



EDF R&D

MECANIQUE DES FLUIDES, ENERGIES ET ENVIRONNEMENT
ECOULEMENTS INDUSTRIELS REACTIFS ET POLYPHASIQUES
6 quai Watier - 78401 CHATOU CEDEX, +33 (1) 30 87 79 46

18 décembre 2013

Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications

Pierre PLION

Jorge SANTAMARIA

H-I81-2013-01916-FR	1.0		
<p>La méthode DOM de Code_Saturne est réanalysée. L'effet de la dispersion des luminances dans le cône est approché par un coefficient de diffusion (au sens des dérivées partielles et non pas optique). Sur des cas où il existe une solution de référence (facteurs de vue) l'introduction d'un coefficient de dispersion dans la méthode à 32 directions permet de réduire l'erreur d'un facteur 40 (voire d'un facteur 5 par rapport à la méthode à 128 directions). Les quadratures précédemment utilisées contenaient quelques approximations, et des formules plus précises (ou un découpage moins inégal à 128 directions) permettent de mieux orienter la transmission du rayonnement. Les modifications proposées ont un effet plus faible, mais notable, dans une configuration représentative des situations de combustion industrielle.</p>			

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	---

Circuit de validation

Auteur	Pierre PLION	02/12/13	
Vérificateur	Lynda PORCHERON	06/12/13	
Approbateur	Cecile CLARENC - MACE	18/12/13	

Pré-diffusion

Destinataire
Lynda Porcheron
Fatiha Nmira
Alexandre Douce
Namane Méchitoua
Sandro Dal'Secco
Marcus Charwath

Code Affaire	E961 / P114G0 / E0
---------------------	--------------------

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	--	--

AVERTISSEMENT / CAUTION

L'accès à ce document, ainsi que son utilisation, sont strictement limités aux personnes expressément habilitées par EDF.

EDF ne pourra être tenu responsable, au titre d'une action en responsabilité contractuelle, en responsabilité délictuelle ou de toute autre action, de tout dommage direct ou indirect, ou de quelque nature qu'il soit, ou de tout préjudice, notamment, de nature financière ou commerciale, résultant de l'utilisation d'une quelconque information contenue dans ce document.

Les données et informations contenues dans ce document sont fournies "en l'état" sans aucune garantie expresse ou tacite de quelque nature que ce soit.

Toute modification, reproduction, extraction d'éléments, réutilisation de tout ou partie de ce document sans autorisation préalable écrite d'EDF ainsi que toute diffusion externe à EDF du présent document ou des informations qu'il contient est strictement interdite sous peine de sanctions.

The access to this document and its use are strictly limited to the persons expressly authorized to do so by EDF.

EDF shall not be deemed liable as a consequence of any action, for any direct or indirect damage, including, among others, commercial or financial loss arising from the use of any information contained in this document.

This document and the information contained therein are provided "as are" without any warranty of any kind, either expressed or implied.

Any total or partial modification, reproduction, new use, distribution or extraction of elements of this document or its content, without the express and prior written consent of EDF is strictly forbidden. Failure to comply to the above provisions will expose to sanctions.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

Synthèse

Contexte

Dans le cadre du projet PRELUDE, il a paru pertinent d'évaluer l'intérêt qu'il y aurait à améliorer la représentation des transferts par rayonnement dans *Code_Saturne*, en particulier, si les applications en conditions d'oxy-combustion nécessitaient le recours à un modèle spectral, le coût calcul ne pourrait être contenu qu'en limitant la description géométrique à la portion congrue. Ce document présente plusieurs aspects de la résolution de l'équation des transferts radiatifs (ETR) avec la méthode des ordonnées discrètes (DOM) mise en œuvre dans *Code_Saturne* et notamment la possibilité de représenter la dispersion par une diffusion afin de limiter le nombre de directions de propagation à prendre en compte.

Les transferts radiatifs sont un mode prépondérant d'échange de chaleur dans les écoulements réactifs tant en situation de combustion industrielle (ex : chaudière à charbon pulvérisé) qu'en incendie ; leur modélisation est donc un élément nécessaire à la mécanique des fluides numérique.

Dans *Code_Saturne*, deux méthodes sont mises en œuvre : la méthode P1 n'est valide qu'en milieu optiquement épais ; la méthode des ordonnées discrètes, qui consiste à partager la luminance en quelques (32, 128, ... ou 24, 48, ...) angles solides.

Objectifs et méthode

La propagation de la luminance se fait, naturellement, en divergeant, cette divergence peut être prise en compte par un opérateur discret en volumes finis [Boulet & al. 2007] ou simplement propagée le long des axes des angles solides élémentaires. Nous montrons ici que la dispersion de la luminance peut être approchée par une diffusion. Cette diffusion, analogue à celle apparaissant dans les équations aux dérivées partielles de transport, qui répartit la puissance entre lignes parallèles de propagation de chaque direction, ne doit pas être confondue avec la diffusion optique qui réorienterait une partie de la puissance d'une direction vers les autres.

A cette occasion, nous avons proposé un découpage en facettes triangulaires moins inégalitaire (T4'), et retrouvé des méthodes analytiques et géométriques simples pour la détermination des quadratures permettant la détermination des angles solides et des directions de propagation ; nous avons également précisé le traitement aux parois.

Résultats

Le cas de validation, sur lequel il est possible de construire une solution de référence avec la méthode des facteurs de vue [R. Siegel & al.] n'est que partiellement représentatif des cas d'intérêt industriel (milieu transparent et flux échangés entre parois) mais permet de mettre en évidence l'apport tant des corrections sur les directions que de l'introduction d'une représentation de la dispersion par une diffusion.

En particulier, les résultats obtenus avec une méthode à 32 directions (T2) améliorée sont nettement meilleurs (erreur / 5) que ceux obtenus avec la méthode de référence à 128 directions.

Le coût calcul est pénalisé ($\times 1,65$) par l'introduction de cette diffusion supplémentaire ; la méthode à 32 directions améliorée restant bien plus économe en temps que la méthode référence à 128 directions ($\times 4$).

Nous avons vérifié l'indépendance des résultats au maillage et au domaine.

Les cas d'intégration, combustion du charbon dans le four du Cerchar et nappe de brouillard, font apparaître des différences faibles mais notables.

En conclusion, non seulement la représentation de la dispersion par une diffusion améliore considérablement les résultats mais des corrections simples (i.e. gratuites en terme de calcul) contribuent à réduire l'erreur notamment pour les méthodes à petit nombre de directions.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	--	--

Perspectives

Les résultats obtenus, permettent de confirmer l'intérêt qu'il y a à représenter la dispersion par une diffusion et permettent d'espérer des résultats améliorés avec un nombre réduit de directions ; ceci était un préalable à l'utilisation industrielle de modèles avancés pour la discrétisation en longueur d'onde tels que ceux nécessaires pour décrire les transferts radiatifs en oxy-combustion.

Toutefois, la dégradation du temps de calcul constatée lors de l'introduction d'une diffusion significative incite à rechercher une méthode de résolution qui prenne en compte la propagation selon des directions connues, éventuellement sous forme de conditionnement rendant le système triangulaire.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	--	--

Executive Summary

Code_Saturne® provides the possibility to solve the directional evolution of the radiative heat transfer equation (RTE) by means of the Discrete Ordinate Method (DOM). In order to ensure the conservation of radiative energy this method is formulated as a fully finite volume approach, in space as well as in direction. In this study, it is shown that the effect of optical dispersion on the directional evolution of radiative intensity can be understood as a diffusion phenomenon. However, this diffusion phenomenon should rather be interpreted as a transport effect, arising from the heat flux between parallel directions of propagation, and not as an optical phenomenon.

