécifiques aux différentes physiques particulières avant calcul des conditions aux limites (pour le module compressible : IZFPPP, IA(IIFBRU), IA(IIFBET), RCODCL, flux convectifs pour la quantité de mouvement et l'énergie)
ppclim		Branchement des physiques particulières pour les conditions aux limites (en lieu et place de usclim)
	uscfcl	Intervention de l'utilisateur pour les conditions aux limites (en lieu et place de usclim, même pour les variables qui ne sont pas spécifiques au module compressible)
condli		Traitement des conditions aux limites
	pptycl	Branchement des physiques particulières pour le traitement des conditions aux limites
	cfxtcl	Traitement des conditions aux limites pour le compressible
	uscfth	Calculs de thermodynamique pour le calcul des conditions aux limites
	cfrusb	Flux de Rusanov (entrées ou sorties sauf sortie supersonique)

Table A.4: Sous-programme `tridim` : partie 2 (pas de temps variable et conditions aux limites)

memcfm	Gestion de la mémoire pour la résolution de l'étape "acoustique"
cfmsv1	Résolution de l'étape "acoustique"
cfmsf1	Calcul du "flux de masse" aux faces (noté $\rho \underline{w} \cdot \underline{n} S$ dans la documentation du sous-programme cfmsv1)
cfdivs	Calcul du terme en divergence du tenseur des contraintes visqueuses (trois appels), éventuellement Après cfmsf1 , on impose le flux de masse aux faces de bord à partir des conditions aux limites
cfmsvs	Calcul de la "viscosité" aux faces (notée $\Delta t c^2 \frac{S}{d}$ dans la documentation du sous-programme cfmsv1) Après cfmsvs , on annule la viscosité aux faces de bord pour que le flux de masse soit bien celui souhaité
codits	Résolution du système portant sur la masse volumique
clpsca	Impression des bornes et clipping éventuel (pas de clipping en standard)
uscfth	Gestion éventuelle des bornes par l'utilisateur
cfbsc3	Calcul du flux de masse acoustique aux faces (noté $\underline{Q}_{ac} \cdot \underline{n}$ dans la documentation du sous-programme cfmsv1)
uscfth	Actualisation de la pression, éventuellement
cfqdmv	Résolution de la quantité de mouvement
cfcdts	Résolution du système
cfbsc2	Calcul des termes de convection et de diffusion au second membre

Table A.5: Sous-programme **tridim** : partie 3 (Navier-Stokes)

scalai	Résolution des équations sur les scalaires
cfener	Résolution de l'équation sur l'énergie totale
memcfe	Gestion de la mémoire locale
cfdivs	Calcul du terme en divergence du produit "tenseur des contraintes par vitesse"
uscfth	Calcul de l'écart "énergie interne - $C_v T$ " (ε_{sup})
cfcdts	Résolution du système
cfbsc2	Calcul des termes de convection et de diffusion au second membre
clpsca	Impression des bornes et clipping éventuel (pas de clipping en standard)
uscfth	Gestion éventuelle des bornes par l'utilisateur
uscfth	Mise à jour de la pression

Table A.6: Sous-programme **tridim** : partie 4 (scalaires)

Le sous-programme **cfbsc3** est similaire à **bilsc2**, mais il produit des flux aux faces et n'est écrit que pour un schéma upwind, à l'ordre 1 en temps (ce qui est cohérent avec les choix faits dans l'algorithme compressible).

Le sous-programme **cfbsc2** est similaire à **bilsc2**, mais n'est écrit que pour un schéma d'ordre 1 en temps. Le sous-programme **cfbsc2** permet d'effectuer un traitement spécifique aux faces de bord pour lesquelles on a appliqué un schéma de Rusanov pour calculer le flux convectif total. Ce sous-programme est appelé pour la résolution de l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation de l'énergie. On pourra se reporter à la documentation du sous-programme **cfxtcl**.

Le sous-programme **cfcdts** est similaire à **codits** mais fait appel à **cfbsc2** et non pas à **bilsc2**. Il diffère de **codits** par quelques autres détails qui ne sont pas gênants dans l'immédiat : initialisation de PVARA et de SMBINI, ordre en temps (ordre 2 non pris en compte).

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 317/400
---------	--	--

Points à traiter

Des actions complémentaires sont identifiées ci-après, dans l'ordre d'urgence décroissante (on se reportera également à la section "Points à traiter" de la documentation des autres sous-programmes du module compressible).

- Assurer la cohérence des sous-programmes suivants (ou, éventuellement, les fusionner pour éviter qu'ils ne divergent) :
 - `cfcmts` et `codits`,
 - `cfbsc2` et `bilsc2`,
 - `cfbsc3` et `bilsc2`.
- Permettre les suites de calcul incompressible/compressible et compressible/incompressible.
- Apporter un complément de validation (exemple : IPHYDR).
- Assurer la compatibilité avec certaines physiques particulières, selon les besoins. Par exemple : arc électrique, rayonnement, combustion.
- Identifier les causes des difficultés rencontrées sur certains cas académiques, en particulier :
 - canal subsonique (comment s'affranchir des effets indésirables associés aux conditions d'entrée et de sortie, comment réaliser un calcul périodique, en particulier pour la température dont le gradient dans la direction de l'écoulement n'est pas nul, si les parois sont adiabatiques),
 - cavité fermée sans vitesse ni effets de gravité, avec température ou flux thermique imposé en paroi (il pourrait être utile d'extrapoler le gradient de pression au bord : la pression dépend de la température et une simple condition de Neumann homogène est susceptible de créer un terme source de quantité de mouvement parasite),
 - maillage non conforme (non conformité dans la direction transverse d'un canal),
 - "tube à choc" avec terme source d'énergie.
- Compléter certains points de documentation, en particulier les conditions aux limites thermiques pour le couplage avec SYRTHES.
- Améliorer la rapidité à faible nombre de Mach (est-il possible de lever la limite actuelle sur la valeur du pas de temps ?).
- Enrichir, au besoin :
 - les thermodynamiques prises en compte (multiconstituant, gamma variable, Van der Waals...),
 - la gamme des conditions aux limites d'entrée disponibles (condition à débit massique et débit enthalpique imposés par exemple).
- Tester des variantes de l'algorithme :
 - prise en compte des termes sources de l'équation de la quantité de mouvement autres que la gravité dans l'équation de la masse résolue lors de l'étape "acoustique" (les tests réalisés avec cette variante de l'algorithme devront être repris dans la mesure où, dans `cfmsf1`, `IIR0M` et `IIR0MB` n'étaient pas initialisés),
 - implication du terme de convection dans l'équation de la masse (éliminer cette possibilité si elle n'apporte rien),
 - étape de prédiction de la pression,

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 318/400
---------	--	--

- non reconstruction de la masse volumique pour le terme convectif (actuellement, les termes convectifs sont traités avec décentrement amont, d'ordre 1 en espace ; pour l'équation de la quantité de mouvement et l'équation de l'énergie, on utilise les valeurs prises au centre des cellules sans reconstruction : c'est l'approche standard de *Code_Saturne*, traduite dans **cfbsc2** ; par contre, dans **cfmsv1**, on reconstruit les valeurs de la masse volumique utilisées pour le terme convectif ; il n'y a pas de raison d'adopter des stratégies différentes, d'autant plus que la reconstruction de la masse volumique ne permet pas de monter en ordre et augmente le risque de dépassement des bornes physiques),
 - montée en ordre en espace (en vérifier l'utilité et la robustesse, en particulier relativement au principe du maximum pour la masse volumique),
 - montée en ordre en temps (en vérifier l'utilité et la robustesse).
- Optimiser l'encombrement mémoire.

B- cfener routine

Fonction

Pour les notations et l'algorithme dans son ensemble, on se reportera à **cfbase**.

Après masse (acoustique) et quantité de mouvement, on considère un dernier pas fractionnaire (de t^{**} à t^{***}) au cours duquel seule varie l'énergie totale $E = \rho e$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{***} = \rho^{**} = \rho^{n+1} \\ \underline{Q}^{***} = \underline{Q}^{**} = \underline{Q}^{n+1} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div} \left(\underline{Q}_{ac} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \right) = \rho \underline{f}_v \cdot \underline{u} + \text{div} (\underline{\underline{\Sigma}}^v \underline{u}) - \text{div} \underline{\Phi}_s + \rho \Phi_v \end{array} \right. \quad (\text{V.B.1})$$

Pour conserver la positivité de l'énergie, il est indispensable ici, comme pour les scalaires, d'utiliser le flux de masse convectif acoustique \underline{Q}_{ac}^{n+1} compatible avec l'équation de la masse. De plus, pour obtenir des propriétés de positivité sur les scalaires, un schéma upwind pour le terme convectif doit être utilisé (mais les termes sources introduisent des contraintes supplémentaires qui peuvent être prépondérantes et gênantes).

À la fin de cette étape, on actualise éventuellement (mais par défaut non) une deuxième et dernière fois la pression en utilisant la loi d'état pour obtenir la pression finale :

$$P^{n+1} = P(\rho^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) \quad (\text{V.B.2})$$

Discrétisation

Discrétisation en temps

La modélisation des flux de chaleur choisie jusqu'à présent est de la forme $-\text{div}(\underline{\Phi}_s) = \text{div}(\lambda \underline{\nabla} T)$.

Pour faire apparaître un terme diffusif stabilisant dans la matrice de résolution, on cherche à exprimer le flux diffusif de chaleur ($-\text{div}(\underline{\Phi}_s)$) en fonction de la variable résolue (l'énergie totale).

Avec $\varepsilon_{sup}(P, \rho)$ dépendant de la loi d'état, on exprime l'énergie totale de la façon suivante :

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2 = (C_v T + \varepsilon_{sup}) + \frac{1}{2} u^2 \quad (\text{V.B.3})$$

En supposant C_v constant¹, on a alors :

$$-\text{div}(\underline{\Phi}_s) = \text{div} \left(K \underline{\nabla} \left(e - \frac{1}{2} u^2 - \varepsilon_{sup} \right) \right) \quad \text{avec } K = \lambda / C_v \quad (\text{V.B.4})$$

Lorsqu'un modèle de turbulence est activé, on conserve la même forme de modélisation pour les flux thermiques et K intègre alors la diffusivité turbulente. On pourra se reporter à la documentation de **cfxtcl** à ce sujet.

¹Pour C_v non constant, les développements restent à faire : on pourra se reporter à P. Mathon, F. Archambeau, J.-M. Hérard : "Implantation d'un algorithme compressible dans *Code_Saturne*", HI-83/03/016/A

Avec la formulation (V.B.4), on peut donc impliciter le terme en $\underline{\nabla}e$.

De plus, puisque la vitesse a déjà été résolue, on implicite également le terme en $\underline{\nabla}\frac{1}{2}u^2$. L'exposant $n + \frac{1}{2}$ de ε_{sup} indique que l'implicitation de ce terme est partielle (elle dépend de la forme de la loi d'état).

Par ailleurs, on implicite le terme de convection, le terme de puissance des forces volumiques, éventuellement le terme de puissance des forces de pression (suivant la valeur de IGRDPP, on utilise la prédiction de pression obtenue après résolution de l'équation portant sur la masse volumique ou bien la pression du pas de temps précédent) et le terme de puissance des forces visqueuses. On implicite le terme de puissance volumique en utilisant ρ^{n+1} .

On obtient alors l'équation discrète portant sur e :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho e)^{n+1} - (\rho e)^n}{\Delta t^n} + \text{div}(\underline{Q}_{ac}^{n+1} e^{n+1}) - \text{div}(K^n \underline{\nabla} e^{n+1}) &= \rho^{n+1} \underline{f}_v \cdot \underline{u}^{n+1} - \text{div}(\underline{Q}_{ac}^{n+1} \frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}}) \\ &+ \text{div}((\underline{\Sigma}^v)^{n+1} \underline{u}^{n+1}) - \text{div}(K^n \underline{\nabla}(\frac{1}{2}(u^2)^{n+1} + \varepsilon_{sup}^{n+\frac{1}{2}})) + \rho^{n+1} \Phi_v \end{aligned} \quad (\text{V.B.5})$$

avec $\tilde{P} = P^{Pred}$ ou P^n suivant la valeur de IGRDPP (P^n par défaut).

En pratique, dans *Code_Saturne*, on résout cette équation en faisant apparaître à gauche l'écart $e^{n+1} - e^n$. Pour cela, on écrit la dérivée en temps discrète sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho e)^{n+1} - (\rho e)^n}{\Delta t^n} &= \frac{\rho^{n+1} e^{n+1} - \rho^n e^n}{\Delta t^n} \\ &= \frac{\rho^n e^{n+1} - \rho^n e^n}{\Delta t^n} + \frac{\rho^{n+1} e^{n+1} - \rho^n e^{n+1}}{\Delta t^n} \\ &= \frac{\rho^n}{\Delta t^n} (e^{n+1} - e^n) + e^{n+1} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^n} \end{aligned} \quad (\text{V.B.6})$$

et l'on utilise l'équation de la masse discrète pour écrire :

$$\frac{(\rho e)^{n+1} - (\rho e)^n}{\Delta t^n} = \frac{\rho^n}{\Delta t^n} (e^{n+1} - e^n) - e^{n+1} \text{div} \underline{Q}_{ac}^{n+1} \quad (\text{V.B.7})$$

Discretisation en espace

Introduction

On intègre l'équation (V.B.5) sur la cellule i de volume Ω_i et l'on procède comme pour l'équation de la masse et de la quantité de mouvement.

On obtient alors l'équation discrète suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{\Delta t^n} (\rho_i^{n+1} e_i^{n+1} - \rho_i^n e_i^n) + \sum_{j \in V(i)} \left(e^{n+1} \underline{Q}_{ac}^{n+1} \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{j \in V(i)} (K^n \underline{\nabla}(e^{n+1}))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \\ = \Omega_i \rho_i^{n+1} \underline{f}_{vi} \cdot \underline{u}_i^{n+1} - \sum_{j \in V(i)} \left(\frac{P^{Pred}}{\rho^{n+1}} \underline{Q}_{ac}^{n+1} \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} + \sum_{j \in V(i)} ((\underline{\Sigma}^v)^{n+1} \underline{u}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \\ - \sum_{j \in V(i)} \left(K^n \underline{\nabla} \left(\frac{1}{2} (u^2)^{n+1} + \varepsilon_{sup}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} + \Omega_i \rho_i^{n+1} \Phi_{vi} \end{aligned} \quad (\text{V.B.8})$$

Discrétisation de la partie “convective”

La valeur à la face s’écrit :

$$\left(e^{n+1} \underline{Q}_{ac}^{n+1}\right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = e_{ij}^{n+1} (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{V.B.9})$$

avec un décentrement sur la valeur de e^{n+1} aux faces :

$$\begin{aligned} e_{ij}^{n+1} &= e_i^{n+1} & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ &= e_j^{n+1} & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{aligned} \quad (\text{V.B.10})$$

que l’on peut noter :

$$e_{ij}^{n+1} = \beta_{ij} e_i^{n+1} + (1 - \beta_{ij}) e_j^{n+1} \quad (\text{V.B.11})$$

avec

$$\begin{cases} \beta_{ij} = 1 & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ \beta_{ij} = 0 & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (\text{V.B.12})$$

Discrétisation de la partie “diffusive”

La valeur à la face s’écrit :

$$\begin{aligned} (K^n \underline{\nabla}(e^{n+1}))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} &= K_{ij}^n \left(\frac{\partial e}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} S_{ij} \\ &\text{et} \\ (K^n \underline{\nabla} \left(\frac{1}{2} (u^2)^{n+1} + \varepsilon_{sup}^{n+\frac{1}{2}} \right))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} &= K_{ij}^n \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right)}{\partial n} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} S_{ij} \end{aligned} \quad (\text{V.B.13})$$

avec une interpolation linéaire pour K^n aux faces (et en pratique, $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$) :

$$K_{ij}^n = \alpha_{ij} K_i^n + (1 - \alpha_{ij}) K_j^n \quad (\text{V.B.14})$$

et un schéma centré avec reconstruction pour le gradient normal aux faces :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} = \frac{e_{J'}^{n+1} - e_{I'}^{n+1}}{I'J'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right)}{\partial n} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right)_{J'}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right)_{I'}^{n+\frac{1}{2}}}{I'J'} \quad (\text{V.B.15})$$

Discrétisation de la puissance des forces de pression

Ce terme est issu du terme convectif, on le discrétise donc de la même façon.

$$\left(\frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}} \underline{Q}_{ac}^{n+1} \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \left(\frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}} \right)_{ij} (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{V.B.16})$$

avec un décentrement sur la valeur de $\frac{P}{\rho}$ aux faces :

$$\left(\frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}} \right)_{ij} = \beta_{ij} \frac{\tilde{P}_i}{\rho_i^{n+1}} + (1 - \beta_{ij}) \frac{\tilde{P}_j}{\rho_j^{n+1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta_{ij} = 1 & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ \beta_{ij} = 0 & \text{si } (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (\text{V.B.17})$$

Discrétisation de la puissance des forces visqueuses

On calcule les termes dans les cellules puis on utilise une interpolation linéaire (on utilise $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$ dans la relation ci-dessous) :

$$((\underline{\Sigma}^v)^{n+1} \underline{u}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \left\{ \alpha_{ij} ((\underline{\Sigma}^v)^{n+1} \underline{u}^{n+1})_i + (1 - \alpha_{ij}) ((\underline{\Sigma}^v)^{n+1} \underline{u}^{n+1})_j \right\} \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{V.B.18})$$

Remarques

Les termes “convectifs” associés à $\text{div} \left(\left(e^{n+1} + \frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}} \right) \underline{Q}_{ac}^{n+1} \right)$ sont calculés avec un décentrement amont (consistant, d’ordre 1 en espace). Les valeurs utilisées sont bien prises au centre de la cellule amont (e_i, P_i, ρ_i) et non pas au projeté I' du centre de la cellule sur la normale à la face passant par son centre de gravité (sur un cas test en triangles, l’utilisation de P'_I et de ρ'_I pour le terme de transport de pression a conduit à un résultat insatisfaisant, mais des corrections ont été apportées aux sources depuis et il serait utile de vérifier que cette conclusion n’est pas remise en question).

Les termes diffusifs associés à $\text{div} \left(K \underline{\nabla} \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right) \right)$ sont calculés en utilisant des valeurs aux faces reconstruites pour s’assurer de la consistance du schéma.

Mise en œuvre

Après une étape de gestion de la mémoire (**memcfe**), on calcule les différents termes sources (au centre des cellules) :

- source volumique de chaleur (**ustssc**),
- source associée aux sources de masse (**catsma**),
- source associée à l’accumulation de masse $\text{div} \underline{Q}_{ac}$ (directement dans **cfener**),
- dissipation visqueuse (**cfdivs**),
- transport de pression (directement dans **cfener**),
- puissance de la pesanteur (directement dans **cfener**),
- termes diffusifs en $\text{div} \left(K \underline{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup} \right) \right)$ (calcul de ε_{sup} par **uscfth**, puis calcul du terme diffusif directement dans **cfener**).

Le système (V.B.8) est résolu par une méthode d’incrément et résidu en utilisant une méthode de Jacobi (**cfcdts**).

L’impression des bornes et la limitation éventuelle de l’énergie sont ensuite effectuées par **clpsca** suivi de **uscfth** (intervention utilisateur optionnelle).

On actualise enfin la pression et on calcule la température (**uscfth**).

Pour terminer, en parallèle ou en périodique, on échange les variables pression, énergie et température.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 324/ 400
---------	--	---

Points à traiter

- **Choix de \tilde{P}**

En standard, on utilise $\tilde{P} = P^n$, mais ce n'est pas le seul choix possible. On pourrait étudier le comportement de l'algorithme avec P^{Pred} et P^{n+1} (avec P^{n+1} , en particulier, $\frac{\tilde{P}}{\rho^{n+1}}$ est évalué avec la masse volumique et l'énergie prises au même instant).

- **Terme source dans l'équation de l'énergie**

La présence d'un terme source externe dans l'équation de l'énergie génère des oscillations de vitesse qu'il est important d'analyser et de comprendre.

C- cfmsvl routine

Fonction

Pour les notations et l'algorithme dans son ensemble, on se reportera à **cfbase**.

On considère un premier pas fractionnaire au cours duquel l'énergie totale est fixe. Seules varient la masse volumique et le flux de masse acoustique normal aux faces (défini et calculé aux faces).

On a donc le système suivant, entre t^n et t^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \underline{Q}_{ac} = 0 \\ \frac{\partial \underline{Q}_{ac}}{\partial t} + \underline{\nabla} P = \rho \underline{f} \\ \underline{Q}^* = \underline{Q}^n \\ e^* = e^n \end{array} \right. \quad (\text{V.C.1})$$

Une partie des termes sources de l'équation de la quantité de mouvement peut être prise en compte dans cette étape (les termes les plus importants, en prêtant attention aux sous-équilibres).

Il faut noter que si \underline{f} est effectivement nul, on aura bien un système "acoustique", mais que si l'on place des termes supplémentaires dans \underline{f} , la dénomination est abusive (on la conservera cependant).

On obtient $\rho^* = \rho^{n+1}$ en résolvant (V.C.1), et l'on actualise alors le flux de masse acoustique \underline{Q}_{ac}^{n+1} , qui servira pour la convection (en particulier pour la convection de l'enthalpie totale et de tous les scalaires transportés).

Suivant la valeur de IGRDPP, on actualise éventuellement la pression, en utilisant la loi d'état :

$$P^{Pred} = P(\rho^{n+1}, \varepsilon^n)$$

Discrétisation

Discrétisation en temps

Le système (V.C.1) discrétisé en temps donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^n} + \text{div } \underline{Q}_{ac}^{n+1} = 0 \\ \frac{\underline{Q}_{ac}^{n+1} - \underline{Q}^n}{\Delta t^n} + \underline{\nabla} P^* = \rho^n \underline{f}^n \\ \underline{Q}^* = \underline{Q}^n \\ e^* = e^n \end{array} \right. \quad (\text{V.C.2})$$

$$\begin{array}{ll} \text{avec} & \underline{f}^n = \underline{0} \\ \text{ou} & \underline{f}^n = \underline{g} \\ \text{ou même} & \underline{f}^n = \underline{f}_v + \frac{1}{\rho^n} (-\text{div}(\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \underline{\text{div}}(\underline{\Sigma}^v) + \underline{j} \wedge \underline{B})^n \end{array} \quad (\text{V.C.3})$$

Dans la pratique nous avons décidé de prendre $\underline{f}^n = \underline{g}$:

- le terme $\underline{j} \wedge \underline{B}$ n'a pas été testé,
- le terme $\underline{\text{div}}(\underline{\Sigma}^v)$ était négligeable sur les tests réalisés,
- le terme $\text{div}(\underline{u} \otimes \underline{Q})$ a paru déstabiliser les calculs (mais au moins une partie des tests a été réalisée avec une erreur de programmation et il faudrait donc les reprendre).

Le terme \underline{Q}^n dans la 2^{ème} équation de (V.C.2) est le vecteur “quantité de mouvement” qui provient de l'étape de résolution de la quantité de mouvement du pas de temps précédent, $\underline{Q}^n = \rho^n \underline{u}^n$. On pourrait théoriquement utiliser un vecteur quantité de mouvement issu de l'étape acoustique du pas de temps précédent, mais il ne constitue qu'un “prédicteur” plus ou moins satisfaisant (il n'a pas “vu” les termes sources qui ne sont pas dans \underline{f}^n) et cette solution n'a pas été testée.

On écrit alors la pression sous la forme :

$$\underline{\nabla}P = c^2 \underline{\nabla}\rho + \beta \underline{\nabla}s \quad (\text{V.C.4})$$

avec $c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$ et $\beta = \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_\rho$ tabulés ou analytiques à partir de la loi d'état.

On discrétise l'expression précédente en :

$$\underline{\nabla}P^* = (c^2)^n \underline{\nabla}(\rho^{n+1}) + \beta^n \underline{\nabla}(s^n) \quad (\text{V.C.5})$$

On obtient alors une équation portant sur ρ^{n+1} en substituant l'expression de \underline{Q}_{ac}^{n+1} issue de la 2^{ème} équation de (V.C.2) dans la 1^{ère} équation de (V.C.2) :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^n} + \text{div}(\underline{w}^n \rho^n) - \text{div}(\Delta t^n (c^2)^n \underline{\nabla}(\rho^{n+1})) = 0 \quad (\text{V.C.6})$$

où :

$$\underline{w}^n = \underline{u}^n + \Delta t^n \left(\underline{f}^n - \frac{\beta^n}{\rho^n} \underline{\nabla}(s^n) \right) \quad (\text{V.C.7})$$

Formulation alternative (programmée mais non testée) avec le terme de convection implicite :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^n} + \text{div}(\underline{w}^n \rho^{n+1}) - \text{div}(\Delta t^n (c^2)^n \underline{\nabla}(\rho^{n+1})) = 0 \quad (\text{V.C.8})$$

Discretisation en espace

Introduction

On intègre l'équation précédente ((V.C.6) ou (V.C.8)) sur la cellule i de volume Ω_i . On transforme les intégrales de volume en intégrales surfaciques et l'on discrétise ces intégrales. Pour simplifier l'exposé, on se place sur une cellule i dont aucune face n'est sur le bord du domaine.

On obtient alors l'équation discrète suivante¹ :

$$\Omega_i \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t^n} + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}^n)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\Delta t^n (c^2)^n \underline{\nabla}(\rho^{n+1}))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = 0 \quad (\text{V.C.9})$$

¹L'exposant $n+\frac{1}{2}$ signifie que le terme peut être implicite ou explicite. En pratique on a choisi $\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho^n$.

Discrétisation de la partie “convective”

La valeur à la face s’écrit :

$$(\rho^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}^n)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{V.C.10})$$

avec, pour \underline{w}_{ij}^n , une simple interpolation linéaire :

$$\underline{w}_{ij}^n = \alpha_{ij} \underline{w}_i^n + (1 - \alpha_{ij}) \underline{w}_j^n \quad (\text{V.C.11})$$

et un décentrement sur la valeur de $\rho^{n+\frac{1}{2}}$ aux faces :

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} &= \rho_{I'}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ &= \rho_{J'}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{aligned} \quad (\text{V.C.12})$$

que l’on peut noter :

$$\rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \beta_{ij} \rho_{I'}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \beta_{ij}) \rho_{J'}^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{V.C.13})$$

avec

$$\begin{cases} \beta_{ij} = 1 & \text{si} \quad \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ \beta_{ij} = 0 & \text{si} \quad \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (\text{V.C.14})$$

Discrétisation de la partie “diffusive”

La valeur à la face s’écrit :

$$(\Delta t^n (c^2)^n \underline{\nabla}(\rho^{n+1}))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \Delta t^n (c^2)_{ij}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} S_{ij} \quad (\text{V.C.15})$$

avec, pour assurer la continuité du flux normal à l’interface, une interpolation harmonique de $(c^2)^n$:

$$(c^2)_{ij}^n = \frac{(c^2)_i^n (c^2)_j^n}{\alpha_{ij} (c^2)_i^n + (1 - \alpha_{ij}) (c^2)_j^n} \quad (\text{V.C.16})$$

et un schéma centré pour le gradient normal aux faces :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} = \frac{\rho_{J'}^{n+1} - \rho_{I'}^{n+1}}{I'J'} \quad (\text{V.C.17})$$

Système final

On obtient maintenant le système final, portant sur $(\rho_i^{n+1})_{i=1\dots N}$:

$$\frac{\Omega_i}{\Delta t^n} (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}_{ij}^n \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \Delta t^n (c^2)_{ij}^n \frac{\rho_{J'}^{n+1} - \rho_{I'}^{n+1}}{I'J'} S_{ij} = 0 \quad (\text{V.C.18})$$

Remarque : interpolation aux faces pour le terme de diffusion

Le choix de la forme de la moyenne pour le cofacteur du flux normal n’est pas sans conséquence sur la vitesse de convergence, surtout lorsque l’on est en présence de fortes inhomogénéités.

On utilise une interpolation harmonique pour c^2 afin de conserver la continuité du flux diffusif normal $\Delta t (c^2) \frac{\partial \rho}{\partial n}$ à l’interface ij . En effet, on suppose que le flux est dérivable à l’interface. Il doit donc y

être continu.

Écrivons la continuité du flux normal à l'interface, avec la discrétisation suivante² :

$$\left(\Delta t (c^2) \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{ij} = \Delta t (c^2)_i \frac{\rho_{ij} - \rho_{I'}}{\overline{I'F}} = \Delta t (c^2)_j \frac{\rho_{J'} - \rho_{ij}}{\overline{FJ'}} \quad (\text{V.C.19})$$

En égalant les flux à gauche et à droite de l'interface, on obtient

$$\rho_{ij} = \frac{\overline{I'F} (c^2)_j \rho_{J'} + \overline{FJ'} (c^2)_i \rho_{I'}}{\overline{I'F} (c^2)_j + \overline{FJ'} (c^2)_i} \quad (\text{V.C.20})$$

On introduit cette formulation dans la définition du flux (par exemple, du flux à gauche) :

$$\left(\Delta t (c^2) \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{ij} = \Delta t (c^2)_i \frac{\rho_{ij} - \rho_{I'}}{\overline{I'F}} \quad (\text{V.C.21})$$

et on utilise la définition de $(c^2)_{ij}$ en fonction de ce même flux

$$\left(\Delta t (c^2) \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{ij} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \Delta t (c^2)_{ij} \frac{\rho_{J'} - \rho_{I'}}{\overline{I'J'}} \quad (\text{V.C.22})$$

pour obtenir la valeur de $(c^2)_{ij}$ correspondant à l'équation (V.C.16) :

$$(c^2)_{ij} = \frac{\overline{I'J'} (c^2)_i (c^2)_j}{\overline{FJ'} (c^2)_i + \overline{I'F} (c^2)_j} \quad (\text{V.C.23})$$

Mise en œuvre

Le système (V.C.18) est résolu par une méthode d'incrément et résidu en utilisant une méthode de Jacobi pour inverser le système si le terme convectif est implicite et en utilisant une méthode de gradient conjugué si le terme convectif est explicite (qui est le cas par défaut).

Attention, les valeurs du flux de masse $\rho \underline{w} \cdot \underline{S}$ et de la viscosité $\Delta t c^2 \frac{S}{\underline{d}}$ aux faces de bord, qui sont calculées dans `cfmsf1` et `cfmsvs` respectivement, sont modifiées immédiatement après l'appel à ces sous-programmes. En effet, il est indispensable que la contribution de bord de $(\rho \underline{w} - \Delta t (c^2) \underline{\nabla} \rho) \cdot \underline{S}$ représente exactement $\underline{Q}_{ac} \cdot \underline{S}$. Pour cela,

- immédiatement après l'appel à `cfmsf1`, on remplace la contribution de bord de $\rho \underline{w} \cdot \underline{S}$ par le flux de masse exact, $\underline{Q}_{ac} \cdot \underline{S}$, déterminé à partir des conditions aux limites,
- puis, immédiatement après l'appel à `cfmsvs`, on annule la viscosité au bord $\Delta t (c^2)$ pour éliminer la contribution de $-\Delta t (c^2) (\underline{\nabla} \rho) \cdot \underline{S}$ (l'annulation de la viscosité n'est pas problématique pour la matrice, puisqu'elle porte sur des incréments).

Une fois qu'on a obtenu ρ^{n+1} , on peut actualiser le flux de masse acoustique aux faces $(\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}$, qui servira pour la convection des autres variables :

$$(\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = -(\Delta t^n (c^2)^n \underline{\nabla} (\rho^{n+1}))_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} + \left(\rho^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}^n \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \quad (\text{V.C.24})$$

Ce calcul de flux est réalisé par `cfbsc3`. Si l'on a choisi l'algorithme standard, équation (V.C.6), on complète le flux dans `cfmsv1` immédiatement après l'appel à `cfbsc3`. En effet, dans ce cas, la convection est explicite ($\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho^n$, obtenu en imposant `ICONV(ISCA(IRHO))=0`) et le sous-programme `cfbsc3`, qui calcule le flux de masse aux faces, ne prend pas en compte la contribution du terme $\rho^{n+\frac{1}{2}} \underline{w}^n \cdot \underline{S}$. On ajoute donc cette contribution dans `cfmsv1`, après l'appel à `cfbsc3`. Au bord, en particulier, c'est bien le flux de masse calculé à partir des conditions aux limites que l'on obtient.

On actualise la pression à la fin de l'étape, en utilisant la loi d'état :

$$P_i^{pred} = P(\rho_i^{n+1}, \varepsilon_i^n) \quad (\text{V.C.25})$$

²On ne reconstruit pas les valeurs de $\Delta t c^2$ aux points I' et J' .

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 330/400
---------	--	--

Points à traiter

Le calcul du flux de masse au bord n'est pas entièrement satisfaisant si la convection est traitée de manière implicite (algorithme non standard, non testé, associé à l'équation (V.C.8), correspondant au choix $\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho^{n+1}$ et obtenu en imposant `ICONV(ISCA(IRHO))=1`). En effet, après `cfmsf1`, il faut déterminer la vitesse de convection \underline{w}^n pour qu'apparaisse $\rho^{n+1}\underline{w}^n \cdot \underline{n}$ au cours de la résolution par `codits`. De ce fait, on doit déduire une valeur de \underline{w}^n à partir de la valeur du flux de masse. Au bord, en particulier, il faut donc diviser le flux de masse issu des conditions aux limites par la valeur de bord de ρ^{n+1} . Or, lorsque des conditions de Neumann sont appliquées à la masse volumique, la valeur de ρ^{n+1} au bord n'est pas connue avant la résolution du système. On utilise donc, au lieu de la valeur de bord inconnue de ρ^{n+1} la valeur de bord prise au pas de temps précédent ρ^n . Cette approximation est susceptible d'affecter la valeur du flux de masse au bord.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 331/ 400
---------	--	---

D- cfqdmv routine

Fonction

Pour les notations et l'algorithme dans son ensemble, on se reportera à **cfbase**.

Dans le premier pas fractionnaire (**cfmsv1**), on a résolu une équation sur la masse volumique, obtenu une prédiction de la pression et un flux convectif "acoustique". On considère ici un second pas fractionnaire au cours duquel seul varie le vecteur flux de masse $\underline{Q} = \rho \underline{u}$ (seule varie la vitesse au centre des cellules). On résout l'équation de Navier-Stokes indépendamment pour chaque direction d'espace, et l'on utilise le flux de masse acoustique calculé précédemment comme flux convecteur (on pourrait aussi utiliser le vecteur quantité de mouvement du pas de temps précédent). De plus, on résout en variable \underline{u} et non \underline{Q} .

Le système à résoudre entre t^* et t^{**} est (on exclut la turbulence, dont le traitement n'a rien de particulier dans le module compressible) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{**} = \rho^* = \rho^{n+1} \\ \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{Q}_{ac}) + \underline{\nabla} P = \rho \underline{f}_v + \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\Sigma}}^v) \\ e^{**} = e^* = e^n \end{array} \right. \quad (\text{V.D.1})$$

La résolution de cette étape est similaire à l'étape de prédiction des vitesses du schéma de base de *Code_Saturne*.

Discrétisation

Discrétisation en temps

On implícite le terme de convection, éventuellement le gradient de pression (suivant la valeur de IGRDPP, en utilisant la pression prédite lors de l'étape acoustique) et le terme en gradient du tenseur des contraintes visqueuses. On explicite les autres termes du tenseur des contraintes visqueuses. On implícite les forces volumiques en utilisant ρ^{n+1} .

On obtient alors l'équation discrète suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \underline{u})^n}{\Delta t^n} + \underline{\text{div}}(\underline{u}^{n+1} \otimes \underline{Q}_{ac}^{n+1}) - \underline{\text{div}}(\mu^n \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^{n+1}) \\ & = \rho^{n+1} \underline{f}_v - \underline{\nabla} \tilde{P} + \underline{\text{div}}(\mu^n {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^n + (\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \underline{\text{div}} \underline{u}^n \underline{\underline{Id}}) \end{aligned} \quad (\text{V.D.2})$$

avec $\tilde{P} = P^n$ ou P^{Pred} suivant la valeur de IGRDPP (P^n par défaut).

En pratique, dans *Code_Saturne*, on résout cette équation en faisant apparaître à gauche l'écart $\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n$. Pour cela, on écrit la dérivée en temps discrète sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \underline{u})^n}{\Delta t^n} &= \frac{\rho^{n+1} \underline{u}^{n+1} - \rho^n \underline{u}^n}{\Delta t^n} \\
&= \frac{\rho^n \underline{u}^{n+1} - \rho^n \underline{u}^n}{\Delta t^n} + \frac{\rho^{n+1} \underline{u}^{n+1} - \rho^n \underline{u}^{n+1}}{\Delta t^n} \\
&= \frac{\rho^n}{\Delta t^n} (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + \underline{u}^{n+1} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^n}
\end{aligned} \tag{V.D.3}$$

et l'on utilise alors l'équation de la masse discrète pour écrire :

$$\frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \underline{u})^n}{\Delta t^n} = \frac{\rho^n}{\Delta t^n} (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) - \underline{u}^{n+1} \operatorname{div} \underline{Q}_{ac}^{n+1} \tag{V.D.4}$$

Discrétisation en espace

Introduction

On intègre l'équation (V.D.2) sur la cellule i de volume Ω_i et on obtient l'équation discrétisée en espace :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Omega_i}{\Delta t^n} (\rho_i^{n+1} \underline{u}_i^{n+1} - \rho_i^n \underline{u}_i^n) + \sum_{j \in V(i)} (\underline{u}^{n+1} \otimes \underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{j \in V(i)} (\mu^n \underline{\nabla} \underline{u}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \\
&= \Omega_i \rho_i^{n+1} f_{v_i} - \Omega_i (\underline{\nabla} \tilde{P})_i + \sum_{j \in V(i)} \left(\mu^n {}^t \underline{\nabla} \underline{u}^n + (\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \operatorname{div} \underline{u}^n \underline{Id} \right)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij}
\end{aligned} \tag{V.D.5}$$

Discrétisation de la partie “convective”

La valeur à la face s'écrit :

$$(\underline{u}^{n+1} \otimes \underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \underline{u}_{ij}^{n+1} (\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \tag{V.D.6}$$

avec un décentrement sur la valeur de \underline{u}^{n+1} aux faces :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_{ij}^{n+1} &= \underline{u}_i^{n+1} \quad \text{si} \quad (\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\
&= \underline{u}_j^{n+1} \quad \text{si} \quad (\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0
\end{aligned} \tag{V.D.7}$$

que l'on peut noter :

$$\underline{u}_{ij}^{n+1} = \beta_{ij} \underline{u}_i^{n+1} + (1 - \beta_{ij}) \underline{u}_j^{n+1} \tag{V.D.8}$$

avec

$$\begin{cases} \beta_{ij} = 1 & \text{si} \quad (\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} \geq 0 \\ \beta_{ij} = 0 & \text{si} \quad (\underline{Q}_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} < 0 \end{cases} \tag{V.D.9}$$

Discrétisation de la partie “diffusive”

La valeur à la face s'écrit :

$$(\mu^n \underline{\nabla} \underline{u}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = \mu_{ij}^n \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} S_{ij} \tag{V.D.10}$$

avec une interpolation linéaire pour μ^n aux faces (en pratique avec $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$) :

$$\mu_{ij}^n = \alpha_{ij} \mu_i^n + (1 - \alpha_{ij}) \mu_j^n \tag{V.D.11}$$

et un schéma centré pour le gradient normal aux faces :

$$\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1} = \frac{\underline{u}_{j'}^{n+1} - \underline{u}_{i'}^{n+1}}{I' J'} \tag{V.D.12}$$

Discrétisation du gradient de pression

On utilise `grdcel` standard. Suivant la valeur de `IMRGRA`, cela correspond à une reconstruction itérative ou par moindres carrés.

Discrétisation du “reste” du tenseur des contraintes visqueuses

On calcule des gradients aux cellules et on utilise une interpolation linéaire aux faces (avec, en pratique, $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned}
 (\mu^n {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^n + (\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \text{div } \underline{u}^n \underline{\underline{Id}})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} = & \left\{ \alpha_{ij} (\mu^n {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^n + (\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \text{div } \underline{u}^n \underline{\underline{Id}})_i \right. \\
 & \left. + (1 - \alpha_{ij}) (\mu^n {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^n + (\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \text{div } \underline{u}^n \underline{\underline{Id}})_j \right\} \cdot \underline{S}_{ij}
 \end{aligned} \tag{V.D.13}$$

Mise en œuvre

On résout les trois directions d’espace du système (V.D.5) successivement et indépendamment :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\Omega_i}{\Delta t^n} (\rho_i^{n+1} u_{i(\alpha)}^{n+1} - \rho_i^n u_{i(\alpha)}^n) + \sum_{j \in V(i)} u_{ij(\alpha)}^{n+1} (Q_{ac}^{n+1})_{ij} \cdot \underline{S}_{ij} - \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij}^n \frac{u_{j(\alpha)}^{n+1} - u_{i(\alpha)}^{n+1}}{I'J'} S_{ij} \\
 & = \Omega_i \rho_i^{n+1} f_{v_{i(\alpha)}} - \Omega_i (\underline{\nabla} \tilde{P})_{i(\alpha)} \\
 & + \sum_{j \in V(i)} ((\mu^n {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^n)_{ij} \cdot \underline{S}_{ij})_{(\alpha)} + \sum_{j \in V(i)} \left((\kappa^n - \frac{2}{3} \mu^n) \text{div } \underline{u}^n \right)_{ij} S_{ij(\alpha)}
 \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} i = 1 \dots N \\ \text{et} \\ (\alpha) = x, y, z \end{matrix} \tag{V.D.14}$$

Chaque système associé à une direction est résolu par une méthode d’incrément et résidu en utilisant une méthode de Jacobi.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 335/ 400
---------	--	---

E- cfxtcl routine

Fonction

Pour le traitement des conditions aux limites, on considère le système (V.E.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\underline{Q}) = 0 \\ \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \text{div}(\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \underline{\nabla} P = \rho \underline{f}_v + \text{div}(\underline{\Sigma}^v) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(\underline{u}(E + P)) = \rho \underline{f}_v \cdot \underline{u} + \text{div}(\underline{\Sigma}^v \underline{u}) - \text{div} \underline{\Phi}_s + \rho \Phi_v \end{array} \right. \quad (\text{V.E.1})$$

en tant que système hyperbolique portant sur la variable vectorielle $\underline{W} = {}^t(\rho, \underline{Q}, E)$.

Le système s'écrit alors :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{F}_i(\underline{W}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{F}_i^D(\underline{W}, \underline{\nabla} \underline{W}) + \underline{\mathcal{S}} \quad (\text{V.E.2})$$

où les $\underline{F}_i(\underline{W})$ sont les vecteurs flux convectifs et les $\underline{F}_i^D(\underline{W})$ sont les vecteurs flux diffusifs dans les trois directions d'espace, et $\underline{\mathcal{S}}$ est un terme source.

La démarche classique de *Code_Saturne* est adoptée : on impose les conditions aux limites en déterminant, pour chaque variable, des valeurs numériques de bord. Ces valeurs sont calculées de telle façon que, lorsqu'on les utilise dans les formules standard donnant les flux discrets, on obtienne les contributions souhaitées au bord.

Pour rendre compte des flux convectifs (aux entrées et aux sorties en particulier), on fait abstraction des flux diffusifs et des termes sources pour résoudre un problème de Riemann qui fournit un vecteur d'état au bord. Celui-ci permet de calculer un flux, soit directement (par les formules discrètes standard), soit en appliquant un schéma de Rusanov (schéma de flux décentré).

En paroi, on résout également, dans certains cas, un problème de Riemann pour déterminer une pression au bord.

Discrétisation

Introduction

Objectif

On résume ici les différentes conditions aux limites utilisées pour l'algorithme compressible afin de fournir une vue d'ensemble. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de faire référence à des éléments relatifs à la discrétisation et au mode d'implantation des conditions aux limites.

Lors de l'implantation, on a cherché à préserver la cohérence avec l'approche utilisée dans le cadre standard de l'algorithme incompressible de *Code_Saturne*. Il est donc conseillé d'avoir pris connaissance du mode de traitement des conditions aux limites incompressibles avant d'aborder les détails de l'algorithme compressible.

Comme pour l'algorithme incompressible, les conditions aux limites sont imposées par le biais d'une valeur de bord associée à chaque variable. De plus, pour certaines frontières (parois à température imposée ou à flux thermique imposé), on dispose de deux valeurs de bord pour la même variable, l'une d'elles étant dédiée au calcul du flux diffusif. Enfin, sur certains types d'entrée et de sortie, on définit également une valeur du flux convectif au bord.

Comme pour l'algorithme incompressible, l'utilisateur peut définir, pour chaque face de bord, des conditions aux limites pour chaque variable, mais on conseille cependant d'utiliser uniquement les types prédéfinis décrits ci-après (entrée, sortie, paroi, symétrie) qui ont l'avantage d'assurer la cohérence entre les différentes variables et les différentes étapes de calcul.

Parois

Pression : on doit disposer d'une condition pour le calcul du gradient qui intervient dans l'étape de quantité de mouvement. On dispose de deux types de condition, au choix de l'utilisateur :

- par défaut, la pression imposée au bord est proportionnelle à la valeur interne (la pression au bord est obtenue comme solution d'un problème de Riemann sur les équations d'Euler avec un état miroir ; on distingue les cas de choc et de détente et, dans le cas d'une détente trop forte, une condition de Dirichlet homogène est utilisée pour éviter de voir apparaître une pression négative),
- si l'utilisateur le souhaite (`ICFGRP=1`), le gradient de pression est imposé à partir du profil de pression hydrostatique.

Vitesse et turbulence : traitement standard (voir la documentation des sous-programmes `condli` et `clptur`).

Scalaires passifs : traitement standard (flux nul par défaut imposé dans `typec1`).

Masse volumique : traitement standard des scalaires (flux nul par défaut imposé dans `typec1`).

Énergie et température¹ : traitement standard des scalaires (flux nul par défaut imposé dans `typec1`), hormis pour le calcul du flux diffusif dans le cas de parois à température imposée ou à flux thermique imposé.

Flux diffusif pour l'énergie en paroi : l'utilisateur peut choisir (dans `uscfc1`) entre une température de paroi imposée et un flux thermique diffusif (ou "conductif") imposé. S'il ne précise rien, on considère que la paroi est adiabatique (flux thermique diffusif imposé et de valeur nulle). Dans tous les cas, il faut donc disposer d'un moyen d'imposer le flux diffusif souhaité. Pour cela, on détermine une valeur de bord pour l'énergie qui, introduite dans la formule donnant le flux discret, permettra d'obtenir la contribution attendue (voir le paragraphe E). Conformément à l'approche classique de *Code_Saturne*, cette valeur est stockée sous la forme d'un couple de coefficients (de type `COEFAF`, `COEFBF`). Il est important de souligner que cette valeur de bord ne doit être utilisée que pour le calcul du flux diffusif : dans les autres situations pour lesquelles une valeur de bord de l'énergie ou de la température est requise (calcul de gradient par exemple), on utilise une condition de flux nul (traitement standard des scalaires). Pour cela, on dispose d'une seconde valeur de bord qui est stockée au moyen d'un couple de coefficients (`COEFA`, `COEFB`) distinct du précédent.

Flux convectifs : le flux de masse dans la direction normale à la paroi est pris nul. De ce fait, les flux convectifs seront nuls quelle que soit les valeurs de bord imposées pour les différentes variables transportées.

Symétrie

Les conditions appliquées sont les conditions classiques de l'algorithme incompressible (vitesse normale nulle, flux nul pour les autres variables).

¹Le gradient de température est *a priori* inutile, mais peut être requis par l'utilisateur.

Elles sont imposées dans le sous-programme `typecl` essentiellement. Pour la pression, la condition de flux nul est imposée dans `cfxtcl` (au début des développements, on appliquait le même traitement qu'en paroi, mais une condition de flux nul a été préférée afin de s'affranchir des problèmes potentiels dans les configurations 2D).

Entrées et sorties

On obtient, par résolution d'un problème de Riemann au bord, complété par des relations de thermodynamique (`uscfth`), des valeurs de bord pour toutes les variables (on suppose qu'en entrée, toutes les composantes de la vitesse sont fournies ; elles sont supposées nulles par défaut, hormis pour les entrées à (ρ, \underline{u}) imposés, `IERUCF`, pour lesquelles il faut fournir la vitesse explicitement).

Ces valeurs de bord sont utilisées de deux façons :

- elles sont utilisées pour calculer les flux convectifs, en faisant appel au schéma de Rusanov (sauf en sortie supersonique) ; ces flux sont directement intégrés au second membre des équations à résoudre.
- elles servent de valeur de Dirichlet dans toutes les autres configurations pour lesquelles une valeur de bord est requise (calcul de flux diffusif, calcul de gradient...)

Deux cas particuliers :

- aux entrées ou sorties pour lesquelles toutes les variables sont imposées (`IESICF`), on utilise une condition de Neumann homogène pour la pression (hormis pour le calcul du gradient intervenant dans l'équation de la quantité de mouvement, qui est pris en compte par le flux convectif déterminé par le schéma de Rusanov). Ce choix est arbitraire (on n'a pas testé le comportement de l'algorithme si l'on conserve une condition de Dirichlet sur la pression), mais a été fait en supposant qu'une condition de Neumann homogène serait *a priori* moins déstabilisante, dans la mesure où, pour ce type de frontière, l'utilisateur peut imposer une valeur de pression très différente de celle régnant à l'intérieur du domaine (la valeur imposée est utilisée pour le flux convectif).
- pour les grandeurs turbulentes et les scalaires utilisateur, si le flux de masse est entrant et que l'on a fourni une valeur de Dirichlet (`RCODCL(*,*,1)` dans `uscfcl`), on l'utilise, pour le calcul du flux convectif et du flux diffusif ; sinon, on utilise une condition de Neumann homogène (le concept de sortie de type 9 ou 10 est couvert par cette approche).

Problème de Riemann au bord

Introduction

On cherche à obtenir un état au bord, pour les entrées, les sorties et les parois.

Pour cela, on fait abstraction des flux diffusifs et des sources. Le système résultant est alors appelé système d'équations d'Euler. On se place de plus dans un repère orienté suivant la normale au bord considéré $(\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{n})$ et l'on ne considère que les variations suivant cette normale. Le système devient donc :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n} \underline{F}_n(\underline{W}) = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{F}_n(\underline{W}) = \sum_{i=1}^3 n_i \underline{F}_i(\underline{W}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{V.E.3})$$

Pour déterminer les valeurs des variables au bord, on recherche l'évolution du problème instationnaire suivant, appelé problème de Riemann :

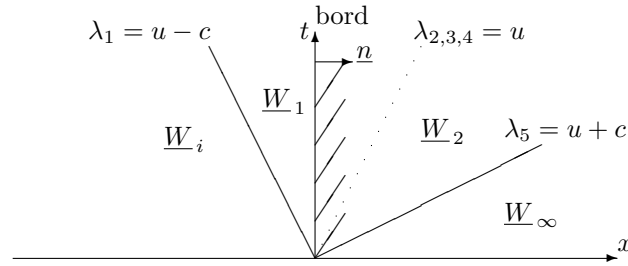


avec \underline{W}_∞ dépendant du type de bord et différent de \underline{W}_i *a priori*.

Pour résoudre ce problème de Riemann, on utilisera les variables non-conservatives $\widetilde{W} = {}^t(\rho, \underline{u}, P)$ et l'on retrouvera l'énergie grâce à l'équation d'état.

Pour alléger l'écriture, dans le présent paragraphe E, on notera aussi \underline{W} le vecteur ${}^t(\rho, \underline{u}, P)$ et $\underline{u} = \underline{u}_\tau + u \underline{n}$ (en posant $u = \underline{u} \cdot \underline{n}$ et $\underline{u}_\tau = \underline{u} - (u \cdot \underline{n})\underline{n}$).

La solution est une suite d'états constants, dont les valeurs dépendent de \underline{W}_i et \underline{W}_∞ , séparés par des ondes se déplaçant à des vitesses données par les valeurs propres du système $(\lambda_i)_{i=1\dots 5}$. On représente les caractéristiques du système sur le schéma suivant :



Comme valeurs des variables au bord, on prendra les valeurs correspondant à l'état constant qui contient le bord (\underline{W}_1 dans l'exemple précédent).

Il faut remarquer que la solution du problème de Riemann dépend de la thermodynamique et devra donc être calculée et codée par l'utilisateur si la thermodynamique n'a pas été prévue (en version 1.2, la seule thermodynamique prévue est celle des gaz parfaits).