It can be shown that the introduction of such a transport diffusion approach reduces significantly the relative error of the existent discrete ordinate method of Code_Saturne. Analytical results of the radiative heat transfer in an empty cavity obtained applying the algebraic view factor method are used as a reference.

Moreover, it is shown in this study that essential parameters of the existing DOM have to be modified. These parameters are in detail the solid angle and the associated directions of propagation.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

Sommaire

PAGE DE GARDE	I
CIRCUIT DE VALIDATION	II
PRE-DIFFUSION.....	II
LISTE DE DIFFUSION	III
AVERTISSEMENT / CAUTION	1
SYNTHESE	2
EXECUTIVE SUMMARY.....	4
SOMMAIRE.....	5
1. INTRODUCTION.....	6
2. UNE METHODE DES ORDONNEES DISCRETES AVEC DISPERSION.....	6
2.1. RAPPEL SUR L'EQUATION DES TRANSFERTS RADIATIFS	6
2.2. DISCRETISATION EN COORDONNEES SPHERIQUES.....	7
2.3. PRISE EN COMPTE DE LA DISPERSION.....	14
2.4. DETAIL DES DETERMINATIONS DES ANGLES ET DIRECTIONS	17
3. CAS TEST : RESULTATS, PERFORMANCES.....	22
3.1. CAS UNITAIRE : CAVITE CUBIQUE TRANSPARENTE.....	22
3.2. CAS SEMI-ANALYTIQUE : NAPPE DE BROUILLARD	31
3.3. CAS D'INTEGRATION : COMBUSTION DU CHARBON PULVERISE DANS LE FOUR DU CERCHAR	32
4. CONCLUSIONS.....	35
5. ANNEXES	36
5.1. POSITION DES POINTS DE PARTAGE ET EQUATIONS DES ARCS	36
5.2. EMISSION A LA PAROI : DETAIL DES INTEGRATIONS	41
5.3. MOMENTS ET INTEGRALES UTILES	41
5.4. DES DECOUPAGES EGALITAIRES ?	44
5.5. LA PERTINENCE DU MOMENT D'ORDRE 2.....	46
5.6. MINIMISER LA DISPERSION AUTOUR DE L'INTEGRALE AZIMUTALE	47
6. BIBLIOGRAPHIE.....	51

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

1. Introduction

Le rayonnement est un mode de transfert de chaleur caractérisé par la propagation d'ondes électromagnétiques (il ne nécessite pas de support matériel). Au cours de sa propagation, des interactions peuvent intervenir entre les photons qui forment l'onde incidente et les molécules de gaz qu'il traverse. Ces interactions ont lieu pour des nombres d'ondes bien spécifiques, inhérents au gaz considéré, et permettent des transitions énergétiques au sein des molécules. Ces transitions entre deux niveaux énergétiques modifient, en outre, le nombre de photons formant l'onde incidente et conséquemment la valeur de la variable intensité associée à la quantité d'énergie transportée par rayonnement.

Le rayonnement thermique est un mode de transfert que l'on associe essentiellement aux milieux semi-transparents. En combustion (qu'il s'agisse de combustion industrielle où le rayonnement contribue au transfert vers les charges ainsi qu'à la stabilisation des flammes ou d'incendie où il est un mode majeur de propagation), dès lors que l'on observe un milieu gazeux à haute température, ayant un fort pouvoir d'absorption d'un point de vue radiatif (c'est le cas des produits de la combustion d'hydrocarbures tels que H₂O, CO₂ et CO), il devient nécessaire de s'attacher à une bonne description des transferts radiatifs. Dans certaines configurations, ils peuvent devenir un mode de transfert énergétique non négligeable voir prépondérant.

Les codes de mécanique des fluides numérique incluent donc des modèles de transfert par rayonnement qui vont de la méthode du lancer de rayons (la plus précise et la plus chère) à la méthode P1 (luminance isotrope) pour les milieux optiquement épais ; néanmoins, pour les applications industrielles le consensus se fait sur la Méthode des Ordonnées Discrètes qui consiste à résoudre la luminance dans un ensemble de directions de propagation : *Code_Saturne* disposait de deux options à 32 ou à 128 directions, pendant que nous évaluions la représentation de la dispersion par une diffusion, nos collègues ont introduit les options S4 à 24 directions ainsi que Tn et Sn d'ordre supérieur ont été introduites.

Physiquement, la puissance rayonnée (par une paroi, un gaz, une inclusion) ne se propage pas de façon discrète (en conservant les flux selon un petit nombre de directions) mais dans toutes les directions (ce qui conduit, le long de chacune d'entre elles à une décroissance du flux selon l'inverse du carré de la distance à la source).

La présente action a été initiée dans le cadre du projet PRELUDE pour évaluer la possibilité de représenter la dispersion de la puissance par une simple diffusion au sens de l'équation aux dérivées partielles caractéristique des transferts radiatifs. Néanmoins, à cette occasion, une correction des quadratures a permis d'améliorer les résultats des simulations (dans le cas où nous disposions d'une solution de référence obtenue avec la méthode des facteurs de vue).

Ces deux modifications, dont l'intérêt a été quantifié dans le cas d'un échange entre parois d'une cavité transparente sont directement applicables au cas des milieux semi-transparents ainsi que le démontre les deux cas d'intégration (brouillard et four à charbon pulvérisé).

2. Une méthode des ordonnées discrètes avec dispersion

2.1. Rappel sur l'équation des transferts radiatifs

Suivant la présentation très claire de [David], rappelons que « la luminance rayonnée dans un point $P(\vec{r})$ de l'espace, dans la direction \vec{s} , à l'instant t et à la fréquence ν , notée $L_{\nu}(\vec{r}, \vec{s}, t)$ est la densité d'énergie monochromatique $d\phi_{\nu}(\vec{r}, t)$ rayonnée à travers une surface orientée dS orientée selon la normale \vec{n} dans un angle solide $d\Omega$ autour de cette direction \vec{s} , durant un intervalle de temps dt »

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$L_v(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{d^3 \phi_v(\vec{r}, t)}{(\vec{s}, \vec{n}) d\Omega dt dS} \quad (1)$$

Le rayonnement thermique, étant électromagnétique, voyage à la célérité de la lumière ce qui permet à l'équilibre thermodynamique local de s'établir rapidement et on pourra supposer, dans les problèmes de combustion industrielle un état stationnaire du rayonnement.

Le corps noir est un corps idéal qui absorbe tout rayonnement reçu et émet, selon sa température et de façon isotrope selon l'intégrale, en fréquence, de la loi de Planck. Avec σ_b la constante de Stefan-Boltzman :

$$L_b(\vec{r}) = \frac{\sigma_b T^4}{\pi} ; \sigma_b = 5,667 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (2)$$

Selon le degré de précision recherché on pourra considérer en combustion industrielle que les milieux semi-transparents et les parois sont gris (avec un coefficient d'émission ε , par rapport, au corps noir constant en fréquence) ou « à bandes » (le coefficient d'émission n'étant constant que par intervalles).

Un milieu semi-transparent aura la capacité d'absorber une partie de l'énergie provenant de la luminance lors d'un trajet ds et d'y contribuer par son émission propre :

$$\frac{dL(\vec{r}, \vec{s})}{ds} = -\kappa_{ab} L(\vec{r}, \vec{s}) + \kappa_{em} L_b(\vec{r}) \quad (3)$$

Où κ_{ab} est le coefficient d'absorption, κ_{em} le coefficient d'émission, L_b la luminance locale du corps noir (en \vec{r}) et $L(\vec{r}, \vec{s})$ la luminance locale dans la direction \vec{s} . A l'équilibre thermodynamique local, tout milieu susceptible d'absorber une fraction du rayonnement reçu sera apte à émettre dans les mêmes proportions ce qu'aurait émis le corps noir : $\kappa_{ab} = \kappa_{em}$.