En paroi, pour la condition de pression (sans effet de gravité)

Pour les faces de paroi, on définit à l'extérieur du domaine un état miroir \underline{W}_∞ par :

$$\underline{W}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \underline{u}_{\tau i} \\ u_i \\ P_i \end{pmatrix} \quad \underline{W}_\infty = \begin{pmatrix} \rho_\infty = \rho_i \\ \underline{u}_{\tau \infty} = \underline{u}_{\tau i} \\ u_\infty = -u_i \\ P_\infty = P_i \end{pmatrix} \quad (\text{V.E.4})$$

Les solutions dépendent de l'orientation de la vitesse dans la cellule de bord :

1. Si $u_i \leq 0$, la solution est une double détente symétrique.



La conservation de la vitesse tangentielle à travers la 1-onde donne $\underline{u}_{\tau p} = \underline{u}_{\tau i}$. Par des considérations de symétrie on trouve $u_p = 0$. Puis on obtient ρ_p et P_p en écrivant la conservation des invariants de Riemann à travers la 1-détente :

$$\begin{cases} u_1 + \int_0^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho = u_i + \int_0^{\rho_i} \frac{c}{\rho} d\rho \\ s_1 = s_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\rho_i}^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho = u_i & \Rightarrow \rho_p = \rho_1 \\ s(P_1, \rho_1) = s(P_i, \rho_i) & \Rightarrow P_p = P_1 \end{cases} \quad (\text{V.E.5})$$

2. Si $u_i > 0$, la solution est un double choc symétrique.



De même que précédemment, on trouve $\underline{u}_{\tau p} = \underline{u}_{\tau i}$ et $u_p = 0$, puis ρ_p et P_p en écrivant les relations de saut à travers le 1-choc :

$$\begin{cases} \rho_1 \rho_i (u_1 - u_i)^2 = (P_1 - P_i)(\rho_1 - \rho_i) \\ 2\rho_1 \rho_i (\varepsilon_1 - \varepsilon_i) = (P_1 + P_i)(\rho_1 - \rho_i) \end{cases} \text{ avec } \varepsilon = \varepsilon(P, \rho) \Rightarrow \begin{cases} \rho_p = \rho_1 \\ P_p = P_1 \end{cases} \quad (\text{V.E.6})$$

Pour les gaz parfaits, avec $M_i = \frac{u_i \cdot n}{c_i}$ (Nombre de Mach de paroi), on a :

- Cas détente ($M_i \leq 0$) :

$$\begin{cases} P_p = 0 & \text{si } 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i < 0 \\ P_p = P_i \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho_p = \rho_i \left(\frac{P_p}{P_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

- Cas choc ($M_i > 0$) :

$$P_p = P_i \left(1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_i^2 + \gamma M_i \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16} M_i^2} \right)$$

$$\rho_p = \rho_i \left(\frac{P_p - P_i}{P_p - P_i - \rho_i (\underline{u}_i \cdot \underline{n})^2} \right)$$

En pratique, le flux convectif normal à la paroi est nul et seule la condition de pression déterminée ci-dessus est effectivement utilisée (pour le calcul du gradient sans effet de gravité).

En sortie

Il existe deux cas de traitement des conditions en sortie, selon le nombre de Mach normal à la face de bord (c_i est la vitesse du son dans la cellule de bord) :

$$M_i = \frac{u_i}{c_i} = \frac{\underline{u}_i \cdot \underline{n}}{c_i}$$

Sortie supersonique (condition ISSPCF de uscfcl) : $M_i \geq 1 \Rightarrow u_i - c_i \geq 0$



Toutes les caractéristiques sont sortantes, on connaît donc toutes les conditions au bord :

$$\begin{cases} \rho_b = \rho_i \\ \underline{u}_{\tau b} = \underline{u}_{\tau i} \\ u_b = u_i \\ P_b = P_i \end{cases} \quad (\text{V.E.7})$$

Sortie subsonique (condition ISOPCF de uscfcl) : $0 \leq M_i < 1 \Rightarrow (u_i \geq 0 \text{ et } u_i - c_i < 0)$



On a une caractéristique entrante, on doit donc imposer une seule condition au bord (en général la pression de sortie P_{ext}).

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 342/400
---------	--	---

On connaît alors $P_b = P_{ext}$ et $\underline{u}_{\tau b} = \underline{u}_{\tau i}$ (par conservation de la vitesse tangentielle à travers la 1-onde). Pour trouver les inconnues manquantes (ρ_b et u_b) on doit résoudre le passage de la 1-onde :

1. Si $P_{ext} \leq P_i$, on a une 1-détente.

On écrit la conservation des invariants de Riemann à travers la 1-détente :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = s_i \\ u_1 + \int_0^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho = u_i + \int_0^{\rho_i} \frac{c}{\rho} d\rho \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s(P_{ext}, \rho_1) = s(P_i, \rho_i) \Rightarrow \rho_b = \rho_1 \\ u_1 = u_i - \int_{\rho_i}^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho \Rightarrow u_b = u_1 \end{array} \right. \quad (\text{V.E.8})$$

2. Si $P_{ext} > P_i$, on a un 1-choc.

On écrit les relations de saut à travers le 1-choc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \rho_i (u_1 - u_i)^2 = (P_{ext} - P_i)(\rho_1 - \rho_i) \\ 2\rho_1 \rho_i (\varepsilon(P_{ext}, \rho_1) - \varepsilon(P_i, \rho_i)) = (P_{ext} + P_i)(\rho_1 - \rho_i) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_b = \rho_1 \\ u_b = u_1 \end{array} \right. \quad (\text{V.E.9})$$

Pour les gaz parfaits, on a :

- Cas détente ($P_{ext} \leq P_i$) :

$$P_b = P_{ext}$$

$$\rho_b = \rho_i \left(\frac{P_{ext}}{P_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

- Cas choc ($P_{ext} > P_i$) :

$$P_b = P_{ext}$$

$$\rho_b = \rho_i \left(\frac{P_{ext} - P_i}{P_{ext} - P_i - \rho_i (\underline{u}_i \cdot \underline{n} - \underline{u}_b \cdot \underline{n})^2} \right) = \rho_i \left(\frac{(\gamma + 1)P_{ext} + (\gamma - 1)P_i}{(\gamma - 1)P_{ext} + (\gamma + 1)P_i} \right)$$

La valeur de la masse volumique au bord intervient en particulier dans le flux de masse.

En entrée

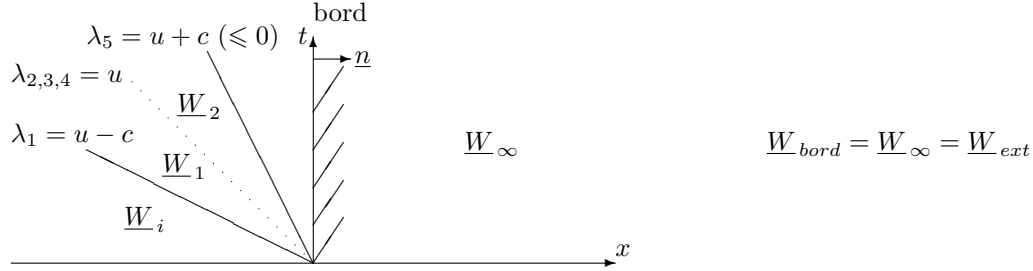
L'utilisateur impose les valeurs qu'il souhaite pour les variables en entrée :

$$\underline{W}_{ext} = \begin{pmatrix} \rho_{ext} \\ \underline{u}_{\tau ext} \\ u_{ext} \\ P_{ext} \end{pmatrix}$$

De même que précédemment, il existe deux cas de traitement des conditions en entrée, pilotés par le nombre de Mach entrant, normalement à la face de bord (avec c_{ext} la vitesse du son en entrée) :

$$M_{ext} = \frac{u_{ext}}{c_{ext}} = \frac{\underline{u}_{ext} \cdot \underline{n}}{c_{ext}}$$

Entrée supersonique (condition IESICF de uscfcl) : $M_{ext} \leq -1 \Rightarrow u_{ext} + c_{ext} \leq 0$

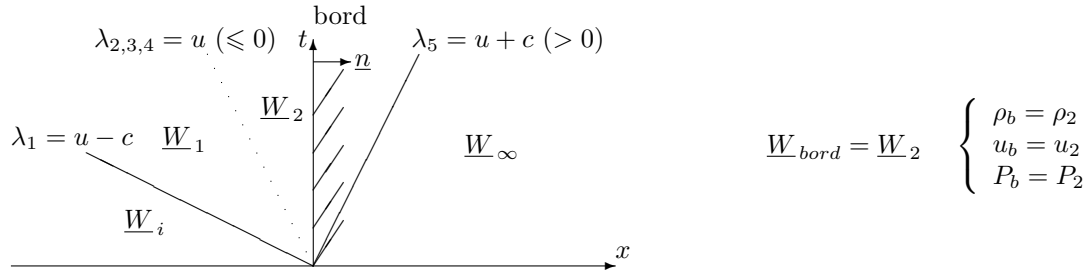


Toutes les caractéristiques sont entrantes, toutes les conditions au bord sont donc imposées par l'utilisateur.

$$\begin{cases} \rho_b = \rho_{ext} \\ \underline{u}_{\tau b} = \underline{u}_{\tau ext} \\ u_b = u_{ext} \\ P_b = P_{ext} \end{cases} \quad (\text{V.E.10})$$

Entrée subsonique (condition IERUCF de uscfcl) :

$$-1 < M_{ext} \leq 0 \Rightarrow (u_{ext} \leq 0 \text{ et } u_{ext} + c_{ext} > 0)$$



On a une caractéristique sortante. L'utilisateur doit donc laisser un degré de liberté.

En général, on impose le flux de masse en entrée, donc ρ_{ext} et u_{ext} , et l'on calcule la pression au bord en résolvant le passage des 1~4-ondes. On connaît aussi $\underline{u}_{\tau b} = \underline{u}_{\tau ext}$, par conservation de la vitesse tangentielle à travers la 5-onde.

1. Si $u_{ext} \geq u_i$, on a une 1-détente.

On écrit la conservation des invariants de Riemann à travers la 1-détente et la conservation de la vitesse et de la pression à travers le contact :

$$\begin{cases} u_1 + \int_0^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho = u_i + \int_0^{\rho_i} \frac{c}{\rho} d\rho \\ s_1 = s_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\rho_i}^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho = u_i - u_{ext} \Rightarrow \rho_1 \\ s(P_2, \rho_1) = s(P_i, \rho_i) \Rightarrow P_b = P_2 \end{cases} \quad (\text{V.E.11})$$

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_{ext} \\ P_1 = P_2 \end{cases}$$

2. Si $u_{ext} < u_i$, on a un 1-choc.

On écrit les relations de saut à travers le 1-choc et la conservation de la vitesse et de la pression à travers le contact :

$$\begin{cases} \rho_1 \rho_i (u_1 - u_i)^2 = (P_1 - P_i)(\rho_1 - \rho_i) \\ 2\rho_1 \rho_i (\varepsilon_1 - \varepsilon_i) = (P_1 + P_i)(\rho_1 - \rho_i) \\ \varepsilon = \varepsilon(P, \rho) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 \\ P_b = P_2 \end{cases} \quad (\text{V.E.12})$$

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_{ext} \\ P_1 = P_2 \end{cases}$$

Pour les gaz parfaits, on a :

- Cas détente ($\delta M \leq 0$) :

$$\begin{cases} P_b = 0 & \text{si } 1 + \frac{\gamma-1}{2}\delta M < 0 \\ P_b = P_i \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\delta M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho_b = \rho_{ext}$$

- Cas choc ($\delta M > 0$) :

$$P_b = P_i \left(1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\delta M^2 + \gamma\delta M \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\delta M^2}\right)$$

$$\rho_b = \rho_{ext}$$

Condition de pression en paroi avec effets de gravité

Le problème de Riemann considéré précédemment ne prend pas en compte les effets de la gravité. Or, dans certains cas, si l'on ne prend pas en compte le gradient de pression "hydrostatique", on peut obtenir une solution erronée (en particulier, par exemple, on peut créer une source de quantité de mouvement non physique dans un milieu initialement au repos).

Écrivons l'équilibre local dans la maille de bord :

$$\underline{\nabla} P = \rho \underline{g} \quad (\text{V.E.13})$$

Pour simplifier la résolution, on peut utiliser la formulation de (V.E.13) en incompressible (c'est cette approche qui a été adoptée dans *Code_Saturne*) :

$$(\underline{\nabla} P)_i = \rho_i \underline{g} \quad \text{ce qui donne} \quad P_{paroi} = P_i + \rho_i \underline{g} \cdot (\underline{x}_{paroi} - \underline{x}_i) \quad (\text{V.E.14})$$

Une autre approche (dépendante de l'équation d'état) consiste à résoudre l'équilibre local avec la formulation compressible (V.E.13), en supposant de plus que la maille est isentropique :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} P = \rho \underline{g} \\ P = P(\rho, s_i) \end{cases} \quad (\text{V.E.15})$$

Ce qui donne, pour un gaz parfait :

$$P_{paroi} = P_i \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_i}{P_i} \underline{g} \cdot (\underline{x}_{paroi} - \underline{x}_i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{V.E.16})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 345/400
---------	--	---

Remarque : la formule issue de l'incompressible (V.E.14) est une linéarisation de la formule (V.E.16). Dans les cas courants elle s'éloigne très peu de la formule exacte. Dans des conditions extrêmes, si l'on considère par exemple de l'air à 1000K et 10bar, avec une accélération de la pesanteur $g = 1000m/s^2$ et une différence de hauteur entre le centre de la cellule et le centre de la face de bord de 10m, l'expression (V.E.16) donne $P_{paroi} = 1034640,4Pa$ et l'expression (V.E.14) donne $P_{paroi} = 1034644,7Pa$, soit une différence relative de moins de 0,001%. On voit aussi que la différence entre la pression calculée au centre de la cellule et celle calculée au bord est de l'ordre de 3%.

Schéma de Rusanov pour le calcul de flux convectifs au bord

Introduction

Le schéma de Rusanov est utilisé pour certains types de conditions aux limites afin de passer du vecteur d'état calculé au bord comme indiqué précédemment (solution du problème de Riemann) à un flux convectif de bord (pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie). L'utilisation de ce schéma (décentré amont) permet de gagner en stabilité.

Le schéma de Rusanov est appliqué aux frontières auxquelles on considère qu'il est le plus probable de rencontrer des conditions en accord imparfait avec l'état régnant dans le domaine, conditions qui sont donc susceptibles de déstabiliser le calcul : il s'agit des entrées et des sorties (frontières de type IESICF, ISOPCF, IERUCF, IEQHCF). En sortie supersonique (ISSPCF) cependant, le schéma de Rusanov est inutile et n'est donc pas appliqué : en effet, pour ce type de frontière, l'état imposé au bord est exactement l'état amont et le décentrement du schéma de Rusanov n'apporterait donc rien.

Principe

Pour le calcul du flux décentré de Rusanov, on considère le système hyperbolique constitué des seuls termes convectifs issus des équations de masse, quantité de mouvement et énergie. Ce système est écrit, par changement de variable, en non conservatif (on utilise la relation $P = \frac{\rho\varepsilon}{\gamma - 1}$ et on note u_ξ les composantes de \underline{u}) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{u} + \underline{u} \nabla \rho & = 0 \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial t} + \underline{u} \nabla u_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} & = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma P \operatorname{div} \underline{u} + \underline{u} \nabla P & = 0 \end{cases} \quad (\text{V.E.17})$$

En notant le vecteur d'état $\underline{W} = (\rho, \underline{u}, P)^t$, ce système est noté :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{F}(\underline{W}) = 0 \quad (\text{V.E.18})$$

Avec $\delta \underline{W}$ l'incrément temporel du vecteur d'état, \underline{n} la normale à une face, ij la face interne partagée par les cellules i et j et ik la face de bord k associée à la cellule i , la discrétisation spatiale conduit à :

$$\frac{|\Omega_i|}{\Delta t} \delta \underline{W}_i + \sum_{j \in \text{Vis}(i)} \int_{S_{ij}} \underline{F}(\underline{W}) \underline{n} dS + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \int_{S_{b_{ik}}} \underline{F}(\underline{W}) \underline{n} dS = 0 \quad (\text{V.E.19})$$

Sur une face de bord donnée, on applique le schéma de Rusanov pour calculer le flux comme suit :

$$\frac{1}{|S_{b_{ik}}|} \int_{S_{b_{ik}}} \underline{F}(\underline{W}) \underline{n} dS = \frac{1}{2} (\underline{F}(\underline{W}_i) + \underline{F}(\underline{W}_{b_{ik}})) \cdot \underline{n}_{b_{ik}} - \frac{1}{2} \rho_{rus\ b_{ik}} (\underline{W}_{b_{ik}} - \underline{W}_i) = \underline{F}_{rus\ b_{ik}}(\underline{W}) \quad (\text{V.E.20})$$

Dans cette relation, $\underline{W}_{b_{ik}}$ est le vecteur d'état \underline{W}_∞ , connu au bord (tel qu'il résulte de la résolution du problème de Riemann au bord présentée plus haut pour chaque type de frontière considéré).

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 346/400
---------	--	---

Paramètre de décentrement $\rho_{rus b_{ik}}$

Pour chaque face de bord, le scalaire $\rho_{rus b_{ik}}$ est la plus grande valeur du rayon spectral de la matrice jacobienne $\frac{\partial \underline{F}_n(\underline{W})}{\partial \underline{W}}$ obtenu pour les vecteurs d'état \underline{W}_i et $\underline{W}_{b_{ik}}$.

\underline{F}_n est la composante du flux \underline{F} dans la direction de la normale à la face de bord, $\underline{n}_{b_{ik}}$. Utiliser \underline{F}_n pour la détermination du paramètre de décentrement $\rho_{rus b_{ik}}$ relève d'une approche classique qui consiste à remplacer le système tridimensionnel initial par le système unidimensionnel projeté dans la direction normale à la face, en négligeant les variations du vecteur d'état \underline{W} dans la direction tangente à la face :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}_n(\underline{W})}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial n} = 0 \quad (\text{V.E.21})$$

De manière plus explicite, si l'on se place dans un repère de calcul ayant $\underline{n}_{b_{ik}}$ comme vecteur de base, et si l'on note u la composante de vitesse associée, le système est le suivant (les équations portant sur les composantes transverses de la vitesse sont découplées, associées à la valeur propre u , comme le serait un scalaire simplement convecté et ne sont pas écrites ci-après) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma P \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.E.22})$$

La matrice jacobienne associée est donc :

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & \gamma P & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.E.23})$$

Les valeurs propres sont u et $u \pm c$ (avec $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$). Le rayon spectral est donc $|u| + c$ et le paramètre de décentrement s'en déduit :

$$\rho_{rus b_{ik}} = \max(|u_i| + c_i, |u_{b_{ik}}| + c_{b_{ik}}) \quad (\text{V.E.24})$$

Expression des flux convectifs

Les flux convectifs calculés par le schéma de Rusanov pour les variables masse, quantité de mouvement et énergie représentent donc la discrétisation des termes suivants :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{Q}) \\ \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \underline{\nabla} P \\ \text{div}\left(\underline{Q}\left(e + \frac{P}{\rho}\right)\right) \end{cases} \quad (\text{V.E.25})$$

Pour une face de bord ik adjacente à la cellule i et avec la valeur précédente de $\rho_{rus\,b_{ik}}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \int_{S_{b_{ik}}} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS & = & \frac{1}{2} \left((\underline{Q}_i + \underline{Q}_{b_{ik}}) \cdot \underline{n}_{b_{ik}} \right) S_{b_{ik}} \\ & & - \frac{1}{2} \rho_{rus\,b_{ik}} (\rho_{b_{ik}} - \rho_i) S_{b_{ik}} \\ \int_{S_{b_{ik}}} (\underline{u} \otimes \underline{Q} + \underline{\nabla} P) \cdot \underline{n} dS & = & \frac{1}{2} \left(\underline{u}_i (\underline{Q}_i \cdot \underline{n}_{b_{ik}}) + P_i \underline{n}_{b_{ik}} + \underline{u}_{b_{ik}} (\underline{Q}_{b_{ik}} \cdot \underline{n}_{b_{ik}}) + P_{b_{ik}} \underline{n}_{b_{ik}} \right) S_{b_{ik}} \\ & & - \frac{1}{2} \rho_{rus\,b_{ik}} (\underline{Q}_{b_{ik}} - \underline{Q}_i) S_{b_{ik}} \\ \int_{S_{b_{ik}}} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \underline{Q} \cdot \underline{n} dS & = & \frac{1}{2} \left(\left(e_i + \frac{P_i}{\rho_i} \right) (\underline{Q}_i \cdot \underline{n}_{b_{ik}}) + \left(e_{b_{ik}} + \frac{P_{b_{ik}}}{\rho_{b_{ik}}} \right) (\underline{Q}_{b_{ik}} \cdot \underline{n}_{b_{ik}}) \right) S_{b_{ik}} \\ & & - \frac{1}{2} \rho_{rus\,b_{ik}} (\rho_{b_{ik}} e_{b_{ik}} - \rho_i e_i) S_{b_{ik}} \end{array} \right. \quad (\text{V.E.26})$$

Conditions aux limites pour le flux diffusif d'énergie

Rappel

Pour le flux de diffusion d'énergie, les conditions aux limites sont imposées de manière similaire à ce qui est décrit dans la documentation de `clptur` et de `condli`. La figure (V.E.1) rappelle quelques notations usuelles et l'équation (V.E.27) traduit la conservation du flux normal au bord pour la variable f .

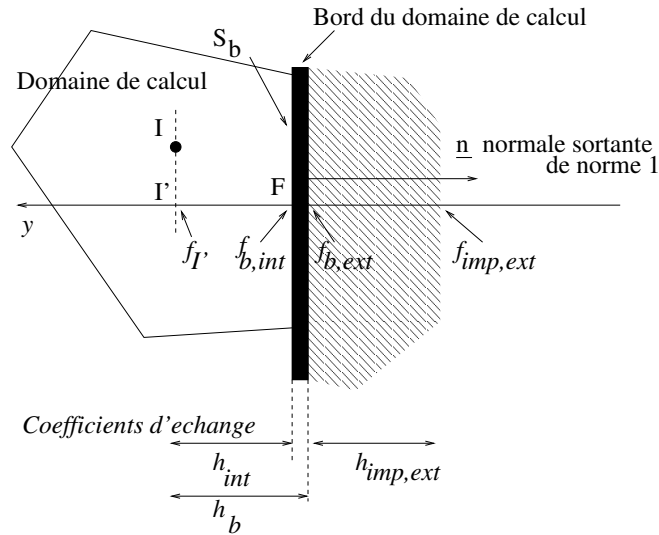


Figure V.E.1: Cellule de bord.

$$\underbrace{h_{int}(f_{b,int} - f_{I'})}_{\phi_{int}} = \underbrace{h_b(f_{b,ext} - f_{I'})}_{\phi_b} = \begin{cases} \underbrace{h_{imp,ext}(f_{imp,ext} - f_{b,ext})}_{\phi_{\text{réel imposé}}} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{\text{réel imposé}}} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (\text{V.E.27})$$

L'équation (V.E.28) rappelle la formulation des conditions aux limites pour une variable f .

$$f_{b,int} = \begin{cases} \frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{imp,ext} + \frac{h_{int} + h_{imp,ext}(h_r - 1)}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{I'} & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \frac{1}{h_{int}} \phi_{imp,ext} + f_{I'} & \text{(condition de Neumann)} \end{cases} \quad (\text{V.E.28})$$

Les coefficients d'échange sont définis comme suit² :

$$\begin{cases} h_{int} = \frac{\alpha}{\overline{I'F}} \\ h_r = \frac{h_{int}}{h_b} \\ h_b = \frac{\phi_b}{f_{b,ext} - f_{I'}} = \frac{\rho C u_k}{f_{I'}^+} \end{cases} \quad (\text{V.E.29})$$

Dans *Code_Saturne*, on note les conditions aux limites de manière générale sous la forme suivante :

$$f_{b,int} = A_b + B_b f_{I'} \quad (\text{V.E.30})$$

avec A_b et B_b définis selon le type des conditions :

$$\text{Dirichlet} \begin{cases} A_b = \frac{h_{imp,ext}}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} f_{imp,ext} \\ B_b = \frac{h_{int} + h_{imp,ext}(h_r - 1)}{h_{int} + h_r h_{imp,ext}} \end{cases} \quad \text{Neumann} \begin{cases} A_b = \frac{1}{h_{int}} \phi_{imp,ext} \\ B_b = 1 \end{cases} \quad (\text{V.E.31})$$

Flux diffusif d'énergie

Dans le module compressible, on résout une équation sur l'énergie, qui s'écrit, si l'on excepte tous les termes hormis le flux de diffusion et le terme instationnaire, pour faciliter la présentation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} &= -\text{div } \underline{\Phi}_s \\ &= \text{div} (K \underline{\nabla} T) \quad \text{avec} \quad K = \lambda + C_p \frac{\mu t}{\sigma_t} \\ &= \text{div} \left(K \underline{\nabla} \frac{e - \frac{1}{2} u^2 - \varepsilon_{sup}}{C_v} \right) \\ &= \text{div} \left(\frac{K}{C_v} \underline{\nabla} (e - \frac{1}{2} u^2 - \varepsilon_{sup}) \right) \quad \text{si } C_v \text{ est constant} \\ &= \text{div} \left(\frac{K}{C_v} \underline{\nabla} e \right) - \text{div} \left(\frac{K}{C_v} \underline{\nabla} (\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup}) \right) \end{aligned} \quad (\text{V.E.32})$$

La décomposition en e et $\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup}$ est purement mathématique (elle résulte du fait que l'on résout en énergie alors que le flux thermique s'exprime en fonction de la température). Aussi, pour imposer un flux de bord ou une température de bord (ce qui revient au même puisque l'on impose toujours finalement la conservation du flux normal), on *choisit* de reporter la totalité de la condition à la limite sur le terme $\frac{K}{C_v} \underline{\nabla} e$ et donc d'annuler le flux associé au terme $\frac{K}{C_v} \underline{\nabla} (\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_{sup})$ (en pratique, pour l'annuler, on se contente de ne pas l'ajouter au second membre de l'équation). Conformément à l'approche retenue dans *Code_Saturne* et rappelée précédemment, on déterminera donc une valeur

²On rappelle que, comme dans *condli*, α désigne $\lambda + C_p \frac{\mu t}{\sigma_t}$ si f est la température, $\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu t}{\sigma_t}$ si f représente l'enthalpie. Le coefficient C représente C_p pour la température et vaut 1 pour l'enthalpie. La grandeur adimensionnelle f^+ est obtenue par application d'un principe de similitude en paroi : pour la température, elle dépend du nombre de Prandtl moléculaire, du nombre de Prandtl turbulent et de la distance adimensionnelle à la paroi y^+ dans la cellule de bord.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 349/400
---------	--	---

de bord *fictive* de l'énergie qui permette de reconstruire le flux diffusif total attendu à partir de la discrétisation du seul terme $\frac{K}{C_v} \nabla e$.