Nous ne traiterons pas, ici, de la diffusion optique qui dévie une partie du rayonnement reçu.

2.2. Discrétisation en coordonnées sphériques

L'équation différentielle de la luminance, ci-dessus, peut être résolue soit sous des formes approchées soit par un développement en série d'harmoniques sphériques (P1 est l'approximation de diffusion, P3 améliore les résultats au prix de la résolution de plusieurs champs et de la formulation de conditions limites complexes, au-delà le bénéfice est mince et la complexité algorithmique explose) soit par une discrétisation de l'espace des directions de propagation pour aboutir à une équation différentielle par direction.

Toute fonction de la luminance (continue en direction) et leurs intégrales selon l'angle solide étant remplacées par une somme discrète :

$$\int_{4\pi} f(\vec{s}) d\omega \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot f(\vec{s}_i) \quad (4)$$

Où n est le nombre de directions discrètes, les \vec{s}_i sont les directions choisies et les Ω_i sont les poids associés que l'on peut interpréter comme l'incrément d'angle solide associé à chacune des directions.

De l'application de cette approche à l'équation (4) découle un ensemble de n équations différentielles similaires définies suivant la coordonnée curviligne colinéaire à \vec{S}_i :

$$\vec{s}_i \cdot \nabla L(\vec{s}_i) + \beta L(\vec{s}_i) = \beta S(\vec{s}_i) \quad \text{avec } i=1, \dots, n \quad (5)$$

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

La sélection des directions discrètes \vec{S}_i n'est pas arbitraire. Elle doit respecter certaines contraintes de symétrie. On appelle « ordonnées discrètes » les composantes des vecteurs unitaires \vec{S}_i définis dans un repère cartésien. Nous pouvons énoncer les deux points essentiels suivants nécessaires à la mise en œuvre des DOM :

- définir un schéma de dérivation spatial correct afin de résoudre chacune des n équations différentielles (cf. (5)) sur un domaine découpé en volumes finis, dans un environnement dédié à la résolution des équations aux dérivées partielles.
- établir des quadratures intéressantes permettant d'obtenir une bonne représentation des dépendances angulaires en ne rajoutant pas trop de directions angulaires discrètes et donc d'équations différentielles supplémentaires au problème.

Les équations différentielles associées à chaque direction devront être discrétisées en espace, par exemple, par un schéma aux volumes finis et il en résultera deux erreurs :

La diffusion numérique du schéma de convection de la luminance par le vecteur directeur de la direction, erreur qui devient maximale quand les directions de propagation ne sont pas alignées avec les directions du maillage.

L'effet de rayon lié à la discrétisation angulaire insuffisante, et se manifestant par des discontinuités irréalistes dans la distribution des luminances : toute l'énergie émise dans un incrément solide ne se propageant que dans une direction. Cet effet peut conduire à des discontinuités importantes du flux reçu.

Les ensembles de directions et de poids doivent respecter un certain nombre de conditions :

La somme des poids (incrément d'angle solide) doit valoir 4π . Ce qui revient, dans l'intégrale précédente à considérer une fonction constante et/ou à s'assurer que la luminance émise par un milieu semi-absorbant sera totalement prise en compte (bilan énergétique).

Les directions doivent être choisies soit, pour s'adapter au problème traité (pénétration du rayonnement solaire dans l'atmosphère) soit, pour respecter des conditions de symétrie quand aucune direction n'est, a priori, connue (rayonnement dans les chaudières industrielles). En particulier, les problèmes traitant des échanges de chaleur par rayonnement dans des cavités parallélépipédiques conduisent à retenir un repère cartésien d'où un découpage de la sphère en octants et le souhait que le découpage en direction soit insensible à la permutation des axes afin que les facettes appartenant aux diverses parois soient traitées de façon équivalente.

Avec ces contraintes, [Thurgood] propose un découpage de la sphère en facettes triangulaires qui sont la projection des facettes obtenues par découpages successifs en quatre triangles égaux du triangle ($x+y+z=1$) sous-tendant l'octant. Nous détaillons, en annexe, le calcul de découpage, de projection et la détermination des directions associées à la projection, sur la sphère, des barycentres des triangles plans. Ce découpage a le mérite de représenter les limites des angles solides associés en « pavant » la surface de la sphère (la somme des incréments couvre la sphère), de respecter les conditions de symétrie et de pouvoir être simplement itéré (pour élaborer des méthodes à 8, 32, 128 ... $8 \cdot 4^n$) directions ; mais ... la projection du plan vers la sphère n'est pas sans défaut : les barycentres projetés ne sont pas les barycentres des triangles sphériques et le premier moment n'est pas respecté.

$$\forall \vec{n}; \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot \vec{s}_i \cdot \vec{n} > \int \vec{s} \cdot \vec{n} d\omega = \pi \quad (6)$$

Cette inégalité qui affecte la puissance émise par les parois n'étant pas acceptable, toute mise en œuvre de la méthode prévoit une renormalisation.

Les vecteurs étant normalisés (à la surface de la sphère) le second moment est vérifié ... avant la renormalisation précédente qui est obligatoire.

Enfin si à chaque étape les triangles plans sont égaux, lors de la projection sur la sphère ils ne le sont plus ; nous proposons en annexe d'appliquer le processus de création de sous-triangles par

dichotomie directe des arcs de grands cercles qui constituent les cotés des triangles sphériques plutôt que par des dichotomies des côtés des triangles plans, ce qui conduit à de moindres différences de poids entre directions.

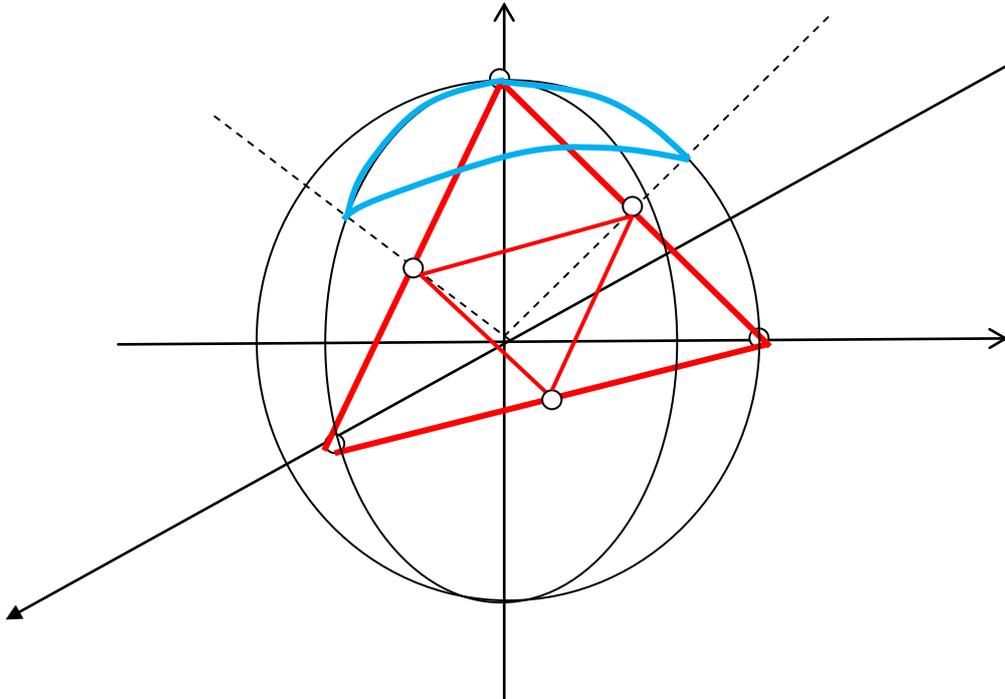


Fig. 1 : Première étape du découpage de Thurgood

[Truelove] a proposé une amélioration plus radicale en recherchant directement les ensembles de poids et de directions qui permettent de vérifier l'égalité des moments associés à un développement limité de toute fonction $f(s)$. L'algorithme proposé, basé sur l'intersection d'un réseau de parallèles aux faces de l'octant, à peine moins général que celui de Thurgood, permet de construire des ensembles de directions et de poids dont le nombre est la suite des nombres triangulaires ($8 \cdot 1$, $8 \cdot 3$, $8 \cdot 6$, $8 \cdot 10$... $8 \cdot n \cdot (n+1)/2$). Par construction, ces ensembles vérifient les sommes partielles associées au développement en série. Le défaut le plus apparent des quadratures de Truelove est de ne pas fournir les limites associées aux angles solides (pas de pavage de la sphère).