Remarque : dans la version 1.2.0, on utilise $\frac{K}{C_v} = \left(\frac{\lambda}{C_v} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right)$, à partir de 1.2.1, on utilise la valeur $\frac{K}{C_v} = \left(\frac{\lambda}{C_v} + \frac{C_p \mu_t}{C_v \sigma_t} \right)$. On notera que le nombre de Prandtl turbulent σ_t est associé à la variable résolue et peut être fixé par l'utilisateur.

Condition de Neumann

La conservation du flux s'écrit :

$$\underbrace{h_{int}(e_{b,int} - e_{I'})}_{\phi_{int}} = \underbrace{\phi_{imp,ext}}_{\phi_{réel imposé}} \quad (\text{V.E.33})$$

On a donc dans ce cas :

$$\begin{cases} A_b &= \frac{1}{h_{int}} \phi_{imp,ext} \\ B_b &= 1 \end{cases} \quad (\text{V.E.34})$$

Condition de Dirichlet

On suppose que la condition de Dirichlet porte sur la température $T_{b,ext}$.

La conservation du flux s'écrit :

$$\underbrace{h_{int}(e_{b,int} - e_{I'})}_{\phi_{int} \text{ (forme numérique du flux)}} = \underbrace{h_b(T_{b,ext} - T_{I'})}_{\phi_b \text{ qui intègre l'effet de couche limite}} = \underbrace{h'_{imp,ext}(T_{imp,ext} - T_{b,ext})}_{\phi_{réel imposé}} \quad (\text{V.E.35})$$

Avec pour les coefficients d'échange :

$$\begin{cases} h_{int} &= \frac{K}{C_v \overline{I'F}} \\ h_b &= \frac{\phi_b}{T_{b,ext} - T_{I'}} = \frac{\rho C_p u_k}{T_{I'}^+} \end{cases} \quad (\text{V.E.36})$$

On tire $T_{b,ext}$ de la seconde partie de l'égalité (V.E.35) traduisant la conservation du flux :

$$T_{b,ext} = \frac{h'_{imp,ext} T_{imp,ext} + h_b T_{I'}}{h_b + h'_{imp,ext}} \quad (\text{V.E.37})$$

En utilisant cette valeur et la première partie de l'équation de conservation du flux (V.E.35), on obtient :

$$e_{b,int} = \frac{h_b h'_{imp,ext}}{h_{int} (h_b + h'_{imp,ext})} (T_{imp,ext} - T_{I'}) + e_{I'} \quad (\text{V.E.38})$$

On utilise alors $T_{I'} = \frac{1}{C_v} \left(e_{I'} - \frac{1}{2} u_i^2 - \varepsilon_{sup,i} \right)$ pour écrire (sans reconstruction pour la vitesse et ε_{sup}) :

$$e_{b,int} = \frac{-\frac{h_b h'_{imp,ext}}{C_v} + h_{int} (h_b + h'_{imp,ext})}{h_{int} (h_b + h'_{imp,ext})} e_{I'} + \frac{h_b h'_{imp,ext}}{h_{int} (h_b + h'_{imp,ext})} \left(T_{imp,ext} + \frac{\frac{1}{2} u_i^2 + \varepsilon_{sup,i}}{C_v} \right) \quad (\text{V.E.39})$$

Et on a donc, avec $h'_r = \frac{h_{int}}{\frac{h_b}{C_v}}$:

$$e_{b,int} = \underbrace{\frac{h'_{imp,ext}}{C_v h_{int} + h'_r h'_{imp,ext}} \left(C_v T_{imp,ext} + \frac{1}{2} u_i^2 + \varepsilon_{sup,i} \right)}_{A_b} + \underbrace{\frac{C_v h_{int} + h'_{imp,ext}(h'_r - 1)}{C_v h_{int} + h'_r h'_{imp,ext}}}_{B_b} e_I \quad (V.E.40)$$

Avec ces notations, h_b est le coefficient habituellement calculé pour la température.

Le coefficient $h'_{imp,ext}$ est le coefficient d'échange externe qui est imposé pour la température³. Pour obtenir l'équivalent dimensionnel de $h'_{imp,ext}$ pour l'énergie, il faut diviser sa valeur par C_v (ce qui ne fait pas de différence dans la majorité des cas, car il est habituellement pris infini).

Mise en œuvre

Introduction

Les conditions aux limites sont imposées par une suite de sous-programmes, dans la mesure où l'on a cherché à rester cohérent avec la structure standard de *Code_Saturne*.

Dans `ppprcl` (appelé par `precli`), on initialise les tableaux avant le calcul des conditions aux limites :

- `IZFPPP` (numéro de zone, inutilisé, fixé à zéro),
- `IA(IIFBRU)` (repérage des faces de bord pour lesquelles on applique un schéma de Rusanov : initialisé à zéro, on imposera la valeur 1 dans `cfrusb` pour les faces auxquelles on applique le schéma de Rusanov)
- `IA(IIFBET)` (repérage des faces de paroi à température ou à flux thermique imposé : initialisé à 0, on imposera la valeur 1 dans `cfxtcl` lorsque la température ou le flux est imposé),
- `RCODCL(*,*,1)` (initialisé à `-RINFIN` en prévision du traitement des sorties réentrantes pour lesquelles l'utilisateur aurait fourni une valeur à imposer en Dirichlet),
- flux convectifs de bord pour la quantité de mouvement et l'énergie (initialisés à zéro).

Les types de frontière (`ITYPFB`) et les valeurs nécessaires (`ICODCL`, `RCODCL`) sont imposés par l'utilisateur dans `uscfcl`.

On convertit ensuite ces données dans `condli` pour qu'elles soient directement utilisables lors du calcul des matrices et des seconds membres.

Pour cela, `cfxtcl` permet de réaliser le calcul des valeurs de bord et, pour certaines frontières, des flux convectifs. On fait appel, en particulier, à `uscfth` (utilisation de la thermodynamique) et à `cfrusb` (flux convectifs par le schéma de Rusanov). Lors de ces calculs, on utilise `COEFA` et `COEFB` comme tableaux de travail (transmission de valeurs à `uscfth` en particulier) afin de renseigner `ICODCL` et `RCODCL`. Après `cfxtcl`, le sous-programme `typecl` complète quelques valeurs par défaut de `ICODCL` et de `RCODCL`, en particulier pour les scalaires passifs.

Après `cfxtcl` et `typecl`, les tableaux `ICODCL` et `RCODCL` sont complets. Ils sont utilisés dans la suite de `condli` et en particulier dans `clptur` pour construire les tableaux `COEFA` et `COEFB` (pour l'énergie, on dispose de deux couples (`COEFA`, `COEFB`) afin de traiter les parois).

³Le coefficient $h'_{imp,ext}$ est utile pour les cas où l'on souhaite relaxer la condition à la limite : pour la température, cela correspond à imposer une valeur sur la face externe d'une paroi unidimensionnelle idéale, sans inertie, caractérisée par un simple coefficient d'échange.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 351/400
---------	--	---

On présente ci-après les points dont l’implantation diffère de l’approche standard. Il s’agit de l’utilisation d’un schéma de Rusanov pour le calcul des flux convectifs en entrée et sortie (hormis sortie supersonique) et du mode de calcul des flux diffusifs d’énergie en paroi. On insiste en particulier sur l’impact des conditions aux limites sur la construction des seconds membres de l’équation de la quantité de mouvement et de l’équation de l’énergie (`cfqdmv` et `cfener`).

Flux de Rusanov pour le calcul des flux convectifs en entrée et sortie

Le schéma de Rusanov est utilisé pour calculer des flux convectifs de bord (masse, quantité de mouvement et énergie) aux entrées et des sorties de type IESICF, ISOPCF, IERUCF, IEQHCF.

La gestion des conditions aux limites est différente de celle adoptée classiquement dans *Code_Saturne*, bien que l’on se soit efforcé de s’y conformer le mieux possible.

En volumes finis, il faut disposer de conditions aux limites pour trois utilisations principales au moins :

- imposer les flux de convection,
- imposer les flux de diffusion,
- calculer les gradients pour les reconstructions.

Dans l’approche standard de *Code_Saturne*, les conditions aux limites sont définies par variable et non pas par terme discret⁴. On dispose donc, *pour chaque variable*, d’une valeur de bord dont devront être déduits les flux de convection, les flux de diffusion et les gradients⁵. Ici, avec l’utilisation d’un schéma de Rusanov, dans lequel le flux convectif est traité dans son ensemble, il est impératif de disposer d’un moyen d’imposer directement sa valeur au bord⁶.

Le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov sera ajouté directement au second membre des équations de masse, de quantité de mouvement et d’énergie. Comme ce flux contient, outre la contribution des termes convectifs “usuels” ($\text{div}(\underline{Q})$, $\text{div}(\underline{u} \otimes \underline{Q})$ et $\text{div}(\underline{Q}e)$), celle des termes en $\underline{\nabla} P$ (quantité de mouvement) et $\text{div}(\underline{Q} \frac{P}{\rho})$ (énergie), il faut veiller à ne pas ajouter une seconde fois les termes de bord issus de $\underline{\nabla} P$ et de $\text{div}(\underline{Q} \frac{P}{\rho})$ au second membre des équations de quantité de mouvement et d’énergie.

Pour la masse, le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov définit simplement le flux de masse au bord (`PROPFB(IFAC,IPPROB(IFLUMA(ISCA(IENERG))))`).

Pour la quantité de mouvement, le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov est stocké dans les tableaux `PROPFB(IFAC,IPPROB(IFBRHU))`, `PROPFB(IFAC,IPPROB(IFBRHV))` et `PROPFB(IFAC,IPPROB(IFBRHW))`. Il est ensuite ajouté au second membre de l’équation directement dans `cfqdmv` (boucle sur les faces de bord). Comme ce flux contient la contribution du terme convectif usuel $\text{div}(\underline{u} \otimes \underline{Q})$, il ne faut pas l’ajouter dans le sous-programme `cfbsc2`. De plus, le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov contient la contribution du gradient de pression. Or, le gradient de pression est calculé dans `cfqdmv` au moyen de `grdcel` et ajouté au second membre sous forme de contribution volumique (par cellule) : il faut donc retirer la contribution des faces de bord auxquelles est appliqué le schéma de Rusanov, pour ne pas la compter deux fois (cette opération est réalisée dans `cfqdmv`).

Pour l’énergie, le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov est stocké dans le tableau `PROPFB(IFAC,IPPROB(IFBENE))`. Pour les faces auxquelles n’est pas appliqué le schéma de Rusanov, on ajoute la contribution du terme

⁴Par exemple, pour un scalaire convecté et diffusé, on définit une valeur de bord unique *pour le scalaire* et non pas une valeur de bord pour le *flux convectif* et une valeur de bord pour le *flux diffusif*.

⁵Néanmoins, pour certaines variables comme la vitesse par exemple, *Code_Saturne* dispose de deux valeurs de bord (et non pas d’une seule) afin de pouvoir imposer de manière indépendante le gradient normal et le flux de diffusion.

⁶Il serait possible de calculer une valeur de bord fictive des variables d’état qui permette de retrouver le flux convectif calculé par le schéma de Rusanov, mais cette valeur ne permettrait pas d’obtenir un flux de diffusion et un gradient satisfaisants.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 352/400
---------	--	---

de transport de pression $\text{div}(\underline{Q} \frac{P}{\rho})$ au second membre de l'équation dans **cfener** et on complète le second membre dans **cfbsc2** avec la contribution du terme convectif usuel $\text{div}(\underline{Q} e)$. Pour les faces auxquelles est appliqué le schéma de Rusanov, on ajoute directement le flux de Rusanov au second membre de l'équation dans **cfener**, en lieu et place de la contribution du terme de transport de pression et l'on prend garde de ne pas comptabiliser une seconde fois le flux convectif usuel $\text{div}(\underline{Q} e)$ dans le sous-programme **cfbsc2**.

C'est l'indicateur **IA(IIFBRU)** (renseigné dans **cfrusb**) qui permet, dans **cfbsc2**, **cfqdmv** et **cfener**, de repérer les faces de bord pour lesquelles on a calculé un flux convectif avec le schéma de Rusanov.

Flux diffusif d'énergie

Introduction

Une condition doit être fournie sur toutes les frontières pour le calcul du flux diffusif d'énergie.

Il n'y a pas lieu de s'étendre particulièrement sur le traitement de certaines frontières. Ainsi, aux entrées et sorties, on dispose d'une valeur de bord (issue de la résolution du problème de Riemann) que l'on utilise dans la formule discrète classique donnant le flux⁷. La situation est simple aux symétries également, où un flux nul est imposé.

Par contre, en paroi, les conditions de température ou de flux thermique imposé doivent être traitées avec plus d'attention, en particulier lorsqu'une couche limite turbulente est présente.

Coexistence de deux conditions de bord

Comme indiqué dans la partie "discrétisation", les conditions de température ou de flux conductif imposé en paroi se traduisent, pour le flux d'énergie, au travers du terme $\text{div}\left(\frac{K}{C_v} \nabla e\right)$, en imposant une condition de flux nul sur le terme $-\text{div}\left(\frac{K}{C_v} \nabla\left(\frac{1}{2}u^2 + \varepsilon_{sup}\right)\right)$. Les faces IFAC concernées sont repérées dans **cfxtcl** par l'indicateur **IA(IIFBET+IFAC-1) = 1** (qui vaut 0 sinon, initialisé dans **ppprcl**).

Sur ces faces, on calcule une valeur de bord de l'énergie, qui, introduite dans la formule générale de flux utilisée au bord dans *Code_Saturne*, permettra de retrouver le flux souhaité. La valeur de bord est une simple valeur numérique sans signification physique et ne doit être utilisée que pour calculer le flux diffusif.

En plus de cette valeur de bord destinée à retrouver le flux diffusif, il est nécessaire de disposer d'une seconde valeur de bord de l'énergie afin de pouvoir en calculer le gradient.

Ainsi, comme pour la vitesse en $k - \varepsilon$, il est nécessaire de disposer pour l'énergie de deux couples de coefficients (**COEFA**,**COEFB**), correspondant à deux valeurs de bord distinctes, dont l'une est utilisée pour le calcul du flux diffusif spécifiquement.

Calcul des COEFA et COEFB pour les faces de paroi à température imposée

Les faces de paroi IFAC à température imposée sont identifiées par l'utilisateur dans **uscfcl** au moyen de l'indicateur **ICODCL(IFAC,ISCA(ITEMPK))=5** (noter que ce tableau est associé à la température).

Dans **cfxtcl**, on impose alors **ICODCL(IFAC,ISCA(IENERG))=5** et on calcule la quantité $C_v T_{imp,ext} + \frac{1}{2}u_I^2 + \varepsilon_{sup,I}$, que l'on stocke dans **RCODCL(IFAC,ISCA(IENERG),1)** (on ne reconstruit pas les valeurs de u^2 et ε_{sup} au bord, cf. §E).

⁷Les valeurs de u^2 et de ε_{sup} ne sont pas reconstruites pour le calcul du gradient au bord dans $\text{div}\left(\frac{K}{C_v} \nabla\left(\frac{1}{2}u^2 + \varepsilon_{sup}\right)\right)$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 353/400
---------	--	---

À partir de ces valeurs de ICODCL et RCODCL, on renseigne ensuite dans `clptur` les tableaux de conditions aux limites permettant le calcul du flux : `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` (noter l'indicateur ICOEFF qui renvoie aux coefficients dédiés au flux diffusif).

Calcul des COEFA et COEFB pour les faces de paroi à flux thermique imposé

Les faces de paroi IFAC à flux thermique imposé sont identifiées par l'utilisateur dans `uscfcl` au moyen de l'indicateur `ICODCL(IFAC,ISCA(ITEMPK))=3` (noter que le tableau est associé à la température).

Dans `cfxtcl`, on impose alors `ICODCL(IFAC,ISCA(IENERG))=3` et on transfère la valeur du flux de `RCODCL(IFAC,ISCA(ITEMPK),3)` à `RCODCL(IFAC,ISCA(IENERG),3)`.

À partir de ces valeurs de ICODCL et RCODCL, on renseigne ensuite dans `condli` les tableaux de conditions aux limites permettant le calcul du flux, `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` (noter l'indicateur ICOEFF qui renvoie aux coefficients dédiés au flux diffusif).

Gradient de l'énergie en paroi à température ou à flux thermique imposé

Dans les deux cas (paroi à température ou à flux thermique imposé), on utilise les tableaux `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(II),ICOEFF))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(II),ICOEFF))` (noter le ICOEFF) pour disposer d'une condition de flux nul pour l'énergie (avec `II=IENERG`) et pour la température (avec `II=ITEMPK`) si un calcul de gradient est requis.

Un gradient est en particulier utile pour les reconstructions de l'énergie sur maillage non orthogonal. Pour la température, il s'agit d'une précaution, au cas où l'utilisateur aurait besoin d'en calculer le gradient.

Autres frontières que les parois à température ou à flux thermique imposé

Pour les frontières qui ne sont pas des parois à température ou à flux thermique imposé, les conditions aux limites de l'énergie et de la température sont complétées classiquement dans `condli` selon les choix faits dans `cfxtcl` pour ICODCL et RCODCL.

En particulier, dans le cas de conditions de Dirichlet sur l'énergie (entrées, sorties), les deux jeux de conditions aux limites sont identiques (tableaux COEFA, COEFB avec ICOEFF et ICOE).

Si un flux est imposé pour l'énergie totale (condition assez rare, l'utilisateur ne raisonnant pas, d'ordinaire, en énergie totale), on le stocke au moyen de `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` (tableaux associés au flux diffusif). Pour le gradient, une condition de flux nul est stockée dans `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOE))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOE))`. On peut remarquer que les deux jeux de conditions aux limites sont identiques pour les faces de symétrie.

Impact dans cfener

Lors de la construction des seconds membres, dans `cfener`, on utilise les conditions aux limites stockées dans les tableaux associés au flux diffusif `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))` et `COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEFF))`, pour le terme de flux diffusif $\text{div}\left(\frac{K}{C_v}\nabla e\right)$ en prenant soin d'annuler la contribution de bord du terme $-\text{div}\left(\frac{K}{C_v}\nabla\left(\frac{1}{2}u^2 + \varepsilon_{sup}\right)\right)$ sur les faces pour lesquelles cette condition prend les deux termes en compte, c'est-à-dire sur les faces pour lesquelles `IA(IIFBET+IFAC-1) = 1`.

Pour tous les autres termes qui requièrent une valeur de bord, on utilise les conditions aux limites que l'on a stockées au moyen des deux tableaux `COEFA(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOE))` et

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 354/ 400
---------	--	---

`COEFB(*,ICLRTP(ISCA(IENERG),ICOEF))`. Ces conditions sont donc en particulier utilisées pour le calcul du gradient de l'énergie, lors des reconstructions sur maillage non orthogonal.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 355/400
---------	--	--

Points à traiter

Apporter un complément de test sur une cavité fermée sans vitesse et sans gravité, avec flux de bord ou température de bord imposée. Il semble que le transfert d'énergie *via* les termes de pression génère de fortes vitesses non physiques dans la première maille de paroi et que la conduction thermique ne parvienne pas à établir le profil de température recherché. Il est également possible que la condition de bord sur la pression génère une perturbation (une extrapolation pourrait se révéler indispensable).

Il pourrait être utile de généraliser à l'incompressible l'approche utilisée en compressible pour unifier simplement le traitement des sorties de type 9 et 10.

Il pourrait être utile d'étudier plus en détail l'influence de la non orthogonalité des mailles en sortie supersonique (pas de reconstruction, ce qui n'est pas consistant pour les flux de diffusion).

De même, il serait utile d'étudier l'influence de l'absence de reconstruction pour la vitesse et ε_{sup} dans la relation $T_{I'} = \frac{1}{C_v} \left(e_{I'} - \frac{1}{2} u_i^2 - \varepsilon_{sup,i} \right)$ utilisée pour les parois à température imposée.

Apporter un complément de documentation pour le couplage avec SYRTHES (conversion énergie température). Ce n'est pas une priorité.

Pour les thermodynamiques à γ variable, il sera nécessaire de modifier non seulement `uscftb` mais également `cfrusb` qui doit disposer de γ en argument.

Pour les thermodynamiques à C_v variable, il sera nécessaire de prendre en compte un terme en ∇C_v , issu des flux diffusifs, au second membre de l'équation de l'énergie (on pourra cependant remarquer qu'actuellement, en incompressible, on néglige le terme en ∇C_p dans l'équation de l'enthalpie).

Part VI

Electric Arcs

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 357/ 400
---------	--	---

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 358/ 400
---------	--	---

A- elec** routine

On s'intéresse à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique, constituées de la réunion des équations de l'aérothermodynamique et des équations de Maxwell.

On se place dans deux cadres d'utilisation bien spécifiques et distincts, qui permettront chacun de réaliser des simplifications : les études dites "d'arc électrique" (dans lesquelles sont prises en compte les forces de Laplace et l'effet Joule) et les études dites "Joule" (dans lesquelles seul l'effet Joule est pris en compte).

Les études d'arc électrique sont associées en grande partie, pour EDF, aux problématiques relatives aux transformateurs. Les études Joule sont plus spécifiquement liées aux phénomènes rencontrés dans les fours verriers.

Outre la prise en compte ou non des forces de Laplace, ces deux types d'études se différencient également par le mode de détermination de l'effet Joule (utilisation d'un potentiel complexe pour les études Joule faisant intervenir un courant alternatif non monophasé).

On décrit tout d'abord les équations résolues pour les études d'arc électrique. Les spécificités des études Joule seront abordées ensuite.

Pour l'arc électrique, les références [douce] et [delalondre] pourront compléter la présentation :

[**delalondre**] Delalondre, Clarisse : "Modélisation aérothermodynamique d'arcs électriques à forte intensité avec prise en compte du déséquilibre thermodynamique local et du transfert thermique à la cathode", Thèse de l'Université de Rouen, 1990

[**douce**] Douce, Alexandre : "Modélisation 3-D du chauffage d'un bain métallique par plasma d'arc transféré. Application à un réacteur axisymétrique", HE-26/99/027A, HE-44/99/043A, Thèse de l'Ecole Centrale Paris et EDF, 1999

Fonction

Notations

Variables utilisées

\underline{A}	potentiel vecteur réel	$kg\ m\ s^{-2}\ A^{-1}$
\underline{B}	champ magnétique	T (ou $kg\ s^{-2}\ A^{-1}$)
\underline{D}	déplacement électrique	$A\ s\ m^{-2}$
\underline{E}	champ électrique	$V\ m^{-1}$
E	énergie totale massique	$J\ kg^{-1}$ (ou $m^2\ s^{-2}$)
e	énergie interne massique	$J\ kg^{-1}$ (ou $m^2\ s^{-2}$)
e_c	énergie cinétique massique	$J\ kg^{-1}$ (ou $m^2\ s^{-2}$)
\underline{H}	excitation magnétique	$A\ m^{-1}$
h	enthalpie massique	$J\ kg^{-1}$ (ou $m^2\ s^{-2}$)
\underline{j}	densité de courant	$A\ m^{-2}$
\underline{P}	pression	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
P_R, P_I	potentiel scalaire réel, imaginaire	V (ou $kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$)
\underline{u}	vitesse	$m\ s^{-1}$
ε	permittivité électrique	$F\ m^{-1}$ (ou $m^{-3}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$)
ε_0	permittivité électrique du vide	$8,854\ 10^{-12}\ F\ m^{-1}$ (ou $m^{-3}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$)
μ	perméabilité électrique	$H\ m^{-1}$ (ou $m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$)
μ_0	perméabilité électrique du vide	$4\ \pi\ 10^{-7}\ H\ m^{-1}$ (ou $m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$)
σ	conductivité électrique	$S\ m^{-1}$ (ou $m^{-3}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$)

Notations d'analyse vectorielle

On rappelle également la définition des notations employées¹ :

$$\begin{cases} [\underline{\text{grad}}\ \underline{a}]_{ij} &= \partial_j a_i \\ [\underline{\text{div}}(\underline{\sigma})]_i &= \partial_j \sigma_{ij} \\ [\underline{a} \otimes \underline{b}]_{ij} &= a_i b_j \end{cases}$$

et donc :

$$[\underline{\text{div}}(\underline{a} \otimes \underline{b})]_i = \partial_j (a_i b_j)$$

Arcs électriques

Introduction

Pour les études d'arc électrique, on calcule, à un pas de temps donné :

- la vitesse \underline{u} , la pression P , la variable énergétique enthalpie h (et les grandeurs turbulentes),
- un potentiel scalaire réel P_R (dont le gradient permet d'obtenir le champ électrique \underline{E} et la densité de courant \underline{j}),
- un potentiel vecteur réel \underline{A} (dont le rotationnel permet d'obtenir le champ magnétique \underline{B}).

Le champ électrique, la densité de courant et le champ magnétique sont utilisés pour calculer les termes sources d'effet Joule et les forces de Laplace qui interviennent respectivement dans l'équation de l'enthalpie et dans celle de la quantité de mouvement.

¹en utilisant la convention de sommation d'Einstein.

Équations continues

Système d'équations

Les équations continues qui sont résolues sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \text{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{T}S + \underline{j} \times \underline{B} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \underline{u} h) = \Phi_v + \text{div}\left(\left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right) \underline{\nabla} h\right) + P_J \\ \text{div}(\sigma \underline{\nabla} P_R) = 0 \\ \text{div}(\underline{\text{grad}} \underline{A}) = -\mu_0 \underline{j} \end{array} \right. \quad (\text{VI.A.1})$$

avec les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_J = \underline{j} \cdot \underline{E} \\ \underline{E} = -\underline{\nabla} P_R \\ \underline{j} = \sigma \underline{E} \end{array} \right. \quad (\text{VI.A.2})$$

Équation de la masse

C'est l'équation résolue en standard par *Code_Saturne* (contrainte stationnaire). Elle n'a pas de traitement particulier dans le cadre du module présent. Un terme source de masse peut être pris en compte au second membre si l'utilisateur le souhaite. Pour simplifier l'exposé le terme source sera supposé nul ici, dans la mesure où il n'est pas spécifique au module électrique.

Équation de la quantité de mouvement

Elle présente, par rapport à l'équation standard résolue par *Code_Saturne*, un seul terme additionnel ($\underline{j} \times \underline{B}$) qui rend compte des forces de Laplace. Pour l'obtenir, on fait l'hypothèse que le milieu est électriquement neutre.