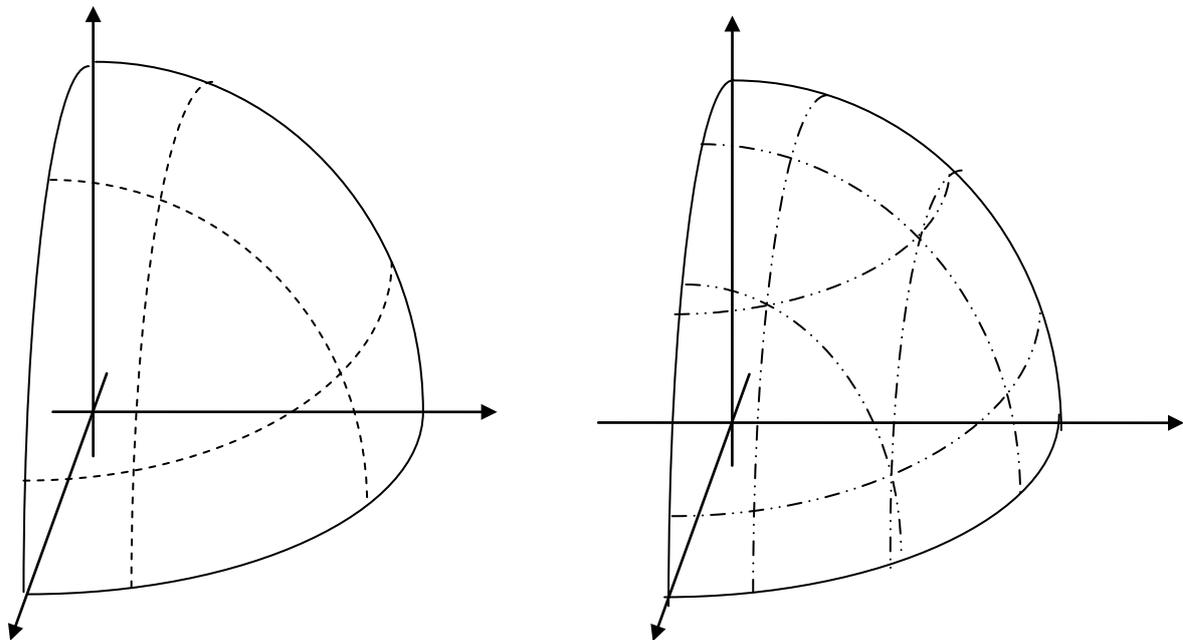


Fig 2 : Réseau de parallèles permettant de construire les directions des découpages S_n de Truelove à 3 et 6 directions par octant.

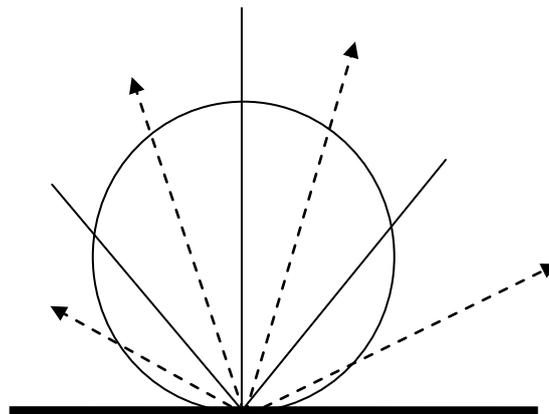


Fig. 3 : Emission depuis une paroi proportionnelle à $\text{Sin}(\varphi)$

En remplaçant les barycentres projetés de Thurgood par les barycentres sphériques des facettes qu'il a définies nous pensions réduire l'erreur sur le premier moment mais nous l'avons augmentée.

Dans le cas du découpage en quatre facettes par octant (32 directions), les directions associées sont semblables pour la grande facette associée à la grande diagonale mais plus écartées des axes pour les trois facettes périphériques. Le défaut sur le premier moment du découpage de Thurgood passe d'un facteur 1,017 à un facteur 1,039.

Pourtant, cette condition paraît simple et peut être atteinte en utilisant pour les composantes des vecteurs directions les sommes partielles : les intégrales des coordonnées sur chaque triangle. Ce faisant, nous obtenons (à l'issue de calculs détaillés en annexe), la position exacte du barycentre de chaque facette qui est bien dans la direction que nous avons déterminée par intégration, mais qui se trouve à l'intérieur de la sphère (et non à la surface puisque la facette est courbe). En retenant pour les « s_i » les composantes, non normées, du barycentre de chaque facette triangulaire sphérique, nous construisons un schéma de Thurgood modifié qui vérifie, par construction, les deux premiers moments

(0 et 1). Par contre le second moment est déficitaire (les vecteurs ont une norme inférieure à l'unité) et la vérification de cette seconde quadrature ne s'améliore qu'avec l'augmentation du nombre de facettes.

Réciproquement, nous avons déterminé les directions qui devraient être associées au découpage T4 pour vérifier le premier moment : inchangées pour la grande facette, elles se rapprochent des axes pour les facettes périphériques.

Enfin, dans le seul cas du découpage S4 de Truelove, nous pouvons considérer que les trois facettes vérifiant les conditions de symétrie sont des quadrilatères sphériques et déterminer leurs barycentres vrais dont les directions ne correspondent pas aux solutions de référence pour les quadratures.

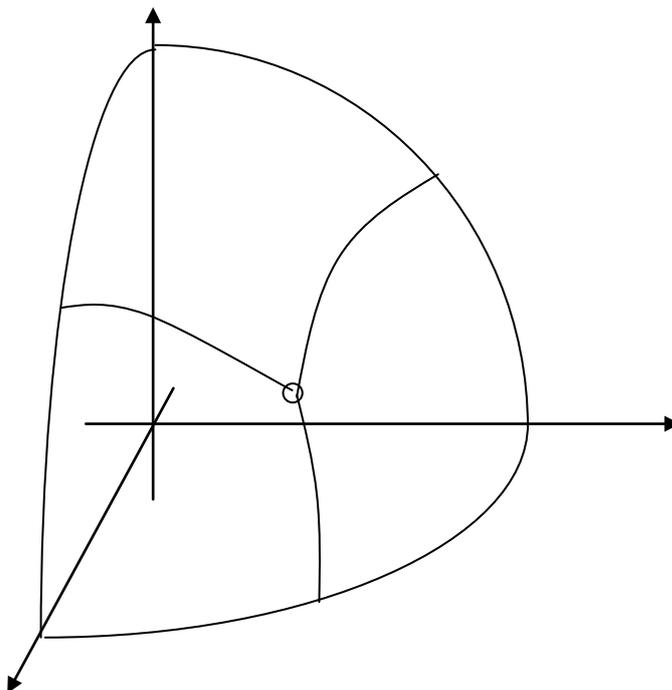


Fig. 4 : Les seules facettes associables au découpage S4 de Truelove

Pour les découpages T1 et S2 (l'octant), T2 (4 facettes triangulaires) et S4 (3 facettes quadrangulaires) nous disposons ainsi de plusieurs déterminations des directions, sans modifications des poids. Les solutions de Thurgood bénéficient de l'antériorité et d'un vaste retour d'expérience, celles de Truelove sont, a priori, les plus mathématiquement rigoureuses.