En effet, une charge q_i (Coulomb) animée d'une vitesse \underline{v}_i subit, sous l'effet du champ électrique \underline{E} ($V m^{-1}$) et du champ magnétique \underline{B} (Tesla), une force \underline{f}_i ($kg m s^{-2}$) :

$$\underline{f}_i = q_i (\underline{E} + \underline{v}_i \times \underline{B}) \quad (\text{VI.A.3})$$

Avec n_i charges de type q_i par unité de volume et en sommant sur tous les types de charge i (électrons, ions, molécules ionisées...), on obtient la force de Laplace totale \underline{F}_L ($kg m^{-2} s^{-2}$) subie par unité de volume :

$$\underline{F}_L = \sum_i [n_i q_i (\underline{E} + \underline{v}_i \times \underline{B})] \quad (\text{VI.A.4})$$

On introduit alors la densité de courant \underline{j} ($A m^{-2}$) :

$$\underline{j} = \sum_i n_i q_i \underline{v}_i \quad (\text{VI.A.5})$$

Avec l'hypothèse que le milieu est électriquement neutre (à un niveau macroscopique) :

$$\sum_i n_i q_i = 0 \quad (\text{VI.A.6})$$

la force totale \underline{F}_L s'écrit alors :

$$\underline{F}_L = \underline{j} \times \underline{B} \quad (\text{VI.A.7})$$

et on peut donc écrire l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \text{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{T}S + \underline{j} \times \underline{B} \quad (\text{VI.A.8})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 361/400
---------	--	---

Équation de l'enthalpie

Elle est obtenue à partir de l'équation de l'énergie après plusieurs approximations utilisées en standard dans *Code_Saturne* et en prenant en compte le terme d'effet Joule lié à l'énergie électromagnétique.

Énergie électromagnétique

Avec les mêmes notations que précédemment mais sans qu'il soit besoin de supposer que le milieu est électriquement neutre, la puissance reçue par une charge q_i (particule douée de masse) de vitesse \underline{v}_i (vitesse du porteur de charge, contenant éventuellement l'effet de la vitesse du fluide) sous l'effet du champ électrique \underline{E} ($V m^{-1}$) et du champ magnétique \underline{B} (T) est (sans sommation sur i) :

$$P_i = \underline{f}_i \cdot \underline{v}_i = q_i(\underline{E} + \underline{v}_i \times \underline{B}) \cdot \underline{v}_i = q_i \underline{v}_i \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.9})$$

Avec n_i charges par unité de volume et en sommant sur tous les types de charges i , on obtient la puissance totale par unité de volume :

$$P_J = \sum_i n_i q_i \underline{v}_i \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.10})$$

On introduit alors la densité de courant $\underline{j} = \sum_i n_i q_i \underline{v}_i$ (en $A m^{-2}$) et on obtient l'expression usuelle de la puissance électromagnétique dissipée par effet Joule (en $W m^{-3}$) :

$$P_J = \underline{j} \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.11})$$

Pour reformuler la puissance dissipée par effet Joule et obtenir une équation d'évolution de l'énergie électromagnétique, on utilise alors les équations de Maxwell. Les équations s'écrivent (lois d'Ampère et de Faraday) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \underline{\text{rot}} \underline{H} = -\underline{j} \\ \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\text{rot}} \underline{E} = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.A.12})$$

On a donc :

$$P_J = \underline{j} \cdot \underline{E} = \left(-\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{\text{rot}} \underline{H} \right) \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.13})$$

On utilise alors la relation suivante :

$$\underline{\text{rot}} \underline{H} \cdot \underline{E} = \underline{H} \cdot \underline{\text{rot}} \underline{E} - \text{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \quad (\text{VI.A.14})$$

En effet, elle permet de faire apparaître un terme en divergence, caractéristique d'une redistribution spatiale :

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \cdot \underline{E} + \underline{H} \cdot \underline{\text{rot}} \underline{E} - \text{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \quad (\text{VI.A.15})$$

Et en utilisant la loi de Faraday pour faire apparaître la dérivée en temps du champ magnétique :

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \cdot \underline{E} - \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \text{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \quad (\text{VI.A.16})$$

Dans le cadre de *Code_Saturne*, on fait les hypothèses suivantes :

- la perméabilité ε et la permittivité μ sont constantes et uniformes (pour les gaz, en pratique, on utilise les propriétés du vide ε_0 et μ_0).
- on utilise $\underline{B} = \mu \underline{H}$ et $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

On a alors :

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{B}) \quad (\text{VI.A.17})$$

Énergie totale

On établit l'équation de l'énergie totale en prenant en compte la puissance des forces de Laplace et le terme d'effet Joule.

Sans prendre en compte l'énergie électromagnétique, le premier principe de la thermodynamique s'écrit d'ordinaire sous la forme suivante (pour un volume matériel suivi sur une unité de temps) :

$$d \int_V \rho E dV = \delta Q + \delta W \quad (\text{VI.A.18})$$

Dans cette relation, E est l'énergie totale par unité de masse², soit $E = e + e_c$, e étant l'énergie interne massique et $e_c = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{u}$ l'énergie cinétique massique. Le terme δQ représente la chaleur reçue au travers des frontières du domaine considéré tandis que le terme δW représente le travail des forces extérieures reçu par le système (y compris les forces dérivant d'une énergie potentielle).

Pour prendre en compte l'énergie électromagnétique, il suffit d'intégrer à la relation (VI.A.18) la puissance des forces de Laplace $(\underline{j} \times \underline{B}) \cdot \underline{u}$ et le terme d'effet Joule $\underline{j} \cdot \underline{E}$ (transformation volumique d'énergie électromagnétique en énergie totale³). Dans cette relation, la vitesse \underline{u} est la vitesse du fluide et non pas celle des porteurs de charge : elle n'est donc pas nécessairement colinéaire au vecteur \underline{j} (par exemple, si le courant est dû à des électrons, la vitesse du fluide pourra être considérée comme décorrélée de la vitesse des porteurs de charges ; par contre, si le courant est dû à des ions, la vitesse du fluide pourra être plus directement influencée par le déplacement des porteurs de charge). Ainsi, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$d \int_V \rho E dV = \delta Q + \delta W + \underline{j} \cdot \underline{E} V dt + (\underline{j} \times \underline{B}) \cdot \underline{u} V dt \quad (\text{VI.A.19})$$

et l'équation locale pour l'énergie totale est alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho \underline{u} E) = \operatorname{div}(\underline{\sigma} \underline{u}) + \underline{T} \underline{S} \cdot \underline{u} + (\underline{j} \times \underline{B}) \cdot \underline{u} + \Phi_v - \operatorname{div} \underline{\Phi}_s + \underline{j} \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.20})$$

Le terme Φ_v représente les termes sources volumiques d'énergie autres que l'effet Joule (par exemple, il inclut le terme source de rayonnement, pour un milieu optiquement non transparent). Le terme $\underline{\Phi}_s$ est le flux d'énergie surfacique⁴.

Enthalpie

Pour obtenir une équation sur l'enthalpie, qui est la variable énergétique choisie dans *Code_Saturne* dans le module électrique, on soustrait tout d'abord à l'équation de l'énergie totale celle de l'énergie cinétique pour obtenir une équation sur l'énergie interne.

L'équation de l'énergie cinétique (obtenue à partir de l'équation de la quantité de mouvement écrite sous forme non conservative) est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_c) + \operatorname{div}(\rho \underline{u} e_c) = \operatorname{div}(\underline{\sigma} \underline{u}) - \underline{\sigma} : (\underline{\operatorname{grad}}(\underline{u}))^t + \underline{T} \underline{S} \cdot \underline{u} + (\underline{j} \times \underline{B}) \cdot \underline{u} \quad (\text{VI.A.21})$$

de sorte que, pour l'énergie interne, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho \underline{u} e) = \underline{\sigma} : (\underline{\operatorname{grad}}(\underline{u}))^t + \Phi_v - \operatorname{div} \underline{\Phi}_s + \underline{j} \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.22})$$

²Ne pas confondre le scalaire E , énergie totale, avec le vecteur \underline{E} , champ électrique.

³Le terme en divergence $-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{B})$ traduit une redistribution spatiale d'énergie électromagnétique : ce n'est donc pas un terme source pour l'énergie totale.

⁴Dans *Code_Saturne*, il est modélisé par une hypothèse de gradient et inclut également la "diffusion" turbulente.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 363/400
---------	--	---

et enfin, pour l'enthalpie $h = e + \frac{P}{\rho}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \underline{u} h) = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\text{grad}}(\underline{u}))^t + \Phi_v - \text{div} \Phi_s + \underline{j} \cdot \underline{E} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (\text{VI.A.23})$$

En faisant apparaître la pression dans le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = -P \underline{Id} + \underline{\underline{\tau}}$, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \underline{u} h) = \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\text{grad}}(\underline{u}))^t + \Phi_v - \text{div} \Phi_s + \underline{j} \cdot \underline{E} + \frac{dP}{dt} \quad (\text{VI.A.24})$$

Les approximations habituelles de *Code_Saturne* consistent alors à négliger le terme “d'échauffement” issu du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\tau}} : (\underline{\text{grad}}(\underline{u}))^t$ et le terme en dérivée totale de la pression $\frac{dP}{dt}$, supposés faibles en comparaison des autres termes dans les applications traitées (exemple : terme d'effet Joule important, effets de compressibilité faibles...). De plus, le terme de flux est modélisé en suivant une hypothèse de gradient appliqué à l'enthalpie (et non pas à la température), soit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \underline{u} h) = \Phi_v - \text{div} \left(\left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \underline{\nabla} h \right) + \underline{j} \cdot \underline{E} \quad (\text{VI.A.25})$$

Équations électromagnétiques

Elles sont obtenues à partir des équations de Maxwell sous les hypothèses détaillées dans [douce], paragraphe 3.3.

Densité de courant

La relation liant la densité de courant et le champ électrique est issue de la loi d'Ohm que l'on suppose pouvoir utiliser sous la forme simplifiée suivante :

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad (\text{VI.A.26})$$

Champ électrique

Le champ électrique s'obtient à partir d'un potentiel vecteur.

En effet, la loi de Faraday s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\text{rot}} \underline{E} = 0 \quad (\text{VI.A.27})$$

Avec une hypothèse quasi-stationnaire, il reste :

$$\underline{\text{rot}} \underline{E} = 0 \quad (\text{VI.A.28})$$

Il est donc possible de postuler l'existence d'un potentiel scalaire P_R tel que :

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} P_R \quad (\text{VI.A.29})$$

Potentiel scalaire

Le potentiel scalaire est solution d'une équation de Poisson.

En effet, la conservation de la charge q s'écrit :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\underline{j}) = 0 \quad (\text{VI.A.30})$$

Pour un milieu électriquement neutre (à l'échelle macroscopique), on a $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ soit donc :

$$\text{div}(\underline{j}) = 0 \quad (\text{VI.A.31})$$

C'est-à-dire, avec la loi d'Ohm (VI.A.26),

$$\operatorname{div}(\sigma \underline{E}) = 0 \quad (\text{VI.A.32})$$

Avec (VI.A.29), on obtient donc une équation permettant de calculer le potentiel scalaire :

$$\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} P_R) = 0 \quad (\text{VI.A.33})$$

Champ magnétique

Le champ magnétique s'obtient à partir d'un potentiel vecteur.

En effet, la loi d'Ampère s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \underline{H} = -\underline{j} \quad (\text{VI.A.34})$$

Sous les hypothèses indiquées précédemment, on écrit :

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \underline{B} = -\mu_0 \underline{j} \quad (\text{VI.A.35})$$

Avec une hypothèse quasi-stationnaire, il reste :

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad (\text{VI.A.36})$$

De plus, la conservation du flux magnétique s'écrit⁵ :

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad (\text{VI.A.37})$$

et on peut donc postuler l'existence d'un potentiel vecteur \underline{A} tel que :

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \quad (\text{VI.A.38})$$

Potentiel vecteur

Le potentiel vecteur est solution d'une équation de Poisson.

En prenant le rotationnel de (VI.A.38) et avec (VI.A.36), on obtient :

$$-\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{A}) = -\mu_0 \underline{j} \quad (\text{VI.A.39})$$

Avec la relation donnant le Laplacien⁶ d'un vecteur $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \underline{a}) = \underline{\nabla}(\operatorname{div} \underline{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{a})$ et sous la contrainte⁷ que $\operatorname{div} \underline{A} = 0$, on obtient finalement une équation permettant de calculer le potentiel vecteur :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \underline{A}) = -\mu_0 \underline{j} \quad (\text{VI.A.40})$$

Effet Joule

Introduction

Pour les études Joule, on calcule, à un pas de temps donné :

- la vitesse \underline{u} , la pression P , la variable énergétique enthalpie h (et les grandeurs turbulentes éventuelles),
- un potentiel scalaire réel P_R ,

⁵Prendre la divergence de la loi de Faraday, avec $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{E}) = 0$ (par analyse vectorielle) donne $\operatorname{div} \underline{B} = \text{cst.}$

⁶En coordonnées cartésiennes, le Laplacien du vecteur \underline{a} est le vecteur dont les composantes sont égales au Laplacien de chacune des composantes de \underline{a} .

⁷La condition $\operatorname{div} \underline{A} = 0$, dite "jauge de Coulomb", est nécessaire pour assurer l'unicité du potentiel vecteur.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 365/400
---------	--	---

- et, si le courant n'est ni continu, ni alternatif monophasé, un potentiel scalaire imaginaire P_I .

Le gradient du potentiel permet d'obtenir le champ électrique \underline{E} et la densité de courant \underline{j} (partie réelle et, éventuellement, partie imaginaire). Le champ électrique et la densité de courant sont utilisés pour calculer le terme source d'effet Joule qui intervient dans l'équation de l'enthalpie.

La puissance instantanée dissipée par effet Joule est égale au produit instantané $\underline{j} \cdot \underline{E}$. Dans le cas général, \underline{j} et \underline{E} sont des signaux alternatifs ($\underline{j} = |\underline{j}| \cos(\omega t + \phi_j)$ et $\underline{E} = |\underline{E}| \cos(\omega t + \phi_E)$) que l'on peut représenter par des complexes ($\underline{j} = |\underline{j}| e^{i(\omega t + \phi_j)}$ et $\underline{E} = |\underline{E}| e^{i(\omega t + \phi_E)}$). La puissance instantanée s'écrit alors $(|\underline{j}| \cdot |\underline{E}|) \cos(\omega t + \phi_j) \cos(\omega t + \phi_E)$.

- **En courant continu** ($\omega = \phi_j = \phi_E = 0$), la puissance se calcule donc simplement comme le produit scalaire $P_J = |\underline{j}| \cdot |\underline{E}|$. Le calcul de la puissance dissipée par effet Joule ne pose donc pas de problème particulier car les variables densité de courant et champ électrique résolues par *Code_Saturne* sont précisément $|\underline{j}|$ et $|\underline{E}|$ (les variables sont réelles).
- **En courant alternatif**, la période du courant est beaucoup plus petite que les échelles de temps des phénomènes thermohydrauliques pris en compte. Il n'est donc pas utile de disposer de la puissance instantanée dissipée par effet Joule : la moyenne sur une période est suffisante et elle s'écrit⁸ : $P_J = \frac{1}{2} (|\underline{j}| \cdot |\underline{E}|) \cos(\phi_j - \phi_E)$. Cette formule peut également s'écrire de manière équivalente sous forme complexe : $P_J = \frac{1}{2} \underline{j} \cdot \underline{E}^*$, où \underline{E}^* est le complexe conjugué de \underline{E} .
 - En courant alternatif monophasé ($\phi_j = \phi_E$), en particulier, la formule donnant la puissance se simplifie sous la forme $P_J = \frac{1}{2} (|\underline{j}| \cdot |\underline{E}|)$, ou encore : $P_J = \frac{1}{\sqrt{2}} |\underline{j}| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |\underline{E}|$. Il s'agit donc du produit des valeurs efficaces. Or, les variables résolues par *Code_Saturne* en courant alternatif monophasé sont précisément les valeurs efficaces (valeurs que l'on dénomme abusivement "valeurs réelles" dans le code source).
 - En courant alternatif non monophasé (triphasé, en particulier), la formule donnant la puissance est utilisée directement sous la forme $P_J = \frac{1}{2} \underline{j} \cdot \underline{E}^*$. On utilise pour la calculer les variables résolues qui sont la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{j} et \underline{E} .
- **En conclusion**,
 - en continu, les variables résolues \underline{j}_{Res} et \underline{E}_{Res} sont les variables réelles continues et la puissance se calcule par la formule suivante : $P_J = \underline{j}_{Res} \cdot \underline{E}_{Res}$
 - en alternatif monophasé, les variables résolues \underline{j}_{Res} et \underline{E}_{Res} sont les valeurs efficaces et la puissance se calcule par la formule suivante : $P_J = \underline{j}_{Res} \cdot \underline{E}_{Res}$
 - en alternatif non monophasé, les variables résolues $\underline{j}_{Res,R}$, $\underline{j}_{Res,I}$ et $\underline{E}_{Res,R}$, $\underline{E}_{Res,I}$ sont la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{j} et \underline{E} , et la puissance se calcule par la formule suivante : $P_J = \frac{1}{2} (\underline{j}_{Res,R} \cdot \underline{E}_{Res,R} - \underline{j}_{Res,I} \underline{E}_{Res,I})$

Le potentiel imaginaire n'est donc utilisé dans le code que lorsque le courant est alternatif et non monophasé. En particulier, le potentiel imaginaire n'est pas utilisé lorsque le courant est continu ou alternatif monophasé. En effet, la partie imaginaire n'est introduite en complément de la partie réelle que dans le cas où il est nécessaire de disposer de deux grandeurs pour définir le potentiel, c'est-à-dire lorsqu'il importe de connaître son amplitude et sa phase. En courant continu, on n'a naturellement besoin que d'une seule information. En alternatif monophasé, la valeur de la phase importe peu (on ne travaille pas sur des grandeurs électriques instantanées) : il suffit de connaître l'amplitude du potentiel et il est donc inutile d'introduire une variable imaginaire.

La variable dénommée "potentiel réel", P_R , représente une valeur efficace si le courant est monophasé et une partie réelle sinon. De manière plus explicite, pour un potentiel physique

⁸L'intégrale de $\cos^2 x$ sur un intervalle de longueur 2π est π .

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 366/400
---------	--	---

alternatif sinusoïdal Pp , de valeur maximale notée Pp_{\max} , de phase notée ϕ , la variable P_R représente $\frac{1}{\sqrt{2}} Pp_{\max}$ en monophasé et $Pp_{\max} \cos\phi$ sinon. En courant continu, P_R représente naturellement le potentiel (réel, continu). **Il est donc indispensable de prêter une attention particulière aux valeurs de potentiel imposées aux limites** (facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\cos\phi$).

Équations continues

Système d'équations

Les équations continues qui sont résolues sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \text{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{TS} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \underline{u} h) = \Phi_v + \text{div}\left(\left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right) \underline{\nabla} h\right) + P_J \\ \text{div}(\sigma \underline{\nabla} P_R) = 0 \\ \text{div}(\sigma \underline{\nabla} P_I) = 0 \end{array} \right. \text{ en alternatif non monophasé uniquement} \quad (\text{VI.A.41})$$

avec, en continu ou alternatif monophasé :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_J = \underline{j} \cdot \underline{E} \\ \underline{E} = -\underline{\nabla} P_R \\ \underline{j} = \sigma \underline{E} \end{array} \right. \quad (\text{VI.A.42})$$

et, en alternatif non monophasé (avec $i^2 = -1$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_J = \frac{1}{2} \underline{j} \cdot \underline{E}^* \\ \underline{E} = -\underline{\nabla}(P_R + i P_I) \\ \underline{j} = \sigma \underline{E} \end{array} \right. \quad (\text{VI.A.43})$$

Équation de la masse

C'est l'équation résolue en standard par *Code_Saturne* (contrainte stationnaire d'incompressibilité). Elle n'a pas de traitement particulier dans le cadre du module présent. Un terme source de masse peut être pris en compte au second membre si l'utilisateur le souhaite. Pour simplifier l'exposé, le terme source sera supposé nul ici, dans la mesure où il n'est pas spécifique au module électrique.

Équation de la quantité de mouvement

C'est l'équation résolue en standard par *Code_Saturne* (les forces de Laplace ($\underline{j} \times \underline{B}$) sont supposées négligeables).

Équation de l'enthalpie

On l'établit comme dans le cas des arcs électriques⁹ à partir de l'équation de l'énergie après plusieurs approximations utilisées en standard dans *Code_Saturne* et en prenant en compte le terme d'effet Joule lié à l'énergie électromagnétique.

Par rapport à l'équation utilisée pour les études d'arc électrique, seule l'expression de l'effet Joule

⁹À ceci près que la puissance des forces de Laplace n'apparaît pas du tout, au lieu de disparaître lorsque l'on soustrait l'équation de l'énergie cinétique à celle de l'énergie totale.

diffère lorsque le courant est alternatif non monophasé.

Équations électromagnétiques

Elles sont obtenues comme indiqué dans la partie relative aux arcs électriques, mais on ne conserve que les relations associées à la densité de courant, au champ électrique et au potentiel dont il dérive.

Discrétisation

La discrétisation des équations ne pose pas de problème particulier (ajout de termes sources explicites pour l'effet Joule et les forces de Laplace, équations de Poisson pour la détermination des potentiels).

Un point sur les conditions aux limites doit cependant être fait ici, en particulier pour préciser la méthode de recalage automatique des potentiels.

Arcs électriques

Conditions aux limites

Seules les conditions aux limites pour les potentiels sont à préciser.

Les conditions aux limites sur le potentiel scalaire sont des conditions de Neumann homogènes sur toutes les frontières hormis à la cathode et à l'anode. À la cathode, on impose une condition de Dirichlet homogène (potentiel nul par convention). À l'anode, on impose une condition de Dirichlet permettant de fixer la différence de potentiel souhaitée entre l'anode et la cathode. L'utilisateur peut fixer le potentiel de l'anode directement ou demander qu'un recalage automatique du potentiel soit effectué pour atteindre une intensité de courant prédéterminée.

Lorsque le recalage automatique est demandé ($IELCOR=1$), l'utilisateur doit fixer la valeur cible de l'intensité, $COUIMP$, (A) et une valeur élevée de départ de la différence de potentiel entre l'anode et la cathode¹⁰, $DPOT$, (V). Le recalage est effectué en fin de pas temps et permet de disposer, pour le pas de temps suivant, de valeurs recalées des forces de Laplace et de l'effet Joule.

- Pour effectuer le recalage, *Code_Saturne* détermine l'intégrale de l'effet Joule estimé sur le domaine (en W) et en compare la valeur au produit de l'intensité $COUIMP$ par la différence de potentiel¹¹ $DPOT$. Un coefficient multiplicatif de recalage $COEPOT$ en est déduit (pour éviter des variations trop brusques, on s'assure qu'il reste borné).
- On multiplie alors par $COEPOT$ la différence de potentiel entre l'anode et la cathode, $DPOT$, et le vecteur \underline{j} . L'effet Joule, produit de \underline{j} par \underline{E} , est multiplié par le carré de $COEPOT$. Pour assurer la cohérence du post-traitement des variables, le potentiel vecteur et le potentiel scalaire sont également multipliés par $COEPOT$.
- Le champ électrique n'étant pas explicitement stocké, on ne le recalc pas. Le potentiel vecteur et les forces de Laplace seront déduits de la densité de courant et intégreront donc naturellement le recalage.

Les conditions aux limites sur le potentiel vecteur sont des conditions de Neumann homogène sur toutes les frontières hormis sur une zone de bord arbitrairement choisie (paroi par exemple) pour laquelle une condition de Dirichlet est utilisée afin que le système soit inversible (la valeur imposée est la valeur du potentiel vecteur calculée au pas de temps précédent).

¹⁰Plus précisément, l'utilisateur doit imposer un potentiel nul en cathode et le potentiel $DPOT$ à l'anode, en utilisant explicitement, dans le sous-programme utilisateur `uselc1`, la variable $DPOT$ qui sera automatiquement recalée au cours du calcul.

¹¹ $DPOT$ est la différence de potentiel imposée entre l'anode et la cathode au pas de temps qui s'achève. $DPOT$ a conditionné le champ électrique et la densité de courant utilisés pour le calcul de l'effet Joule.

Effet Joule

Conditions aux limites

Seules les conditions aux limites pour les potentiels sont à préciser.

Les conditions aux limites sur le potentiel scalaire sont à préciser au cas par cas selon la configuration des électrodes. Ainsi, on dispose classiquement de conditions de Neumann homogènes ou de Dirichlet (potentiel imposé). On peut également avoir besoin d'imposer des conditions d'antisymétrie (en utilisant des conditions de Dirichlet homogènes par exemple). L'utilisateur peut également souhaiter qu'un recalage automatique du potentiel soit effectué pour atteindre une valeur prédéterminée de la puissance dissipée par effet Joule.

Lorsque le recalage automatique est demandé (`IELCOR=1`), l'utilisateur doit fixer la valeur cible de la puissance dissipée dans le domaine, `PUISIM`, (VA). Il doit en outre, sur les frontières où il souhaite que le potentiel (réel ou complexe) s'adapte automatiquement, fournir en condition à la limite une valeur initiale du potentiel et la multiplier par la variable `COEJOU` qui sera automatiquement recalée au cours du calcul (`COEJOU` vaut 1 au premier pas de temps). Le recalage est effectué en fin de pas temps et permet de disposer, pour le pas de temps suivant, d'une valeur recalée de l'effet Joule.

- Pour effectuer le recalage, *Code_Saturne* détermine l'intégrale de l'effet Joule estimé sur le domaine (en W) et en compare la valeur à la puissance cible. Un coefficient multiplicatif de recalage `COEPOT` en est déduit (pour éviter des variations trop brusques, on s'assure qu'il reste borné entre 0,75 et 1,5).
- On multiplie alors par `COEPOT` le facteur multiplicatif `COEJOU` utilisé pour les conditions aux limites. La puissance dissipée par effet Joule est multipliée par le carré de `COEPOT`. Pour assurer la cohérence du post-traitement des variables, le potentiel est également multiplié par `COEPOT`.
- Le champ électrique n'étant pas explicitement stocké, on ne le recalc pas.

On notera que la variable `DPOT` est également recalée et qu'elle peut donc être utilisée si besoin pour imposer les conditions aux limites.