Afin de prendre en compte les soucis des praticiens de la combustion industrielle, nous proposons d'introduire un critère supplémentaire qui représente l'erreur commise par les différentes discrétisations lors de l'intégration en azimut. Ceci peut être directement rattaché à la répartition de la puissance rayonnée par l'extrémité d'un cylindre (fut-il à base carrée) vers les parois latérales, selon la cote (par exemple l'altitude des tubes de chaudière ...). Lors de cette intégration, le $\sin(\varphi)$ de l'émission pariétale est multiplié par un $\cos(\varphi)$ correspondant à l'incrément d'angle solide, l'intégrande est alors équivalent à $\sin(2. \varphi)$ et, tous calculs faits, la puissance cumulée à un azimut donné est proportionnelle à $(1-\cos(2. \varphi))$.

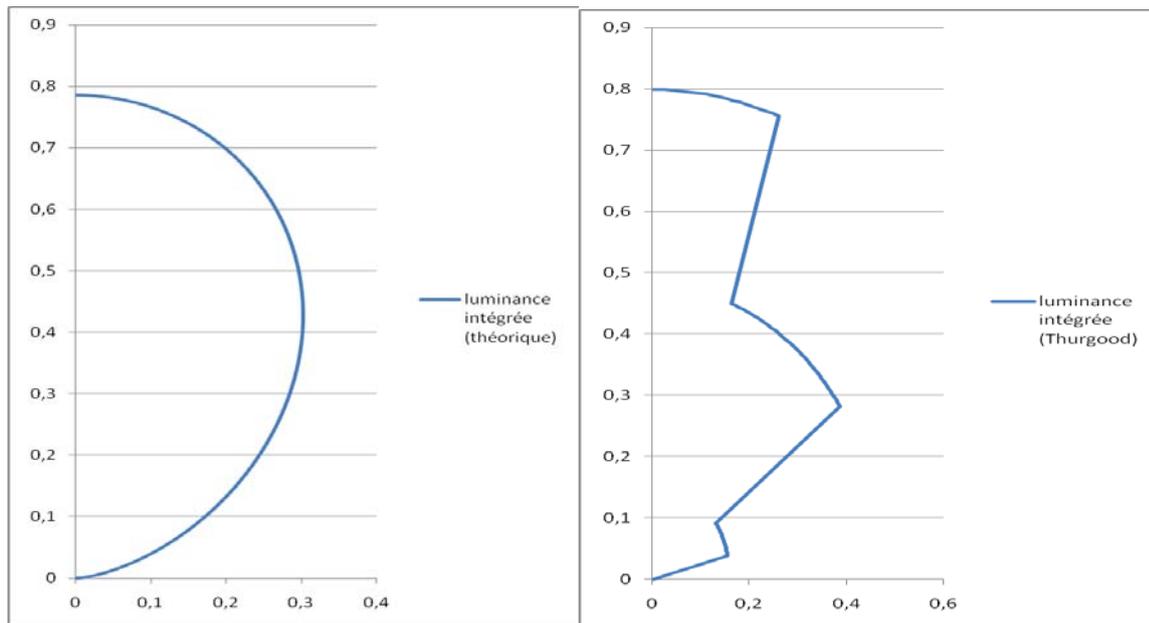


Fig. 5 : Luminances intégrées selon l'azimut en représentation polaire a) théorique (intégrale de la fig. 3) et b) selon le premier découpage de Thurgood (sans la normalisation)

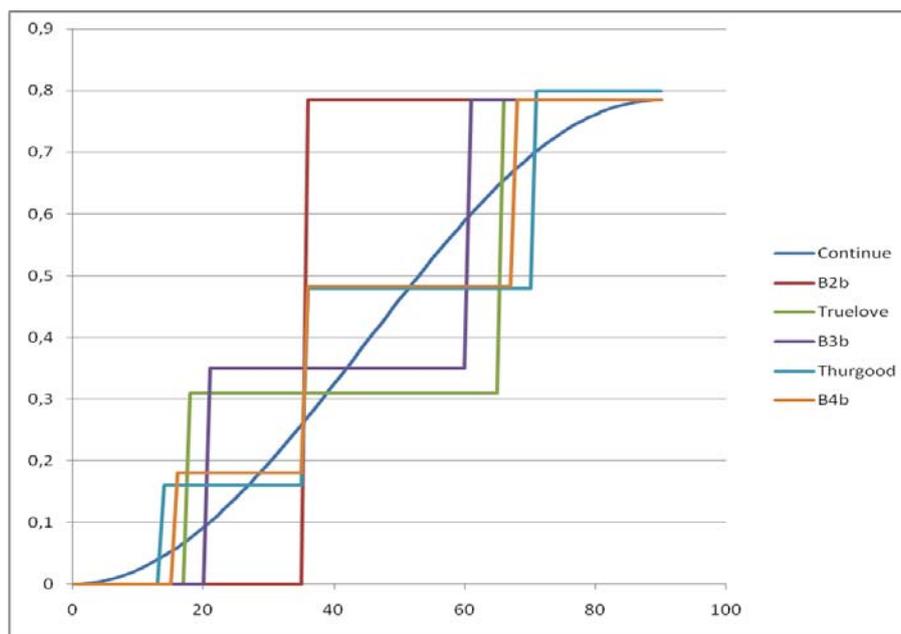


Fig. 6 : Luminance intégrée en fonction de l'azimut (en degrés) pour plusieurs discrétisations

Nous proposons l'indicateur d'erreur constitué par l'intégrale du carré des écarts entre courbe théorique $\pi/8 \cdot (1-\text{Cos}(2.\varphi))$ et les schémas discrétisés.

Nous présentons ci-dessous :

T1 et S2 le découpage constitué du seul octant, le poids est $\pi/2$, la direction celle de la grande diagonale, le vecteur est normalisé (chaque composante est égale à $1/\sqrt{3}$).

B2b, à l'octant est désormais associé le vecteur correspondant au barycentre vrai (chaque composante vaut $1/2$) la norme du vecteur est $\sqrt{3}/2$.

S4 : la quadrature S4 de Truelove, les poids valent tous $\pi/6$, les directions sont choisies pour

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

vérifier le premier moment, les vecteurs sont normalisés.

B3b : les trois facettes de S4 sont associées à leurs barycentres vrais, la norme du vecteur est 0,9563.

T2 le découpage originel en quatre de Thurgood, la grande diagonale a pour poids $3.ArcCos(1/3) - \pi$ (supérieur au $\pi/6$ de S4!), les facettes périphériques ont pour poids $\pi/2 - .ArcCos(1/3)$ avec leurs vecteurs normalisés.

QM1 : les 4 facettes du découpage de Thurgood associées aux directions permettant de respecter le premier moment et les vecteurs normalisés.

B4n : les 4 facettes de Thurgood associées à leurs barycentres vrais avec des vecteurs normalisés.

B4b : les 4 facettes de Thurgood associées à leurs barycentres vrais non normalisés. Les normes des vecteurs sont d'autant plus faibles que les facettes sont grandes. Ainsi pour la facette centrale la norme vaut 0,9498 et pour les facettes périphériques 0,9658. Cette constatation obère la normalisation par S1 qui revient à affecter une norme moyenne à des facettes de poids différents (dans le cas de B4n, le facteur $1/1,1392$ vaut 0,9623).