Mise en œuvre

Introduction

Le module électrique est une "physique particulière" activée lorsque les mots-clés `IPPMOD(IELARC)` (arc électrique) ou `IPPMOD(IELJOU)` (Joule) sont strictement positifs. Les développements concernant la conduction ionique (mot-clé `IPPMOD(IELION)`) ont été prévus dans le code mais restent à réaliser. Pour l'arc électrique, dans la version actuelle de *Code_Saturne*, seule est opérationnelle l'option `IPPMOD(IELARC)=2` : la version 2D axisymétrique qui permettrait de s'affranchir du potentiel vecteur (option `IPPMOD(IELARC)=1`) n'est pas activable. Pour l'effet Joule, lorsqu'il n'est pas utile d'introduire un potentiel scalaire complexe (en courant continu ou alternatif monophasé), on utilise `IPPMOD(IELJOU)=1`. Lorsqu'un potentiel scalaire complexe est indispensable (courant alternatif triphasé, par exemple), on utilise `IPPMOD(IELJOU)=2`.

Dans ce qui suit, on précise les inconnues et les propriétés principales utilisées dans le module. On fournit également un arbre d'appel simplifié des sous-programmes du module (initialisation avec `init1` puis `inivar` et boucle en temps avec `tridim`). Les sous-programmes marqués d'un astérisque sont détaillés ensuite.

Inconnues et propriétés

Les développements ont été réalisés pour une unique phase (NPHAS=1).

Les NSCAPP inconnues scalaires associées à la physique particulière sont définies dans **elvarp** dans l'ordre suivant (en particulier afin de limiter le stockage en mémoire lors de la résolution séquentielle des scalaires par **scalai**) :

- l'enthalpie $\text{RTP}(*, \text{ISCA}(\text{IHM}))$,
- un potentiel scalaire réel $\text{RTP}(*, \text{ISCA}(\text{IPOTR}))$,
- un potentiel scalaire imaginaire $\text{RTP}(*, \text{ISCA}(\text{IPOTI}))$ *ssi* $\text{IPPMOD}(\text{IELJOU})=2$ (études Joule en courant alternatif non monophasé),
- les trois composantes d'un potentiel vecteur réel $\text{RTP}(*, \text{ISCA}(\text{IPOTVA}(i)))$ (avec i variant de 1 à 3) *ssi* $\text{IPPMOD}(\text{IELARC})=2$ (arc électrique),
- **NGAZG**-1 fractions massiques $\text{RTP}(*, \text{ISCA}(\text{IYCOEL}(j)))$ (avec j variant de 1 à **NGAZG**-1) pour un fluide à **NGAZG** constituants (avec **NGAZG** strictement supérieur à 1). En arc électrique, la composition est fournie dans le fichier de données **dp_ELE**. La fraction massique du dernier constituant n'est pas stockée en mémoire. Elle est déterminée chaque fois que nécessaire en calculant le complément à l'unité des autres fractions massiques (et, en particulier, lorsque **elthht** est utilisé pour le calcul des propriétés physiques).

Outre les propriétés associées en standard aux variables scalaires identifiées ci-dessus, le tableau **PROPCE** contient également :

- la température, $\text{PROPCE}(*, \text{IPPROC}(\text{ITEMP}))$. En théorie, on pourrait éviter de stocker cette variable, mais l'utilisateur est presque toujours intéressé par sa valeur en post-traitement et les propriétés physiques sont souvent données par des lois qui en dépendent explicitement. Son unité (Kelvin ou Celsius) dépend des tables enthalpie-température fournies par l'utilisateur.
- la puissance électromagnétique dissipée par effet Joule, $\text{PROPCE}(*, \text{IPPROC}(\text{IEFJOU}))$ (terme source positif pour l'enthalpie),
- les trois composantes des forces de Laplace, $\text{PROPCE}(*, \text{IPPROC}(\text{ILAPLA}(i)))$ (avec i variant de 1 à 3) en arc électrique ($\text{IPPMOD}(\text{IELARC})=2$).

La conductivité électrique est *a priori* variable et conservée dans le tableau de propriétés aux cellules $\text{PROPCE}(*, \text{IPPROC}(\text{IVISLS}(\text{IPOTR})))$. Elle intervient dans l'équation de Poisson portant sur le potentiel scalaire. Lorsque le potentiel scalaire a une partie imaginaire, la conductivité n'est pas dupliquée : les entiers $\text{IPPROC}(\text{IVISLS}(\text{IPOTI}))$ et $\text{IPPROC}(\text{IVISLS}(\text{IPOTR}))$ pointent sur la même case du tableau **PROPCE**. La conductivité associée au potentiel vecteur est uniforme et de valeur unité ($\text{VISLS0}(\text{IPOTVA}(i))=1.D0$ avec i variant de 1 à 3).

Le champ électrique, la densité de courant et le champ magnétique ne sont stockés que de manière temporaire (voir **elflux**).

Arbre d'appel simplifié

<code>usini1</code>	Initialisation des mots-clés utilisateur généraux et positionnement des variables
<code>usppmo</code>	Définition du module “physique particulière” employé
<code>varpos</code>	Positionnement des variables
<code>pplecd</code>	Branchement des physiques particulières pour la lecture de fichier de données
<code>ellecd*</code>	Lecture du fichier de données pour les arcs électriques <code>dp_ELE</code>
<code>ppvarp</code>	Branchement des physiques particulières pour le positionnement des inconnues
<code>elvarp*</code>	Positionnement des inconnues (enthalpie, potentiels, fractions massiques)
<code>ppprop</code>	Branchement des physiques particulières pour le positionnement des propriétés
<code>elprop*</code>	Positionnement des propriétés (température, effet Joule, forces de Laplace)
<code>ppini1</code>	Branchement des physiques particulières pour l’initialisation des mots-clés spécifiques
<code>elini1</code>	Initialisation des mots-clés pour le module électrique
<code>useli1</code>	Initialisation des mots-clés utilisateur pour le module électrique
<code>elveri</code>	Vérification des mots-clés pour le module électrique

Table A.1: Sous-programme `init11` : initialisation des mots-clés et positionnement des variables

<code>ppiniv</code>	Branchement des physiques particulières pour l’initialisation des variables
<code>eliniv*</code>	Initialisation des variables spécifiques au module électrique
<code>elthht*</code>	Transformation température-enthalpie et enthalpie-température par interpolation sur la base du fichier de données <code>dp_ELE</code> (arc électrique uniquement)
<code>useliv</code>	Initialisation des variables par l'utilisateur
<code>elthht*</code>	Transformation température-enthalpie et enthalpie-température par interpolation sur la base du fichier de données <code>dp_ELE</code> (arc électrique uniquement)

Table A.2: Sous-programme `inivar` : initialisation des variables

phyvar	Calcul des propriétés physiques variables
ppphyv	Branchement des physiques particulières pour le calcul des propriétés physiques variables
elphyv	Calcul des propriétés physiques variables pour le module électrique. En arc électrique, les propriétés sont calculées par interpolation à partir des tables fournies dans le fichier de données <code>dp_ELE</code>
elthht*	Transformation température-enthalpie et enthalpie-température par interpolation sur la base du fichier de données <code>dp_ELE</code> (arc électrique uniquement)
uselph	Calcul par l'utilisateur des propriétés physiques variables pour le module électrique. Pour les études Joule, en particulier, les propriétés doivent être fournies ici sous forme de loi (des exemples sont disponibles)
usthht	Transformation température-enthalpie et enthalpie-température fournie par l'utilisateur (plus spécifiquement pour les études Joule, pour lesquelles on ne dispose pas d'un fichier de données à partir duquel réaliser des interpolations avec <code>elthht</code>)

Table A.3: Sous-programme `tridim` : partie 1 (propriétés physiques)

Précisions

- `ellecd`

Ce sous-programme réalise la lecture du fichier de données spécifique aux arcs électriques. On donne ci-dessous, à titre d'exemple, l'entête explicative et deux lignes de données d'un fichier type. Ces valeurs sont interpolées chaque fois que nécessaire par `elthht` pour déterminer les propriétés physiques du fluide à une température (une enthalpie) donnée.

```
# Nb d'especes NGAZG et Nb de points NPO (le fichier contient NGAZG blocs de NPO lignes chacun)
# NGAZG NPO
# 1 238
#
# Proprietes
# T H ROEL CPEL SIGEL VISEL XLABEL XKABEL
# Temperature Enthalpie Masse vol. Chaleur Conductivite Viscosite Conductivite Coefficient
# K J/kg volumique massique electrique dynamique thermique d'absorption
# kg/m3 J/(kg K) Ohm/m kg/(m s) W/(m K) -
#
# 300.00 14000. 1.6225 520.33 0.13214E-03 0.34224E-04 0.26712E-01 0.0000
# 400.00 65800. 1.2169 520.33 0.13214E-03 0.34224E-04 0.26712E-01 0.0000
```

- `elvarp`

Ce sous-programme permet de positionner les inconnues de calcul listées précédemment. On y précise également que la chaleur massique à pression constante est variable, ainsi que la conductivité de tous les scalaires associés au module électrique, hormis la conductivité de l'éventuel potentiel vecteur (celle-ci est uniforme et de valeur unité).

- `elprop`

C'est dans ce sous-programme que sont positionnées les propriétés stockées dans le tableau `PROPCE`, et en particulier la température, l'effet Joule et les forces de Laplace.

ppclim	Branchement des physiques particulières pour les conditions aux limites
uselcl	Intervention de l'utilisateur pour les conditions aux limites (en lieu et place de <code>usclim</code> , même pour les variables qui ne sont pas spécifiques au module électrique). Si un recalage automatique des potentiels est demandé (<code>IELCOR=1</code>), il doit être pris en compte ici par le biais des variables <code>DPOT</code> ou <code>COEJOU</code> (voir la description des conditions aux limites).
navstv	Résolution des équations de Navier-Stokes
predvv	Prédiction de la vitesse : prise en compte des forces de Laplace calculées dans <code>elflux</code> au pas de temps précédent
‘‘turb’’	Turbulence : résolution des équations pour les modèles nécessitant des équations de convection-diffusion
scalai*	Résolution des équations portant sur les scalaires associés aux physiques particulières et des scalaires ‘‘utilisateur’’
covofi	Résolution successive de l'enthalpie, du potentiel scalaire réel et, si <code>IPPMOD(IELJOU)=2</code> , de la partie imaginaire du potentiel scalaire (appels successifs à <code>covofi</code> qui appelle <code>eltssc</code> pour le calcul du terme d'effet Joule au second membre de l'équation de l'enthalpie)
elflux*	Calcul du champ électrique, de la densité de courant et de l'effet Joule (premier de deux appels au cours du pas de temps courant)
uselrc*	Recalage automatique éventuel de la densité de courant, de l'effet Joule, des potentiels et des coefficients <code>DPOT</code> et <code>COEJOU</code> . Ce recalage, s'il a été demandé par l'utilisateur (<code>IELCOR=1</code>), est effectué à partir du deuxième pas de temps.
covofi	Résolution successive, si <code>IPPMOD(IELARC)=2</code> , des trois composantes du potentiel vecteur. On procède par appels successifs à <code>covofi</code> qui appelle <code>eltssc</code> pour le calcul du second membre de l'équation de Poisson portant sur chaque composante du potentiel.
covofi	Résolution successive des <code>NGAZG-1</code> fractions massiques caractérisant la composition du fluide, s'il est multiconstituant. On procède par appels successifs à <code>covofi</code> .
elflux*	En arc électrique, calcul du champ magnétique et des trois composantes des forces de Laplace (deuxième et dernier appel au cours du pas de temps courant)
covofi	Résolution des scalaires ‘‘utilisateur’’

Table A.4: Sous-programme `tridim` : partie 2 (conditions aux limites, Navier-Stokes, turbulence et scalaires)

postlc	Post-traitement
ecrevo	Écriture des variables à post-traiter
uselen	Ajout au post-traitement de variables calculées par l'utilisateur. En exemple activé standard sont post-traités, s'ils existent, l'opposé du champ électrique (<i>i.e.</i> le gradient du potentiel scalaire, réel ou complexe), le vecteur densité de courant imaginaire (en effet Joule), le champ magnétique (en arc électrique) et enfin le module et l'argument du potentiel (en effet Joule, avec <code>IPPMOD(IELJOU)=4</code>)

Table A.5: Sous-programme `tridim` : partie 3 (post-traitement)

- **eliniv**

Ce sous-programme permet de réaliser les initialisations par défaut spécifiques au module.

En particulier, en $k - \varepsilon$, les deux variables turbulentes sont initialisées à 10^{-10} (choix historique arbitraire, mais réputé, lors de tests non référencés, permettre le démarrage de certains calculs qui échouaient avec une initialisation classique).

Les potentiels sont initialisés à zéro, de même que l'effet Joule. En arc électrique, les forces de Laplace sont initialisées à zéro.

Le fluide est supposé monoconstituant (seule est présente la première espèce).

En arc électrique, l'enthalpie est initialisée à la valeur de l'enthalpie du mélange supposé monoconstituant à la température **T0** donnée dans **usini1**. En effet Joule, l'enthalpie est initialisée à zéro (mais l'utilisateur peut fournir une valeur différente dans **useliv**).

- **elthht**

Ce sous-programme permet de réaliser (en arc électrique) les interpolations nécessaires à la détermination des propriétés physiques du fluide, à partir des tables fournies dans le fichier de données **dp_ELE**.

On notera en particulier que ce sous-programme prend en argument le tableau **YESP(NESP)** qui représente la fraction massique des **NGAZG** constituants du fluide. Dans le code, on ne résout que la fraction massique des **NGAZG-1** premiers constituants. Avant chaque appel à **elthht**, la fraction massique du dernier constituant doit être calculée comme le complément à l'unité des autres fractions massiques.

- **scalai, elflux, uselrc**

Le sous-programme **scalai** permet de calculer, dans l'ordre souhaité, les **NSCAPP** scalaires "physique particulière" associés au module électrique, puis de calculer les grandeurs intermédiaires nécessaires et enfin de réaliser les opérations qui permettent d'assurer le recalage automatique des potentiels, lorsqu'il est requis par l'utilisateur (*i.e.* si **IELCOR=1**).

Les **NSCAPP** scalaires "physique particulière" sont calculés successivement par un appel à **covofi** placé dans une boucle portant sur les **NSCAPP** scalaires. L'algorithme tire profit de l'ordre spécifique dans lequel ils sont définis et donc résolu (dans l'ordre : enthalpie, potentiel scalaire, potentiel vecteur, fractions massiques).

Pour éviter des variations trop brutales en début de calcul, le terme source d'effet Joule n'est pris en compte dans l'équation de l'enthalpie qu'à partir du troisième pas de temps.

Après la résolution de l'enthalpie et du potentiel scalaire (réel ou complexe), le sous-programme **elflux** permet de calculer les trois composantes du champ électrique (que l'on stocke dans des tableaux de travail), puis la densité de courant et enfin l'effet Joule, que l'on conserve dans le tableau **PROPCE(*,IPPROC(IEFJOU))** pour le pas temps suivant (après recalage éventuel dans **uselrc** comme indiqué ci-après). Lorsque **IPPMOD(IELJOU)=2**, l'apport de la partie imaginaire est pris en compte pour le calcul de l'effet Joule. Lorsque **IPPMOD(IELARC)=2** (arc électrique), le vecteur densité de courant est conservé dans **PROPCE**, en lieu et place des forces de Laplace **PROPCE(*,IPPROC(ILAPLA(i)))** : il est utilisé pour le calcul du potentiel vecteur dans le second appel à **elflux**, après recalage éventuel par **uselrc** (en effet, il n'est plus nécessaire de conserver les forces de Laplace à ce stade puisque la seule équation dans laquelle elles interviennent est l'équation de la quantité de mouvement et qu'elle a déjà été résolue).

À la suite de **elflux**, le sous-programme **uselrc** effectue le recalage permettant d'adapter automa-

tiquement les conditions aux limites portant sur les potentiels, si l'utilisateur l'a demandé (*i.e.* si `IELCOR=1`). On se reportera au paragraphe relatif aux conditions aux limites. On précise ici que le coefficient de recalage `COEPOT` permet d'adapter l'effet Joule `PROPCE(*,IPPROC(IEFJOU))` et la différence de potentiel `DPOT` (utile pour les conditions aux limites portant sur le potentiel scalaire au pas de temps suivant¹²). Pour les cas d'arc électrique, `COEPOT` permet également de recalculer le vecteur densité de courant que l'on vient de stocker temporairement dans `PROPCE(*,IPPROC(ILAPLA(i)))` et qui va servir immédiatement à calculer le potentiel vecteur. Pour les cas Joule, on recalcule en outre le coefficient `COEJOU` (utile pour les conditions aux limites portant sur le potentiel scalaire au pas de temps suivant).

Pour les cas d'arc électrique (`IPPMOD(IELARC)=2`), après `elflux` et `uselrc`, la résolution séquentielle des inconnues scalaires se poursuit dans `scalai` avec le calcul des trois composantes du potentiel vecteur. Le second membre de l'équation de Poisson considérée dépend de la densité de courant qui, dans `elflux`, a été temporairement stockée dans le tableau `PROPCE(*,IPPROC(ILAPLA(i)))` et qui, dans `uselrc`, vient d'être recalculée si `IELCOR=1`. Les valeurs du potentiel vecteur obtenues intègrent donc naturellement l'éventuel recalage.

Pour les cas d'arc électrique (`IPPMOD(IELARC)=2`), un second appel à `elflux` permet alors de calculer le champ magnétique que l'on stocke dans des tableaux de travail et les forces de Laplace que l'on stocke dans `PROPCE(*,IPPROC(ILAPLA(i)))` pour le pas de temps suivant (la densité de courant, que l'on avait temporairement conservée dans ce tableau, ne servait qu'à calculer le second membre de l'équation de Poisson portant sur le potentiel vecteur : il n'est donc plus nécessaire de la conserver).

La résolution séquentielle des inconnues scalaires spécifiques au module se poursuit dans `scalai`, avec le calcul des `NGAZG-1` fractions massiques permettant de définir la composition du fluide.

Pour terminer, `scalai` permet la résolution des scalaires "utilisateurs" (appel à `covofi` dans une boucle portant sur les `NSCAUS` scalaires utilisateur).

On peut remarquer pour finir que les termes sources des équations de la quantité de mouvement (forces de Laplace) et de l'enthalpie (effet Joule) sont disponibles à la fin du pas de temps n pour une utilisation au pas de temps $n + 1$ (de ce fait, pour permettre les reprises de calcul, ces termes sources sont stockés dans le fichier suite auxiliaire, ainsi que `DPOT` et `COEJOU`).

¹²A priori, `DPOT` n'est pas nécessaire pour les cas Joule.

EDF R&D	<i>Code_Saturne</i> 4.0.3 Theory Guide	<i>Code_Saturne</i> documentation Page 375/ 400
---------	--	---

Points à traiter

- **Mobilité ionique**

Le module est à développer.

- **Conditions aux limite en Joule**

La prise en compte de conditions aux limites couplées entre électrodes reste à faire.

- **Compressible en arc électrique**

Les développements du module compressible de *Code_Saturne* doivent être rendus compatibles avec le module arc électrique.

Part VII

Mesh Handling

Appendix B

Mesh Algorithms

In this chapter, we will describe algorithms used for several operations done by *Code_Saturne*.

Geometric Quantities

Normals and Face Centers

To calculate face normals, we take care to use an algorithm that is correct for any planar simple polygon, including non-convex cases. The principle is as follows: take an arbitrary point P_a in the same plane as the polygon, then compute the sum of the vector normals of triangles $\{P_a, P_i, P_{i+1}\}$, where $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ are the polygon vertices and $P_{n+1} \equiv P_0$. As shown on figure VII.B.1, some normals have a “positive” contribution while others have a “negative” contribution (taking into account the ordering of the polygon’s vertices). The length of the final normal obtained is equal to the polygon’s surface.

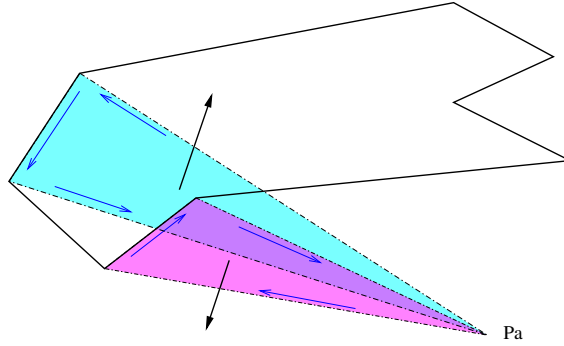


Figure VII.B.1: Face normals calculation principle

In our implementation, we take the “arbitrary” P_a point as the center of the polygon’s vertices, so as to limit precision problems due to truncation errors and to ensure that the chosen point is on the polygon’s plane.

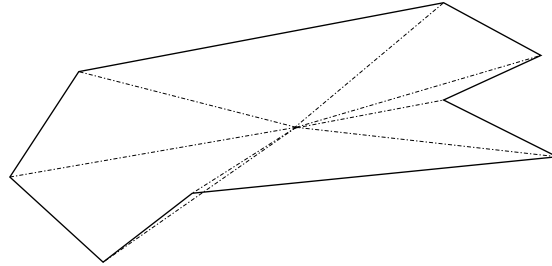


Figure VII.B.2: Triangles for calculation of face quantities

A face’s center is defined as the weighted center G of triangles T_i defined as $\{P_a, P_i, P_{i+1}\}$ and whose centers are noted G_i . Let O be the center of the coordinate system and \vec{n}_f the face normal, then:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{surf}(T_i) \cdot \vec{OG}_i}{\sum_{i=1}^n \text{surf}(T_i)} \quad \text{avec} \quad \text{surf}(T_i) = \frac{\vec{n}_{T_i} \cdot \vec{n}_f}{\|\vec{n}_f\|}$$

It is important to use the signed surface of each triangle so that this formula remains true in the case of non convex faces.

In real cases, some faces are not perfectly planar. In this case, a slight error is introduced, but it is difficult to choose an exact and practical (implementation and computing cost wise) definition of a polygon’s surface when its edges do not all lie in a same plane.

So as to limit errors due to warped faces, we compare the contribution of a given face to the the neighboring cell volumes (through Stoke's formula) with the contribution obtained from the separate triangles $\{P_a, P_i, P_{i+1}\}$, and we translate the initial center of gravity along the face normal axis so as to obtain the same contribution.

Cell Centers

If we consider that in theory, the Finite Volume method uses constant per-cell values, we can make without a precise knowledge of a given cell's center, as any point inside the cell could be chosen. In practice, precision (spatial order) depends on a good choice of the cell's center, as this point is used for the computation of values and gradients at mesh faces. We do not compute the center of the circumscribed sphere as a cell center, as this notion is usually linked to tetrahedral meshes, and is not easily defined and calculated for general polyhedra.

Let us consider a cell \mathcal{C} with p faces of centers of gravity G_k and surfaces of norm S_k . If O is the origin of the coordinate system, \mathcal{C} 's center G is defined as:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^p S_k \cdot \overrightarrow{OG_k}}{\sum_{k=1}^p S_k}$$

An older algorithm computed a cell \mathcal{C} 's center of gravity as the center of gravity of its vertices q of coordinates X_l :

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{l=1}^q \frac{\overrightarrow{OX_l}}{q}$$

In most cases, the newer algorithm gives better results, though there are exceptions (notably near the axis of partial meshes with rotational symmetry).

On figure VII.B.3, we show the center of gravity calculated with both algorithms on a 2D cell. On the left, we have a simple cell. On the right, we have added additional vertices as they occur in the case of a joining of non conforming faces. The position of the center of gravity is stable using the newer algorithm, whilst this point is shifted towards the joined sub-faces with the older, vertex-based algorithm (which worsens the mesh quality).



Figure VII.B.3: Choice of cell center

On figure VII.B.4, we show the possible effect of the choice of a cell's COG on the position of line segments joining the COG's of neighboring cells after a joining of non-conforming cells.

We see here that the vertex-based algorithm tends to increase non-orthogonality of faces, compared to the present face-based algorithm.

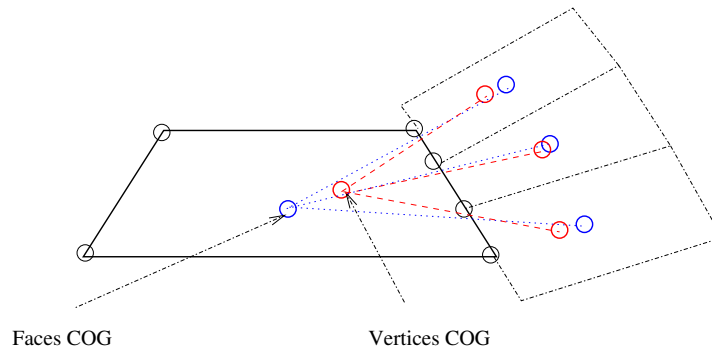


Figure VII.B.4: Choice of cell center and face orthogonality

Conforming Joining

The use of non conforming meshes is one of *Code_Saturne*'s key features, and the associated algorithms constitute the most complex part of the code's preprocessor. The idea is to build new faces corresponding to the intersections of the initial faces to be joined. Those initial faces are then replaced by their covering built from the new faces, as shown on figure VII.B.5 (from a 2D sideways perspective):

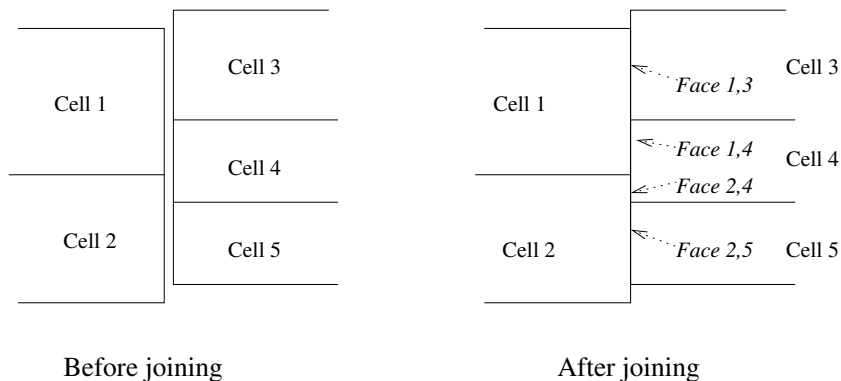


Figure VII.B.5: Principle of face joinings

We speak of *conforming joining*, as the mesh resulting from this joining is conforming, whereas the initial mesh was not.

The number of faces of a cell of which one side has been joined will be greater or equal to the initial number of faces, and the new faces resulting from the joining will not always be triangles or quadrangles, even if all of the initial faces were of these types. For this reason, the data representations of *Code_Saturne* and its preprocessor are designed with arbitrary simple polygonal faces and polyhedral cells in mind. We exclude polygons and polyhedra with holes from this representation, as shown on figure VII.B.6. Thus the cells shown in figure VII.B.6 cannot be joined, as this would require opening a "hole" in one of the larger cell's faces. In the case of figure VII.B.6b, we have no such problem, as the addition of another smaller cell splits the larger face into pieces that do not contain holes.