Schéma	V1	V2	V3	φ_1	4.S1/ π	6.S2/ π	8.S3/ π	10.S4/ π	Err
T1, S2	s.o.	s.o.	0,57735	s.o.	1,155	1	0,770	0,556	0,13154
B2b	s.o.	s.o.	0,5	s.o.	1	0,75	0,5	0,312	0,07172
S4	0,90825	0,29587	s.o.	65°26	1	1	1,068	1,160	0,02917
B3b	0,83119	0,33440	s.o.	60°36	1	0,91453	0,86539	0,77597	0,02023
Thu, T2	0,94281	0,2357	0,57735	70°52	1,0172	1	1,018	1,056	0,01292
QM1	0,95498	0,2098	0,57735	72°74	1	1	1,03984	1,099	0,01502
B4n	0,92102	0,27542	0,57735	67°07	1,0392	1	0,987	0,995	0,01292
B4b	0,88954	0,26608	0,54835	67°07	1	0,92741	0,886	0,867	0,01078

Tab. 1 : Composantes des vecteurs(selon nomenclature du § 2.4) directions et erreurs pour 8, 24 et 32 directions

L'écart entre la courbe continue et les distributions continues par morceaux (qui correspondent aux puissances captées au dessus de l'azimut des directions discrètes) ne peut être annulé, tout au plus pourrions-nous tenter de le réduire en ajustant les directions, pour l'instant nous considérons qu'affecter toute la puissance émise dans un angle solide à la direction du barycentre de la facette associée est sensé. La comparaison pertinente dans ce tableau est plutôt entre les schémas vérifiant les quadratures et ceux utilisant les vecteurs associés aux barycentres vrais : quel que soit le nombre de directions, on constate que l'erreur sur la puissance captée est diminuée par l'emploi de vecteurs qui ne sont pas unitaires et qui conduisent pourtant à sous-évaluer les moments d'autant plus sévèrement que l'ordre du moment est élevé et le nombre de facettes faible. Par exemple, en retenant les vecteurs barycentres non normés (dont la norme décroît avec la taille de la facette) nous commettons sur le moment d'ordre 2 une erreur systématique qui ne décroît qu'en augmentant le nombre de directions (i.e. en diminuant les poids unitaires).

L'interprétation physique de ces directions non normalisées qui devraient, notamment, être prises en compte pour distribuer les émissions depuis les parois est assez claire : toute la puissance rayonnée dans un cône ne se propage pas dans la direction de l'axe de celui-ci, une partie, d'autant moins négligeable que le cône est ouvert, se propage en suivant les directions réparties à l'intérieur du cône, c'est-à-dire que leurs vecteurs unitaires de propagation ont une composante normale à l'axe non nulle.

Cet effet de dispersion de la puissance émise dans un cône (en dehors de l'axe de celui-ci) est ce que nous allons tenter de prendre en compte dans le paragraphe suivant.

2.3. Prise en compte de la dispersion

Le rayonnement émis par une facette ou un volume de fluide se propage dans toutes les directions. En discrétisant les directions de l'espace sous forme d'angles solides, la Méthode des Ordonnées Discrètes permet de ne calculer la luminance que selon les axes des cônes de propagation.

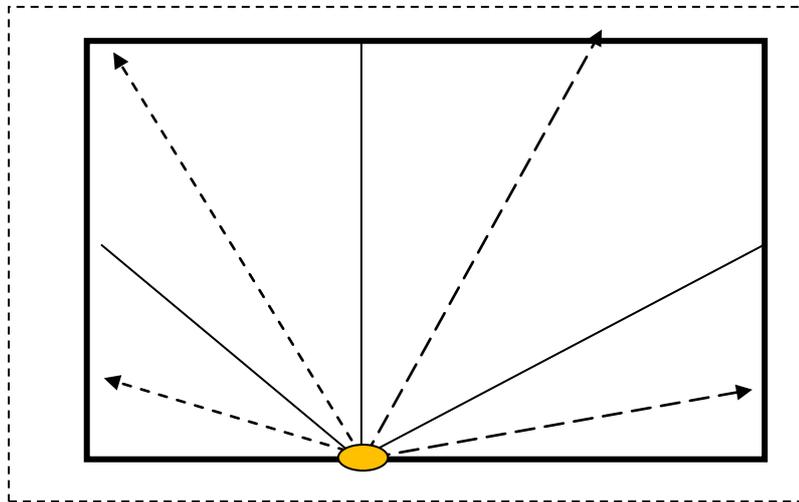


Fig. 7 : Schéma de principe de la Méthode des Ordonnées Discrètes, à l'intérieur d'une boîte (en traits continus épais) la luminance émise par la tâche orange ne se propage que selon les lignes en traits noirs pointillés qui sont les axes des angles (plans ou solides, limités par les traits noirs fins) selon lesquels la puissance totale émise est distribuée.

Néanmoins, si l'on suit la puissance émise par un élément (de surface ou de volume), dans une enceinte remplie d'un milieu transparent, elle devra se propager de façon à atteindre toutes les facettes qui ne lui sont pas coplanaires et pas seulement celles se trouvant dans le petit nombre de directions de propagation retenues. L'aire de la base du cône croît comme le carré de la distance (entre émetteur et récepteur) et, la puissance se conservant, la luminance sur l'axe devra décroître comme le carré de la distance.

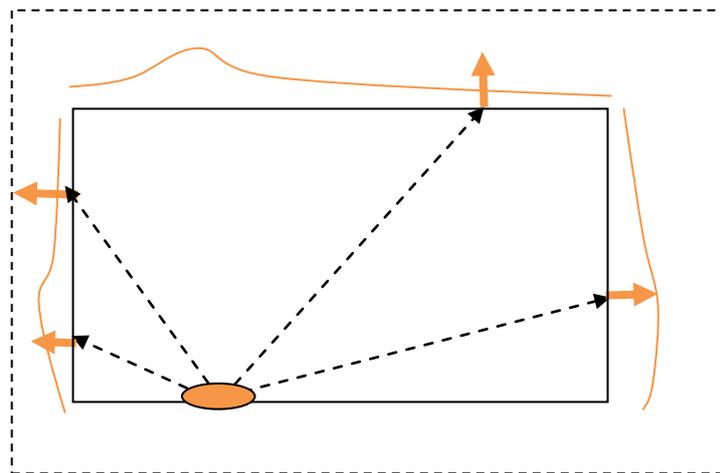


Fig 8 : Luminance (pics de Dirac, orange) propagée par DOM (en pointillées noir), et calculée par la méthode des facteurs de vue (traits continus orange)

Les équations pour la luminance sont ainsi résolues autant de fois qu'il existe de directions de propagation. Pour chacune d'entre elles la luminance est solution d'une équation aux dérivées partielles prenant en compte la convection (par le vecteur directeur de la direction de propagation), des termes sources (émission et absorption volumique) et des conditions aux limites (émissions et absorptions surfaciques). Tout se passe comme si les luminances se propageaient indépendamment le long d'un faisceau de droites parallèles : l'équation aux dérivées partielles dégénère en un faisceau d'équations

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

différentielles. En particulier, la version de référence de l'ETR (équation des transferts radiatifs) ne comporte ni terme d'accumulation (dérivée temporelle et locale de la luminance : puisqu'elle est supposée se propager instantanément) ni terme de diffusion.

La diffusion est, en optique, un phénomène qui modifie la direction de propagation de la luminance. La luminance se propageant dans une direction sera ainsi dirigée de façon isotrope ou pas dans les autres. Ce phénomène quand il existe est délicat à prendre en compte dans les Méthodes à Ordonnées Discrètes, il faudra prendre en compte une extinction supplémentaire dans la direction « à diffuser » et répartir ensuite la luminance dans les directions vers lesquelles la diffuser... En pratique, *Code_Saturne* ne permet de procéder à cette opération qu'en conditions limites pour représenter des parois grises qui réémettent une partie de la puissance reçue de façon isotrope (réflexion non spéculaire).

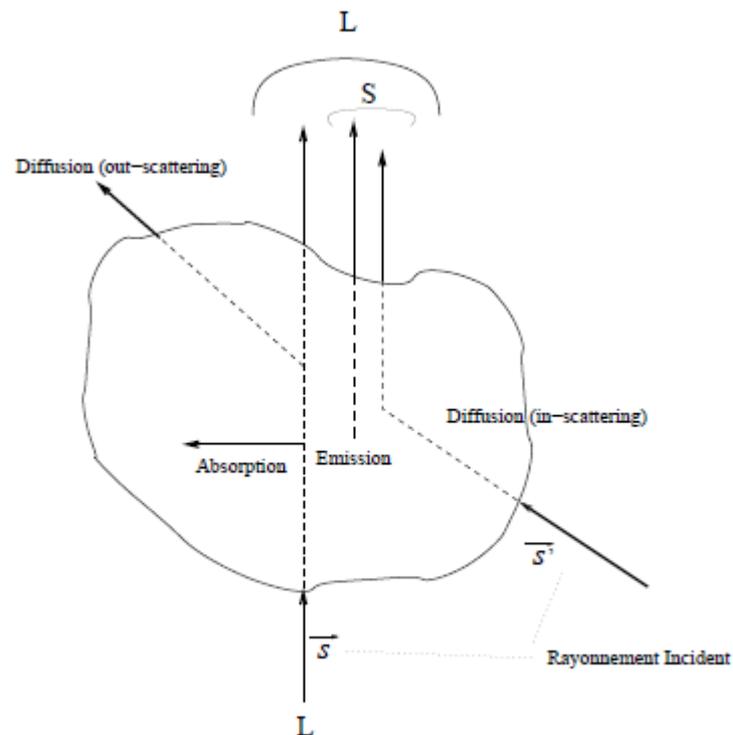


Fig. 9 : Contributions au phénomène radiatif local.

La prise en compte de la dispersion de la luminance dans tout le cône entourant chaque direction de propagation peut s'écrire sous la forme d'une convection par un champ de vecteurs partout divergents : c'est l'approche Volumes Finis de l'Equation des Transferts Radiatifs telle que présentée par [Boulet & al.]. Malheureusement un tel champ convecteur partout divergent n'est pas compatible avec la méthode de calcul des flux au travers des facettes internes utilisée par *Code_Saturne* pour discrétiser l'étape de convection (assemblage de la matrice).

Nous remarquons que des champs convecteurs divergents sur toutes les lignes de courant (parallèles) produisent, au travers des facettes internes, un flux réciproque qui n'a d'effet que si la luminance est différente d'une ligne à l'autre. Nous proposons donc de représenter l'effet de la dispersion géométrique par un flux de diffusion entre les droites de propagation de la luminance selon chaque direction.

Un rapide raisonnement conduit à penser que ce coefficient de diffusion doit être proportionnel soit à la tangente du demi-angle au sommet du cône associé à chaque direction de propagation (si les angles solides sont différents selon les directions, les coefficients de diffusion le seront également) soit à la tangente construite à partir du vecteur barycentre (sa norme faisant office de cosinus on recherche l'angle associé à la divergence). Malheureusement, il ne semble pas y avoir de relation simple entre angle solide (poids) et norme du vecteur barycentre, celle-ci dépendant, également, des angles (aux sommets des facettes, sur la sphère). Le coefficient de proportionnalité optimal reste à déterminer, et sera approché par des expériences numériques.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

La tangente de α , demi-angle au sommet, du cône sous-tendant un angle solide ω s'exprime simplement : $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\omega \cdot (4\pi - \omega)}}{2\pi - \omega}$. On vérifie que cette tangente tend vers 0 pour ω tendant vers 0 ou 4π et vers ∞ pour ω tendant vers 2π (demi-espace).

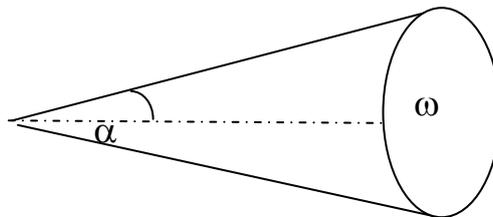


Fig. 10 : Définition de ω et de α .

Mais nous ne connaissons, a priori, ni la valeur du coefficient de proportionnalité ni le coefficient de diffusion numérique pré existant (qui, avec la discrétisation *upwind* de l'opérateur de convection, dépend du maillage et de l'orientation des faces par rapport aux directions). C'est pourquoi nous allons procéder à une optimisation numérique de la valeur du facteur multiplicatif (de la tangente du demi-angle au sommet) de façon à réduire un indicateur d'erreur intégrale.

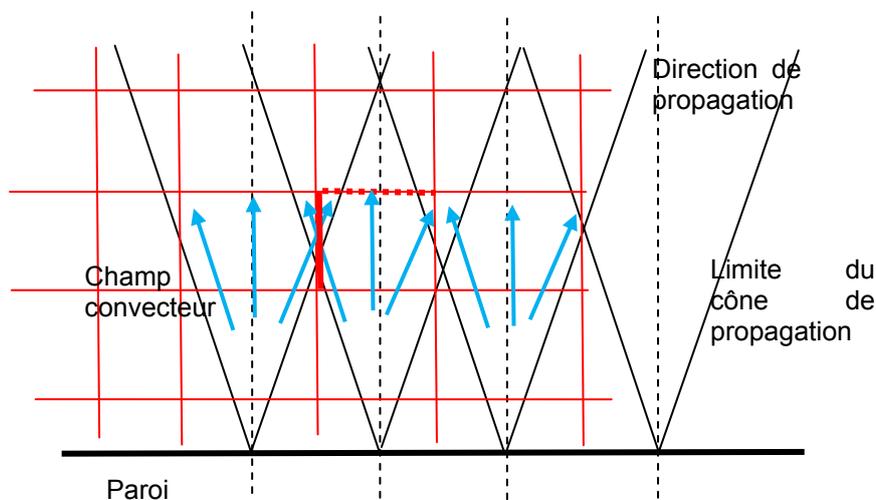


Fig 11 : Dispersion par le champ convecteur bleu à l'intérieur des cônes de propagation

Schéma de principe pour une direction de propagation (en pointillés) de la luminance émise dans un cône (en trait noir plein) depuis une paroi (en trait noir épais). La propagation de la luminance se fait par des vecteurs (turquoise) isotropes à l'intérieur du cône. En rouge, le maillage et les facettes d'un maillage de type Volumes Finis (dans ce schéma de principe, maillage et direction de propagation sont parallèles, ce qui n'est JAMAIS le cas avec *Code_Saturne*). Au travers des facettes perpendiculaires à la direction (ex : trait rouge pointillés épais), la propagation de la luminance est semblable à un flux de convection. Au travers des facettes non perpendiculaires (ex : trait rouge épais), la propagation divergente selon tout le faisceau de droites parallèles à la direction de propagation a l'effet d'un flux réciproque : le bilan VF sur la luminance n'est modifié que s'il en existe un gradient normal à la direction de propagation. L'effet est donc analogue à celui d'une diffusion (normale à la direction de propagation) qui serait introduite dans l'équation aux dérivées partielles des transferts radiatifs qui, de ce fait, ne dégénérerait plus en faisceau d'équations différentielles (selon la seule abscisse curviligne suivant les directions de propagation).