Robustness Factors

We have sought to build a joining algorithm that could function with a minimum of user input, on a wide variety of cases.

Several criteria were deemed important:

1. **determinism**: we want to be able to predict the algorithm's behavior. We especially want the

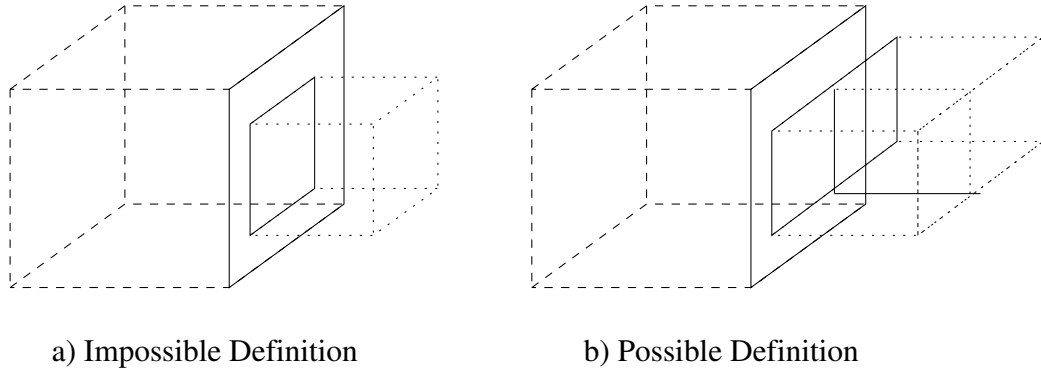


Figure VII.B.6: Possible case joinings

algorithm to produce the same results whether some mesh A was joined to mesh B or B to A . This might not be perfectly true in the implementation due to truncation errors, but the main point is that the user should not have to worry about the order in which he enters his meshes for the best computational results.¹

2. **non planar surfaces:** We must be able to join both curved surface meshes and meshes of surfaces assembled from a series of planar sections, but whose normal is not necessarily a continuous function of space, as shown on figure VII.B.7.

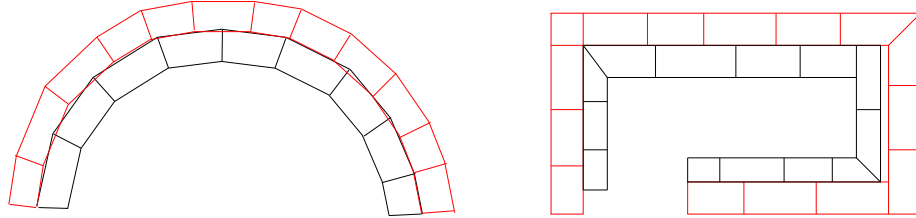


Figure VII.B.7: Initial surfaces

3. **spacing between meshes:** the surfaces to be joined may not match perfectly, due to truncation errors or precision differences, or to the approximation of curved surfaces by a set of planar faces. The algorithm must not leave gaps where none are desired.

Basic Principle

Let us consider two surfaces to join, as in figure VII.B.8: We seek to determine the intersections of the edges of the mesh faces, and to split these edges at those intersections, as shown on figure VII.B.9. We will describe more precisely what we mean by “intersection” of two edges in a later section, as the notion involves spanning of small gaps in our case.

The next step consists of reconstructing sub-faces derived from the initial faces. Starting from an edge of an initial face, we try to find closed loops, choosing at each vertex the leftmost edge (as seen standing on that face, normal pointing upwards, facing in the direction of the current edge), until we have returned to the starting vertex. This way, we find the shortest loop turning in the trigonometric direction. Each face to be joined is replaced by its covering of sub-faces constructed in this manner.

When traversing the loops, we must be careful to stay close to the plane of the original face. We thus consider only the edges belonging to a face whose normal has a similar direction to that of the face

¹The geometry produced by a joining is in theory independent from the order mesh inputs, but mesh numbering is not. The input order used for a calculation should thus be kept for any calculation restart.

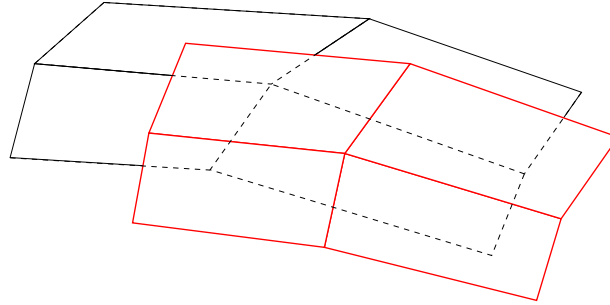


Figure VII.B.8: Surfaces to be joined

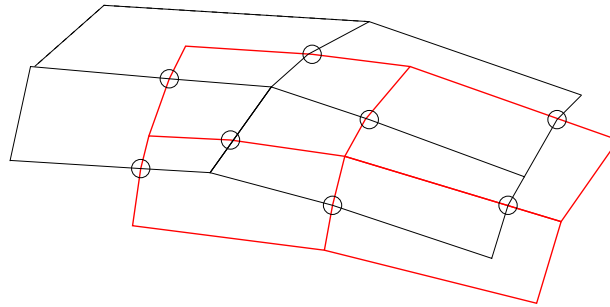


Figure VII.B.9: After edge intersections

being subdivided (i.e. the absolute value of the dot product of the two unitary normals should be close to 1).

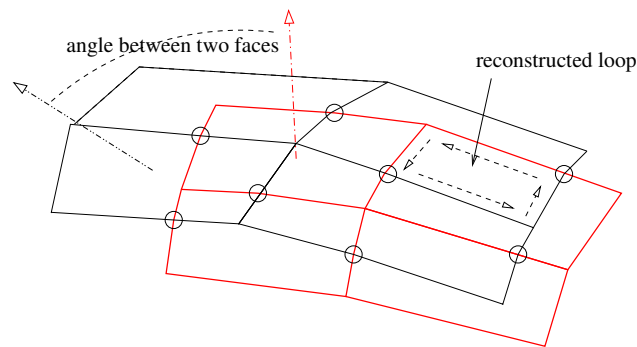


Figure VII.B.10: Sub-face reconstruction.

Once all the sub-faces are built, we should have obtained for two tangent initial faces two topologically identical sub-faces, each descending from one of the initial faces and thus belonging to a different cell. All that is required at this stage is to merge those two sub-faces, conserving the properties of both. The merged sub-face thus belongs to two cells, and becomes an internal face. The joining is thus finalized.

Simplification of Face Joinings

For a finite-volume code such as *Code_Saturne*, it is best that faces belonging to one same cell have neighboring sizes. This is hard to ensure when non-conforming boundary faces are split so as to be joined in a conforming way. On figure [VII.B.11](#), we see that this can produce faces of highly varying sizes when splitting a face for conformal joining.

It is possible to simplify the covering of a face so as to limit this effect, by moving vertices slightly on each side of the covering. We seek to move vertices so as to simplify the covering while deforming the mesh as little as possible.

One covering example is presented figure VII.B.11, where we show several simplification opportunities. We note that all these possibilities are associated with a given edge. Similar possibilities associated with other edges are not shown so that the figure remains readable. After simplification, we obtain the situation of figure VII.B.12.

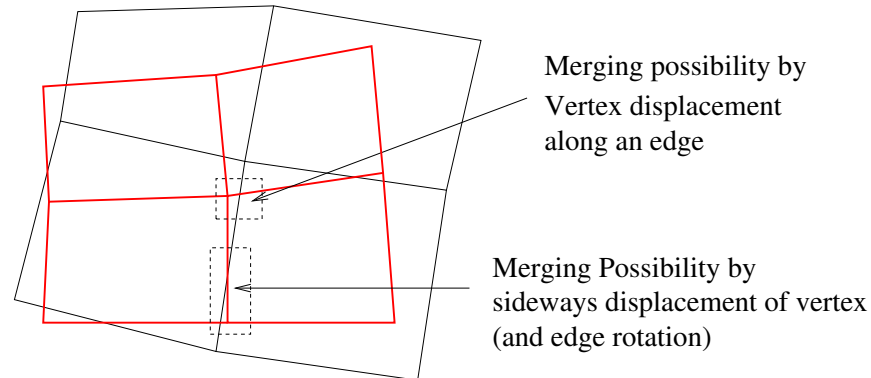


Figure VII.B.11: Simplification possibilities

After simplification, we have the following situation:

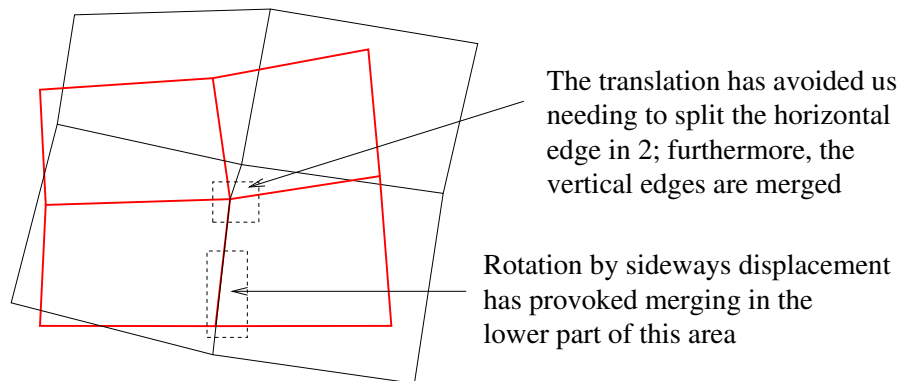


Figure VII.B.12: Faces after simplification

Processing

The algorithm's starting point is the search for intersections of edges belonging to the faces selected for joining. In 3D, we do not restrict ourselves to "true" intersections, but we consider that two edges intersect as soon as the minimum distance between those edges is smaller than a certain tolerance.

To each vertex we associate a maximum distance, some factor of the length of the smallest edge incident to that vertex. This factor is adjustable (we use 0.1 by default), but should always be less than 0.5. By default, this factor is usually multiplied by the smallest sine of the angles between the edges considered, so that the tolerance assigned to a given vertex is a good estimation of the smallest height/width/depth of the adjacent cells.

On figure VII.B.14, we illustrate this tolerance in 2d with a factor of 0.25, with red circles showing the tolerance region without the sine factor correction, and blue circle showing the tolerance with the sine correction.

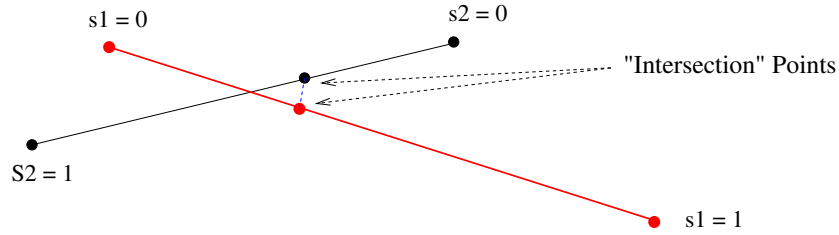


Figure VII.B.13: Intersection of edges in 3d space

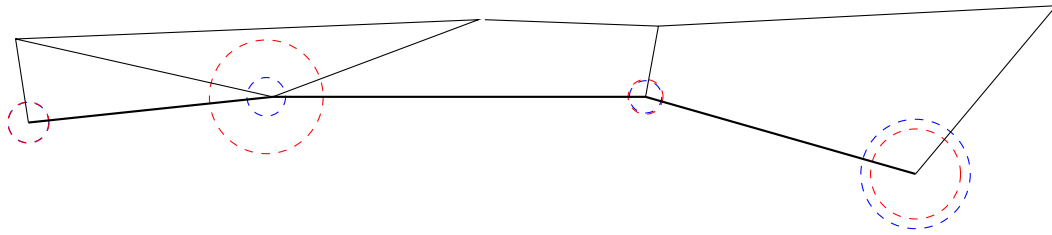


Figure VII.B.14: Join tolerance for vertices of joinable faces

We consider a neighborhood of an edge defined by the spheres associated to the minimal distances around each vertex and the shell joining this two spheres, as shown on figure VII.B.15. More precisely, at a point on the edge of linear abscissa s , the neighborhood is defined to be the sphere of radius $d_{max}(s) = (1 - s)d_{max}|_{s=0} + s \cdot d_{max}|_{s=1}$.

We will thus have intersection between edges $E1$ and $E2$ as soon as the point of $E1$ closest to $E2$ is within the neighborhood of $E2$, and that simultaneously, the point of $E2$ closest to $E1$ is inside the neighborhood of $E1$.

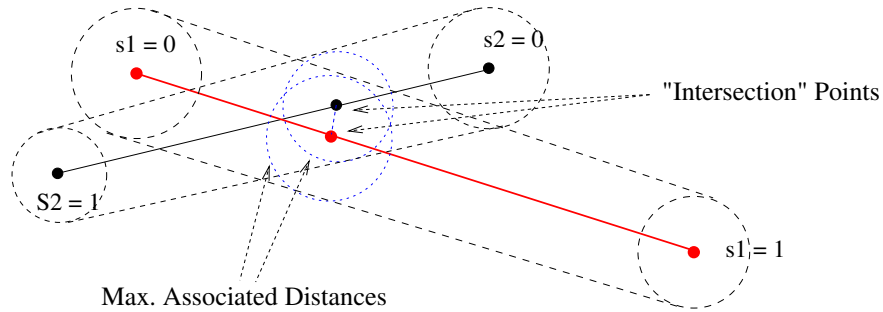


Figure VII.B.15: Tolerances for intersection of edges

If edge $E2$ cuts the neighborhood of a vertex of edge $E1$, and this vertex is also in $E2$'s neighborhood, we choose this vertex to define the intersection rather than the point of $E1$ closest to $E2$. This avoids needlessly cutting edges. We thus search for intersections with the following order of priority: vertex-vertex, vertex-edge, then edge-edge. If the neighborhoods associated with two edges intersect, but the criterion:

$$\exists P1 \in A1, \exists P2 \in A2, d(P1, P2) < \min(d_{max}(P1), d_{max}(P2))$$

is not met, we do not have intersection. These cases are shown on figure VII.B.16.

Problems Arising From the Merging of Two Neighboring Vertices

If we have determined that a vertex V_1 should be merged with a vertex V_2 and independently that this vertex V_2 should be merged with a vertex V_3 , then V_1 and V_3 should be merged as a result, even though these vertices share no intersection. We refer to this problem as merging transitivity and show

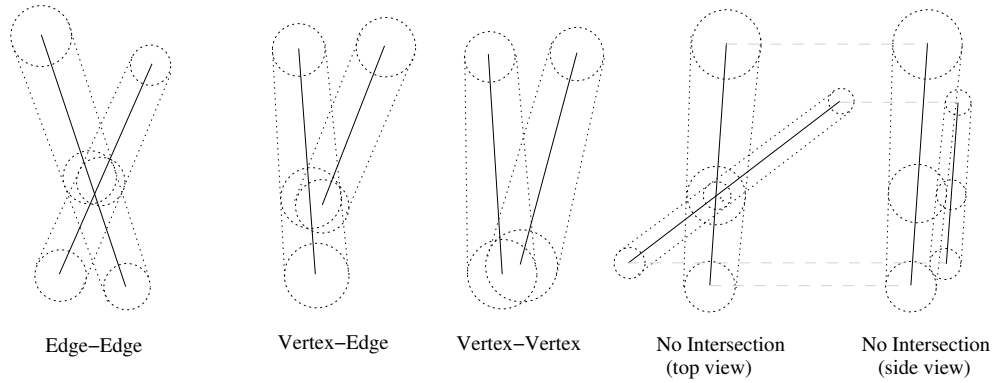


Figure VII.B.16: Tolerances for intersection of edges

theoretical situations leading to it on figure [VII.B.17](#).

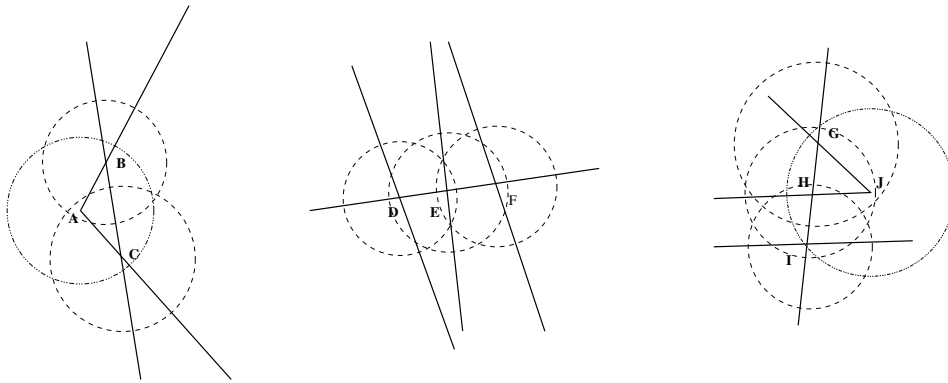


Figure VII.B.17: Merging transitivity.

On figure [VII.B.18](#), we show cases more characteristic of what we can obtain with real meshes, given that the definition of local tolerances reduces the risk and possible cases of this type of situation.

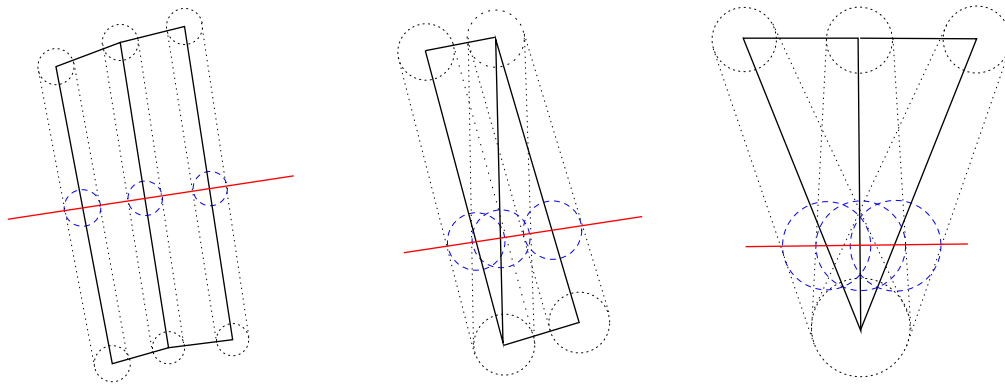


Figure VII.B.18: Merging transitivity (real cases)

Figure [VII.B.19](#) illustrates the effect of a combination of merges on vertices belonging to a same edge. We see that in this case, edges initially going through vertices G and J are strongly deformed (i.e. cut into sub-edges that are not well aligned). Without transitivity, edges going through vertices descended only from the merging of (G, H) on one hand and (L, J) on the other hand would be much closer to the initial edges.

To avoid excessive simplifications of the mesh arising from a combination of merges, we first build “chains” of intersections which should be merged, compute the coordinates of the merged intersection, and then check for all intersection couples of a given chain if excessive merging would occur. If this is the case, we compute a local multiplicative factor (< 1) for all the intersections from this chain, so as to reduce the merge tolerance and “break” this chain into smaller subchains containing only intersections withing each other’s merging distances.

Tolerance reduction may be done in multiple steps, as we try to break the weakest equivalences (those closest to the merge tolerance bounds) first.

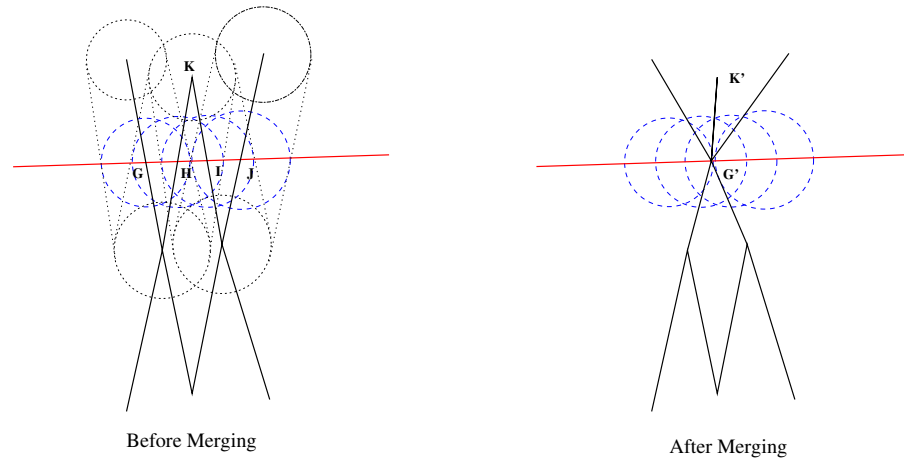


Figure VII.B.19: Merging transitivity for an edge

On figure VII.B.20, we show the possible effect of merge transitivity limitation on vertices belonging to several edges. Here, breaking of excessive intersection mergings should lead to merging of intersections (G, H, J) , while I is not merged with another intersection.

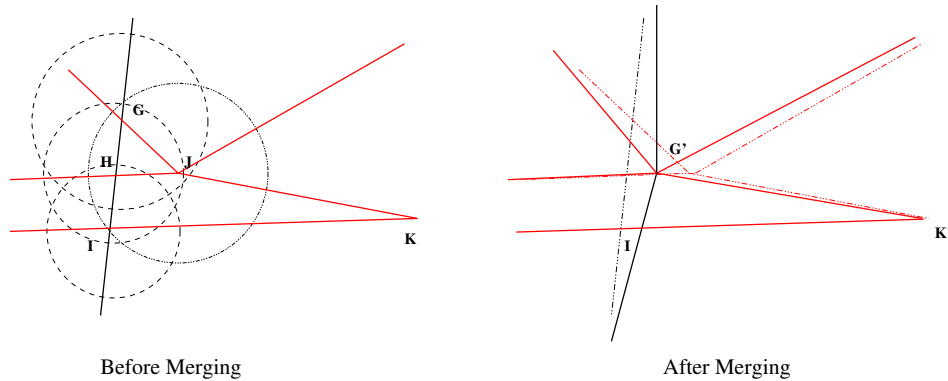


Figure VII.B.20: Limited merging transitivity

Algorithm Optimization

Certain factors influence both memory and CPU requirements. We always try to optimize both, with a slight priority regarding memory requirements.

When searching for edge intersections, we try to keep the number of intersection tests to a minimum. We compute coordinate axis-aligned bounding boxes associated with each joinable face (augmented by the tolerance radii of associated vertices), and run a full edge intersection test only for edges belonging to faces whose bounding boxes intersect.

To determine which face bounding boxes intersect, we build a “bounding box-tree” , similar to an octree, but with boxes belonging to all the octree leaves they overlap. When running in parallel using MPI, a first, coarser version of the tree with the same maximum depth on all ranks is built so as to estimate the optimal distribution of data, to balance both the computational and memory load. Bounding boxes are then migrated to the target ranks, where the final box-tree (which may have different depth on different ranks) is built. Assigning the global ids of the matching faces to the bounding boxes ensures the search results are usable independently of the distribution across MPI ranks.

Influence on mesh quality

It is preferable for a FV solver such as *Code_Saturne* that the mesh be as “orthogonal” as possible (a face is perfectly orthogonal when the segment joining its center of mass to the center of the other cell to which it belongs is perfectly aligned with its normal). It is also important to avoid non planar faces ². By the joining algorithm’s principle, orthogonal faces are split into several non-orthogonal sub-faces. In addition, the higher the tolerance setting, the more merging of neighboring vertices will tend to warp faces on the sides of cells with joined faces.

It is thus important to know when building a mesh that a mesh built by joining two perfectly regular hexahedral meshes may be of poor quality, especially if a high tolerance value was used and the cell-sizes of each mesh are very different. It is thus important to use the mesh quality criteria visualizations available in *Code_Saturne*, and to avoid arbitrary joinings in sensible areas of the mesh. When possible, joining faces of which one set is already a subdivision of another (to construct local refinements for example) is recommended.

Periodicity

We use an extension of the non-conforming faces joining algorithm to build periodic structures. The basic principle is described figure [VII.B.21](#):

- Let us select a set of boundary faces. These faces (and their edges and vertices) are duplicated, and the copy is moved according to the periodic step (a combination of translation and rotation). A link between original and duplicate entities is kept.
- We use a conforming joining on the union of selected faces and their duplicates. This joining will slightly deform the mesh so that vertices very close to each other may be merged, and periodic faces may be split into conforming sub-faces (if they are not already conforming).
- If necessary, the splitting of duplicated, moved, and joined faces is also applied to the faces from which they were descended.
- Duplicated entities which were not joined (i.e. excess entities) are deleted.

It is thus not necessary to use periodic boundary conditions that the periodic surfaces be meshed in a periodic manner, though it is always best not to make too much use of the comfort provided by conforming joinings, as it can lower mesh quality (and as a consequence, quality of computational results).

We note that it could seem simpler to separate periodic faces in two sets of “base” and “periodic” faces, so as to duplicate and transform only the first set. This would allow for some algorithm simplifications and optimizations, but here we gave a higher priority to the consistency of user input for specification of face selections, and the definition of two separate sets of faces would have made user input more

²Computation of face COG’s includes a correction such that the contribution of a warped face to a cell’s volume is the same as that of the same face split into triangles joining that face’s COG and outer edges, but this correction may not be enough for second order values.

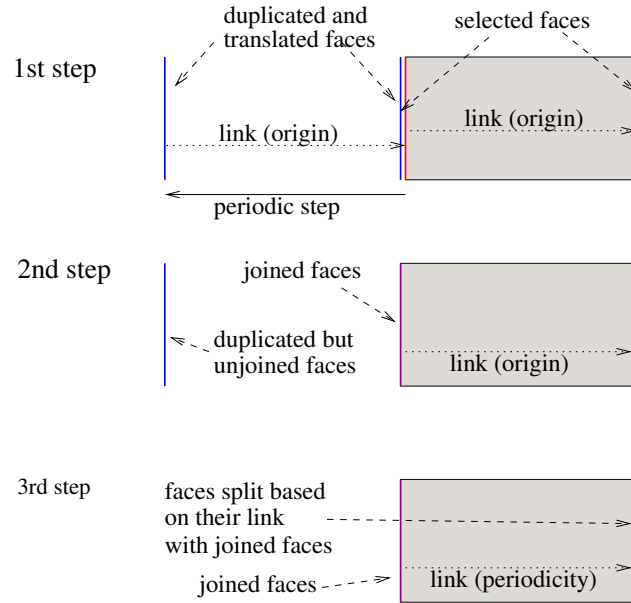


Figure VII.B.21: Periodic joining principle (translation example)

complex. As for the basic conforming joining, it is usually not necessary to specify face selections for relatively simple meshes (in which case all faces on the mesh boundary are selected).

Triangulation of faces

Face triangulation is done in two stages. The first stage uses an *ear cutting* algorithm, which can triangulate any planar polygon, whether convex or not. The triangulation is arbitrary, as it depends on the vertex chosen to start the loop around the polygon.

The second stage consists of flipping edges so that the final triangulation is constrained Delaunay, which leads to a more regular triangulation.

Initial triangulation

The algorithm used is based on the one described in [The98]. Its principle is illustrated figure VII.B.22. We start by checking if the triangle defined by the first vertices of the polygon, (P_0, P_1, P_2) is an “ear”, that is if it is interior to the polygon and does not intersect it. As this is the case on this example, we obtain a first triangle, and we must then process the remaining part of the polygon. At the next stage triangle (P_0, P_2, P_3) is also an ear, and may be removed.

At stage 2, we see that the next triangle which is a candidate for removal, (P_0, P_3, P_4) is not an ear, as it is not contained in the remaining polygon. We thus shift the indexes of vertices to consider, and see at stage 4 that triangle (P_3, P_4, P_5) is an ear and may be removed.

The algorithm is built in such a way that a triangle is selected based on the last vertex of the last triangle considered (starting from triangle (P_0, P_1, P_2)). Thus, we consider at stage 5 the triangle ending with P_5 , that is (P_0, P_3, P_5) . Once this triangle is removed, the remaining polygon is a triangle, and its handling is trivial.

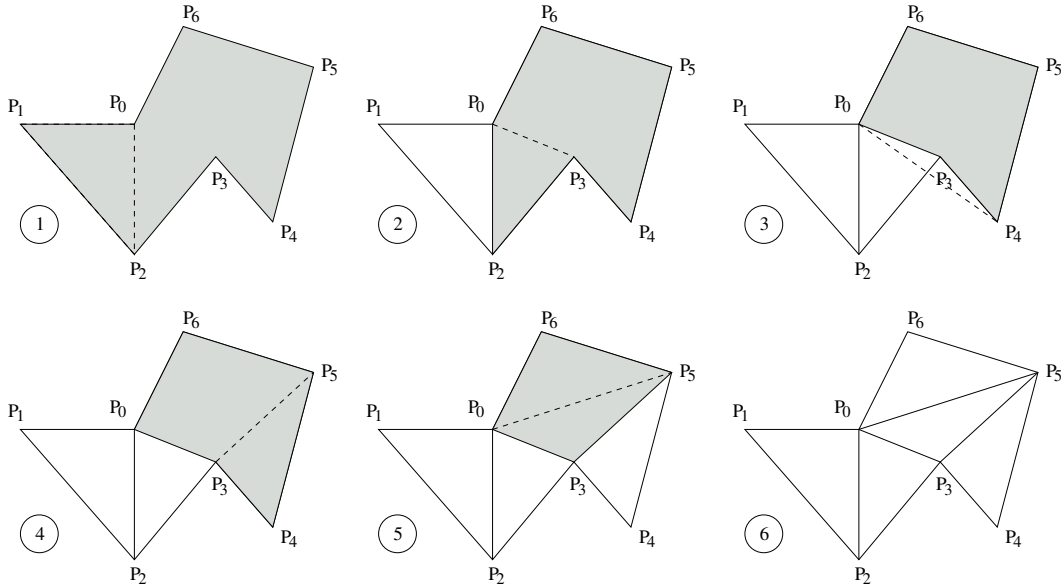


Figure VII.B.22: Principle of face triangulation

Improving the Triangulation

We show on figures VII.B.23 and VII.B.24 two examples of a triangulation on similar polygons whose vertices are numbered in a different manner.

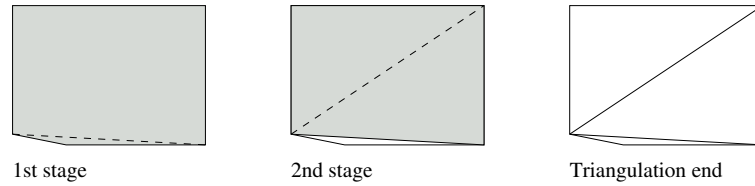


Figure VII.B.23: Triangulation example (1)

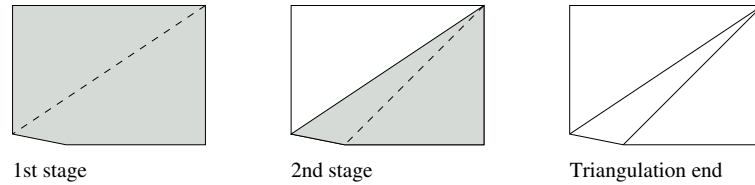


Figure VII.B.24: Triangulation example (2)

Not only is the obtained triangulation different, but it has a tendency to produce very flat triangles. Once a first triangulation is obtained, we apply a corrective algorithm, based on edge flips so as to respect the Delaunay condition [She99].

This condition is illustrated figure VII.B.25. In the first case, edge $\overline{P_i P_j}$ does not fulfill the condition, as vertex P_l is contained in the circle going through P_i, P_j, P_k . In the second case, edge $\overline{P_k P_l}$ fulfills this condition, as P_i is not contained in the circle going through P_j, P_k, P_l .

If triangles (P_i, P_k, P_j) and (P_i, P_j, P_l) originated from the initial triangulation of a same polygon, they would thus be replaced by triangles (P_i, P_k, P_l) and (P_l, P_k, P_j) , which fulfill the Delaunay condition.

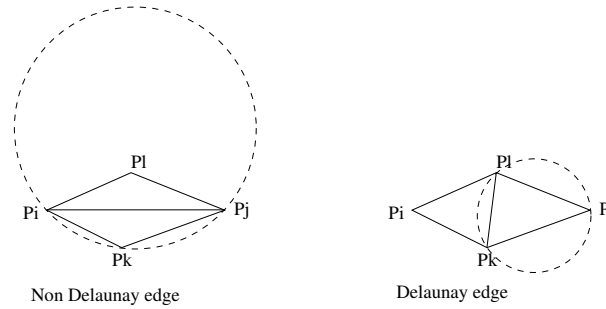


Figure VII.B.25: Delaunay condition (2)

In the case of a quadrangle, we would be done, but with a more complex initial polygon, these new triangles could be replaced by others, depending on their neighbors from the same polygon.

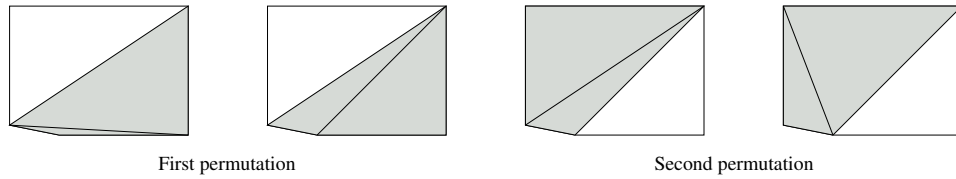


Figure VII.B.26: Edge flip example (1)

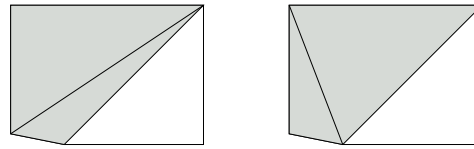


Figure VII.B.27: Edge flip example (2)

On figures VII.B.26 and VII.B.27, we illustrate this algorithm on the same examples as before (figures VII.B.23 and VII.B.24). We see that the final result is the same. In theory, the edge flipping algorithm always converges. To avoid issues due to truncation errors, we allow a tolerance before deciding to flip two edges. Thus, we allow that the final triangulation only “almost” fulfill the Delaunay condition.

In some cases, especially that of perfect rectangles, two different triangulations may both fulfill the Delaunay condition, notwithstanding truncation errors. For periodicity, we must avoid having two periodic faces triangulated in a non-periodic manner (for example, along different diagonals of a quadrangle). In this specific case, we triangulate only one face using the geometric algorithm, and then apply the same triangulation to its periodic face, rather than triangulate both faces independently.

Unwarping algorithm

The unwarping algorithm is a smoother, its principle is to mitigate the local defects by averaging the mesh quality. It moves vertices using an iterative process which is expected to converge to a mesh with better averaged warping criteria.

Warping criterion in Code_Saturne

The warp face quality criterion in Code_Saturne represents the non coplanarity in space of N points $P_{i=1:N}$ ($N > 3$).

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 391/400
---------	--	---

Let f be the face defined by $P_{i=1:Nbv(f)}$, the center of gravity O_f and \vec{n}_f the face normal, the warping criterion is calculated for each face by the “maximum” angle between $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ and $\vec{n}_f^\perp \forall i \in [1, Nbv(f)]$ where $P_{Nbv(f)+1} = P_1$. For consistency purposes, the warping criterion $warp_f$ is defined in degree for each face of the mesh \mathcal{M} as:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \quad warp_f = 90 - \arccos \left(\max_{i \in [1, Nbv(f)]} \left(\cos(\overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \vec{n}_f) \right) \right) \frac{180}{\pi}$$

Unwarping method

The principle of unwarping algorithm is to move vertices in the midplane of the faces using an iterating process. At each iteration the algorithm tries to approach vertices from the midplane of the face without increasing the warping of the neighbours faces.

The displacement is calculated by projecting vertices onto the plane defined by \vec{n}_f and the center of gravity O .

For the face f , $\forall i \in [1, Nbv(f)]$, the vertices P_i are displaced by the vector $\lambda_{P_i}^f$

$$\forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = (\overrightarrow{P_i O_f} \cdot \vec{n}_f) \vec{n}_f$$

In most cases, a vertex is shared by many faces $f_{j=1:Nbf(P_i)}$, and its final displacement is:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = \sum_{j=1:Nbf(P_i)} \lambda_{P_i}^{f_j}$$

This displacement technique may cause problems because the contributions $\lambda_P^{f_i}$ and $\lambda_P^{f_k}$ can be “contradictory”. Moreover, if a small and a large face are neighbours, the large face contribution imposes a too big displacement to the shared vertices and the warping criterion can be deteriorated.

Displacements control

The weighting coefficients shown below allow us to reduce the conflicting contributions and equilibrate the contributions between small and large faces.

Face weighting Every iteration, for each face the warping criterion is computed. It is used to give more weight to the warp faces. After the renormalisation of the warping criterion, a new displacement formula is obtained:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = \sum_{j=1:Nbf(P_i)} \frac{warp_{f_j}}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f} \lambda_{P_i}^{f_j}$$

Vertex weighting Every iteration, for each vertex $P \in \mathcal{M}$, the vertex tolerance is computed:

$$\forall P \in \mathcal{M}, \quad vtxtol_P = \frac{\min_{P' \in nb(P)} PP'}{\max_{Q \in \mathcal{M}} \min_{Q' \in nb(Q)} QQ'}$$

where $nb(Q)$ are the first neighbors of the point Q .

This criterion is used to reduce the vertex displacement when a vertex lies on an edge much smaller than the average length. Another vertex tolerance may have been chosen. For example a more “local coefficient” can be defined as:

$$\forall P \in \mathcal{M}, \quad vtxtol_P^{local} = \frac{\min_{P' \in nb(P)} PP'}{\max_{P' \in nb(P)} PP'}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 392/400
---------	--	---

This “local coefficient” has been noticed to be less efficient than the first one. That is why the first definition is used in *Code_Saturne*.

The unwarping displacement is updated as below:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = vtxtol_{P_i} \sum_{j=1:Nbf(P_i)} \frac{warp_{f_j}}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f} \lambda_{P_i}^{f_j}$$

Movement coefficient To ensure a better convergence, all vertices’ movements are multiplied by a scale factor Cm (where $Cm \leq 1$). This coefficient helps to converge to the best solution by preventing a too big movement in the wrong direction. In *Code_Saturne* the default value is set to 0.10.

The unwarping displacement is then:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = Cm * vtxtol_{P_i} \sum_{j=1:Nbf(P_i)} \frac{warp_{f_j}}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f} \lambda_{P_i}^{f_j}$$

Maximum displacement To reduce the “cell reversal” risk, the maximum displacement is limited for each vertex $P \in \mathcal{M}$ to $Md = 0.10 \min_{P \in nb(P)} PPI$.

Finally, the complete unwarping displacement formula is defined as:

$$\forall f \in \mathcal{M}, \forall i \in [1, Nbv(f)], \quad \lambda_{P_i}^f = \min(Cm * vtxtol_{P_i} \sum_{j=1:Nbf(P_i)} \frac{warp_{f_j}}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f} \lambda_{P_i}^{f_j}, Md)$$

Stop criterion

The algorithm automatically stops according to the warp face criterion.

1st case: the algorithm converges The algorithm stops when, at the i^{th} iteration, the relation below is verified.

$$1 - \frac{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f^i}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f^{i-1}} < 1.E - 4$$

2nd case: the algorithm diverges The algorithm stops when at the i^{th} iteration the relation below is verified.

$$\frac{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f^i}{\max_{f \in \mathcal{M}} warp_f^{i-1}} > 1.05$$

It means that the current iteration degrades the previous one. The obtained mesh is the result of the $(i - 1)^{th}$ iteration.

3rd case: the maximum number of iterations is reached The algorithm stops after N_{max} iterations (51 by default in *Code_Saturne*).

Specific treatment for boundary faces

The unwarping algorithm may modify the mesh geometry. The function `fit_by_feature` allows to fix boundary faces according to a feature angle. The feature angle between a vertex and one of its adjacent faces is defined by the angle between the vertex normal and the face normal.

A vertex normal is defined by the average of the normals of the faces sharing this vertex.

This function fixes a vertex if one of its feature angles is less than $\cos(\theta)$ where θ is the maximum feature angle (in degrees) defined by the user. In fact, if $\theta = 0^\circ$ all boundary vertices will be fixed, and if $\theta = 90^\circ$ all boundary vertices will be free.

Fixing all boundary vertices ensures the geometry is preserved, but reduces the smoothing algorithm's effectiveness.

Appendix C

Mesh Quality

Flagging of bad cells

No current meshing tool that we know of is capable of generating a complex mesh in reasonable time without some cells of bad “quality”. To reduce the number of iterations required to obtain an acceptable mesh, we may try to flag the few bad quality cells that are considered almost unavoidable, so as to limit their impact on the solver’s robustness.

As of the current version of *Code_Saturne*, no specific treatment is done, but “bad cells” are marked, so as to allow the user to know where to expect issues with the mesh.

By default, the mesh quality is inspected at the very beginning of every calculation. The estimated quality is defined by at least five criteria:

- the cell’s non-orthogonality,
- the cell’s offset,
- the cell’s distorsion (or least-squares gradient criteria),
- the cell’s volume ratio,
- “guilt by association”,
- and possibly supplementary user criteria.

Supplementary user criteria will not be discussed here but an example of how to define them is provided in the user subroutine `cs_user_mesh.c`.

As a rule of thumb users need to be aware that bad cells could lead to a degradation of the solution quality, or worse, to a failed calculation. Generally, a cell quality is degraded by non-conforming joining operations, especially when joined cells have different sizes or thicknesses, but even painstakingly built block-structured meshes may have cells of bad quality when they involve a combination of warping, anisotropy and refinement variation.

Cell non-orthogonality

For a finite volume solver, the mesh cells should be as “orthogonal” as possible. Consequently, the compliance with this criterion is of particular interest in order to avoid the degradation of the solution quality.

A cell’s non-orthogonality relative to a face is evaluated as:

$$Q_{f_{ij}}^{ortho} = \frac{\underline{IJ} \cdot \underline{S}_{ij}}{|\underline{IJ}| |\underline{S}_{ij}|} \quad (\text{VII.C.1})$$

where \underline{IJ} is a distance vector between two consecutive cell centers and \underline{S}_{ij} is the surface vector normal to the face.

Orthogonal cells have a value of Q_f^{ortho} which tends towards 1.0 for all the faces. Therefore, a cell is flagged bad if $Q_f^{ortho} < 0.1$ for any of its faces.

Cell offset

A cell’s offset (relative to a face) is evaluated in a manner consistent with iterative gradient reconstruction:

$$Q_{f_{ij}}^{offset} = 1 - \sqrt[3]{\frac{|\underline{OF}| |\underline{S}_{ij}|}{|\Omega_i|}} \quad (\text{VII.C.2})$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 396/400
---------	--	---

where Ω_i is the cell's volume, \underline{S}_{ij} is the surface normal to the face, and \underline{OF} is the difference between the face's center and its intersection with the segment joining adjacent cell centers.

Orthogonal cells have a value of Q^{offset} which tends towards 1.0. Therefore, a cell is flagged bad if $Q^{offset} < 0.1$ for any of its faces.

Cell distortion

This criterion evaluates a distortion level based on least squares gradient computation. As a first step, the geometric matrix containing information on distance vectors between neighboring cells is built (see the construction of the C matrix in the least squares gradient computation for more details). In a second step, the matrix's eigenvalues are estimated using a Jacobi transformation method. The min/max eigenvalues ratio is used as the cell's distortion criteria:

$$Q_{LSQ} = \frac{\min(|C_{egv}|)}{\max(|C_{egv}|)}$$

where C_{egv} are the eigenvalues of the geometric matrix build according to the least squares gradient computation.

Cubic cells have a value of Q_{LSQ} which tends towards 1.0. Therefore, a cell is flagged bad if $Q_{LSQ} < 0.1$.

Cell volume ratio

A cell's volume ratio criteria gives an estimation of cell's characteristic size continuity. It is evaluated as:

$$Q_{vol} = \min\left(\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right)$$

where V_1 and V_2 are the respective volumes of two neighboring cells.

Neighboring cells with the same size have a value of Q_{vol} which tends towards 1.0. Therefore, two neighboring cells are flagged bad if $Q_{vol} < 0.1^2$.

Guilt by association

Once we have finished with determining which cells are flagged "bad", the last step is to mark initially "good" cells (according to the above criteria) as "bad" when all their neighbors are flagged "bad".

Part VIII

Appendices

C.1 Tensorial and index notations

In a fixed reference frame $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, taking the Einstein convention on indices into account:

0^{th} order tensor: scalar T

1^{st} order tensor: vector $\underline{u} = u_i \underline{e}_i$

2^{nd} order tensor: matrix $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

3^{rd} order tensor: $\underline{\underline{\underline{a}}} = a_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$

\vdots

n^{th} order tensor: $a^{(n)} = a_{i_1 i_2 \dots i_n} \underline{e}_{i_1} \otimes \underline{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_n}$

Operators	Symbols	Formulae
tensorial product	\otimes	$\underline{u} \otimes \underline{u} = u_i u_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ $a^{(n)} \otimes b^{(m)} = a_{i_1 \dots i_n} b_{j_1 \dots j_m} \underline{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_n} \otimes \underline{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{j_m}$
dot product	\cdot	$\underline{u} \cdot \underline{u} = u_i u_i$ $a^{(n)} \cdot b^{(m)} = a_{i_1 \dots i_{n-1} k} b_{k j_2 \dots j_m} \underline{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_{n-1}} \otimes \underline{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{j_m}$
double dot product	$:$	$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \sigma_{ij}$ $a^{(n)} : b^{(m)} = a_{i_1 \dots i_{n-2} kl} b_{kl j_3 \dots j_m} \underline{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_{n-2}} \otimes \underline{e}_{j_3} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{j_m}$
vectorial product	\times or \wedge	$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

Table C.1: Tensorial operators.

C.2 Diferential operators and standard relationships

$$\text{div} (\underline{\text{rot}} \underline{u}) = 0$$

$$\underline{\text{rot}} (\underline{\nabla} T) = 0$$

$$\text{div} (\alpha \underline{u}) = \alpha \text{div} \underline{u} + \underline{\nabla} \alpha \cdot \underline{u}$$

$$\underline{\text{rot}} (\alpha \underline{u}) = \alpha \underline{\text{rot}} \underline{u} + \underline{\nabla} \alpha \times \underline{u}$$

$$\text{div} (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{\text{rot}} \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{\text{rot}} \underline{v}$$

$$\underline{\text{rot}} (\underline{\text{rot}} \underline{u}) = \underline{\nabla} (\text{div} \underline{u}) - \underline{\Delta} \underline{u}$$

$$\underline{\nabla} (\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\underline{\text{grad}} \underline{u}) \cdot \underline{v} + (\underline{\text{grad}} \underline{v}) \cdot \underline{u} + \underline{u} \times \underline{\text{rot}} \underline{v} + \underline{v} \times \underline{\text{rot}} \underline{u}$$

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 399/ 400
---------	--	--

Operators	Symbols	Definitions	Cartesian formulae
gradient	∇ <i>or</i> $\underline{\nabla}$	$\nabla^{(n+1)} [a^{(n)}] \cdot \underline{dx} = da^{(n)} _{\underline{dx}}$	$\underline{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \underline{e}_i$ $\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_j} \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ $\nabla^{(n+1)} [a^{(n)}] = \frac{\partial a^{(n)}}{\partial x_{i_{n+1}}} \otimes \underline{e}_{i_{n+1}}$
divergence	$\nabla \cdot$ <i>or</i> $\underline{\text{div}}$	$\nabla^{(n-1)} \cdot [a^{(n)}] = \nabla^{(n+1)} [a^{(n)}] : \underline{\underline{1}}$	$\underline{\text{div}} \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ $\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$ $\underline{\text{div}}^{(n-1)} [a^{(n)}] = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_{i_n}} \underline{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_{n-1}}$
Laplacian	Δ <i>or</i> ∇^2	$\Delta a^{(n)} = \underline{\text{div}}^{(n)} \{ \nabla^{(n+1)} [a^{(n)}] \}$	$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$ $\underline{\Delta} \underline{u} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \underline{e}_i$ $\Delta^{(n)} a^{(n)} = \frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial x_{i_{n+1}} \partial x_{i_{n+1}}} = \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_{i_{n+1}} \partial x_{i_{n+1}}} \underline{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_n}$
rotational	$\underline{\nabla} \times$ <i>or</i> $\underline{\text{rot}}$		$\underline{\text{rot}} \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

Table C.2: Differential operators.

Stokes Theorem

$$\int_S \underline{\text{rot}} \underline{u} \cdot \underline{dS} = \int_{\partial S} \underline{u} \cdot \underline{dl}$$

where \underline{dS} is the outward surface element.

Divergence theorem [Green-Ostrogradski]

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}}^{(n-1)} [a^{(n)}] \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} a^{(n)} \cdot \underline{dS}$$

Rotational theorem

$$\int_{\Omega} \underline{\text{rot}} \underline{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{u} \times \underline{dS}$$

Leibnitz theorem

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} a^{(n)} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial a^{(n)}}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} a^{(n)} \underline{v} \cdot \underline{dS}$$

where \underline{v} is control volume Ω velocity.

Part IX

References

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 401/ 400
---------	--	--

- [AS03] B. Aupoix and P.R. Spalart. Extensions of the spalart-allmaras turbulence model to account for wall roughness. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24(4):454 – 462, 2003.
- [BD78] R. Borghi and D. Dutoya. On the scale of the fluctuation in turbulent combustion. *17th Int.Symp. on Combustion*, 1978.
- [BL12] F. Billard and D. Laurence. A robust $k - \varepsilon - \sqrt{v^2}/k$ elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 33(1):45 – 58, 2012.
- [BM00] M. Boucker and J.D. MattÃ©i. Proposition de modification des conditions aux limites de paroi turbulente pour le solveur commun dans le cadre du modÃ©le $k - \varepsilon$ standard. EDF Report HI-81/00/019/A(in French)., 2000.
- [Cho68] Alexandre Joel Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [Cur63] R.L. Curl. Dispersed phase mixing: theory and effects in simple reactors. *AIChE J.*, 9:175–181, 1963.
- [Dur91] PA Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(1):1–13, 1991.
- [Esc11] A. Escaich. *Une description améliorée de la combustion turbulente dans les flammes de charbon pulvérisé*. PhD thesis, Université de Rouen, 2011.
- [Iac01] G. Iaccarino. Predictions of a turbulent separated flow using commercial cfd codes. *Journal of Fluids Engineering*, 123:819, 2001.
- [JH02] S. Jakirlic and K. Hanjalic. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation. *Journal of fluid mechanics*, 459(1):139–166, 2002.
- [JL72] WP Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2):301–314, 1972.
- [K76] H. Kobayashi and ??? *16th Int.Symp. on Combustion*, pages 425–441, 1976.
- [LRR75] BE Launder, G Jr Reece, and W Rodi. Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure. *Journal of fluid mechanics*, 68(03):537–566, 1975.
- [LS74] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2):269 – 289, 1974.
- [LW00] P.A. Libby and F.A. Williams. A presumed pdf analysis of lean partially premixed turbulent combustion. *Combust. Sci. Technol.*, 161:351–390, 2000.
- [MH02] Rémi Manceau and Kemal Hanjalić. Elliptic blending model: A new near-wall reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids*, 14:744, 2002.
- [Ner09] P. Nerisson. *Modélisation du Transfert des Aérosols dans un Local Ventilé*. PhD thesis, IRSN/INPT, 2009.
- [PLD96] S. Parneix, D. Laurence, and P. Durbin. Second moment closure analysis of the backstep flow database. In *Proc. 1996 Summer Program, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ*, pages 47–62, 1996.
- [R05] V. Robin and ??? Relevance of approximated pdf shapes for turbulent combustion modeling with variable equivalence ratio. *ICDERS*, 2005.
- [RCP04] G. Ribert, M. Champion, and P. Plion. Modeling turbulent reactive flows with variable equivalence ratio: application to the calculation of a reactive shear layer. *Combust. Sci. Technol.*, 176:907–923, 2004.

EDF R&D	Code_Saturne 4.0.3 Theory Guide	Code_Saturne documentation Page 402/400
---------	--	---

- [S71] D.B. Spalding and ??? Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent turbulent flames. *13th Int.Symp. on Combustion*, pages 649–657, 1971.
- [SA92] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. Slicing an ear using prune and search. *AIAA*, 1992.
- [Sap11] B. Sapa. *Contribution à l’extension d’un schéma incompressible pour la flammes à bas nombre de Froude - Pré-requis à la modélisation de l’incendie*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2011.
- [She99] J. R. Shewchuk. Lecture notes on delaunay mesh generation. <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/meshf99/>, 1999.
- [SSG91] Charles G Speziale, Sutanu Sarkar, and Thomas B Gatski. Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227(1):245–272, 1991.
- [The98] T. Theußl. A review of two simple polygon triangulation algorithms. <http://www.cg.tuwien.ac.at/~theussl/>, 1998.
- [ZSSA04] L. Zaichik, S. Soloviev, A. Skibin, and V Alipchenko. A diffusion-inertia model for predicting dispersion of low-inertia particles in turbulent flows. In *5th International Conference on Multiphase Flow - ICMF*, volume 220, pages 117–152, 2004.