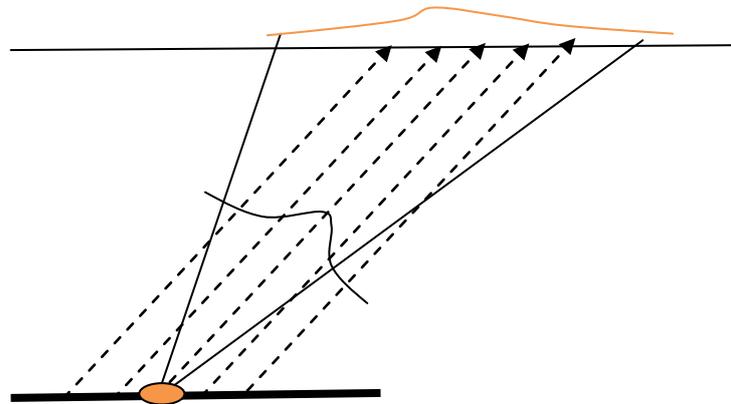


Fig. 12 : Diffusion de la luminance provenant de la zone orange entre faisceaux de droites parallèles à la direction de propagation ; flux reçus en orange

Ce faisant les équations différentielles (5) (selon la seule abscisse curviligne des lignes de propagation) deviennent une équation aux dérivées partielles, bien plus similaires aux autres équations résolues par un code de mécanique des fluides :

$$\vec{s}_i \cdot \nabla L(\vec{s}_i) + \beta L(\vec{s}_i) + \nabla(D \cdot \nabla L(\vec{s}_i)) = \beta S(\vec{s}_i) \quad \text{avec } i=1, \dots, n \quad (7)$$

2.4. Détail des déterminations des angles et directions

Les 4π stéradians des directions de l'espace sont partagés en huit octants, analogues aux quadrants du plan. Les plans délimitant les octants sont perpendiculaires aux 3 axes d'un repère orthogonal et, de ce fait, souvent parallèles aux limites des domaines à modéliser (ex : parois des chaudières). Un octant peut être représenté par le huitième de sphère correspondant géographiquement à 90° de longitude et de latitude. La propagation selon ces seules huit directions ne permettant pas d'obtenir une précision suffisante, les méthodes DOM suivant [Thurgood & al.] proposent de découper ce triangle équilatéral sphérique, comme on pourrait le faire pour un triangle équilatéral, en prenant le milieu de chaque coté pour définir des segments séparateurs. La première étape conduit donc à 4 triangles moyens (associés via les symétries à 32 directions de propagation) et la seconde à 16 petits triangles (associés à 128 directions). Thurgood propose de découper le triangle plan (milieu des segments droits) et de projeter le résultat sur la sphère, nous proposons de découper les triangles sphériques (points milieux des arcs). Le problème vient de ce qu'à la surface d'une sphère les cotés des triangles sont les plus courts chemins entre deux sommets ; c'est à dire des arcs de grands cercles (concentriques à la sphère) et non plus des segments de droite. En conséquence, les surfaces des triangles sphériques, donc les angles solides, ne sont pas tous égaux. De même la direction de propagation est supposée être celle du barycentre du triangle : là encore, Thurgood considère le barycentre du triangle plan et le projette sur la sphère alors que nous proposons de prendre en compte, directement, le barycentre du triangle sphérique..

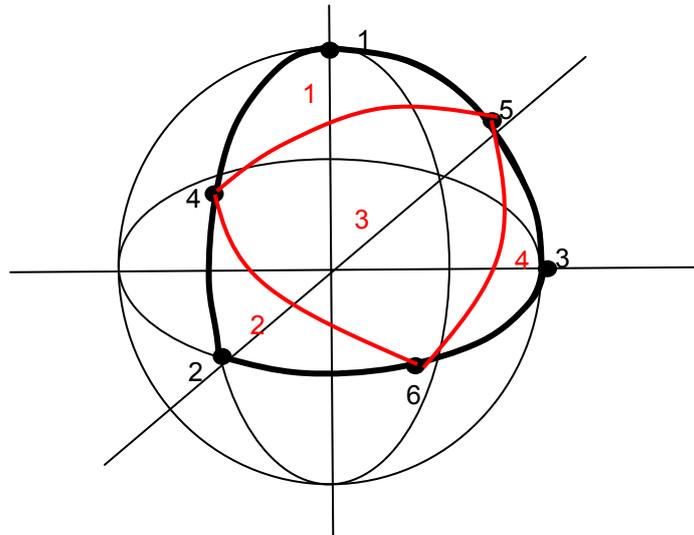


Fig. 13 : Numérotation des points (en noir) et facettes (en rouge) pour le découpage de l'octant en quatre facettes (32 directions)

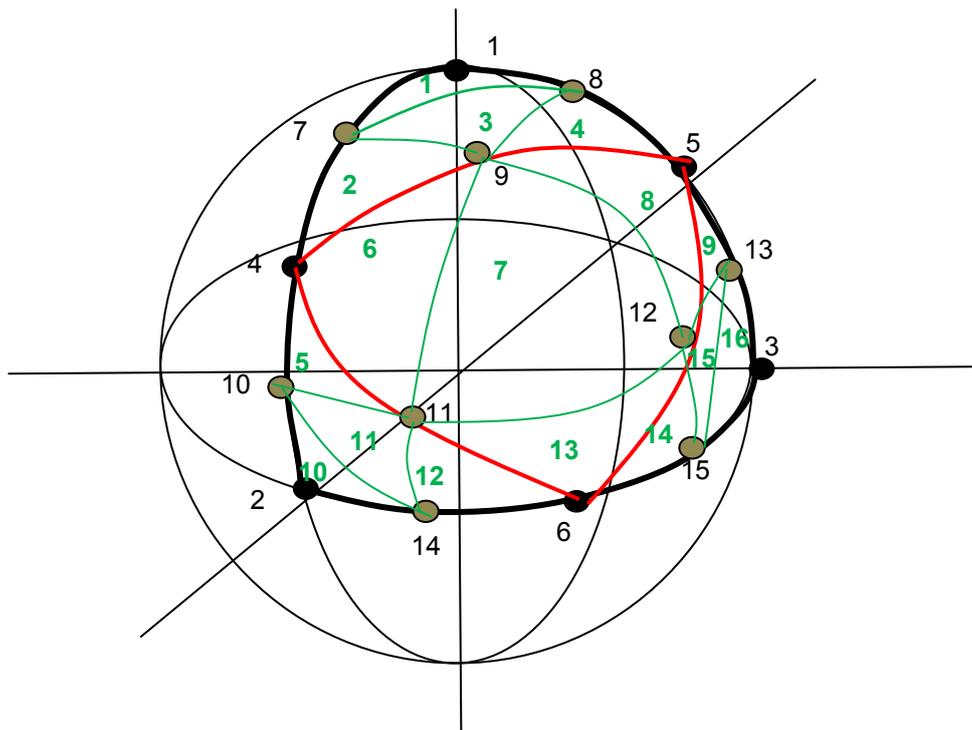


Fig. 14 : Numérotation des points (en noir) et facettes (en vert) pour le découpage de l'octant en seize facettes (128 directions)

Les angles solides et les directions peuvent être déterminés :

Par hypothèse [A. Martin]

Par localisation (précise) des points de partage des arcs et application de la formule de Al-Battani, Viète et Gauss [la publication *princeps*, en arabe, n'apparaissant pas dans ScienceDirect, nous considérons que cette formule est tombée dans le domaine public] :

Ω est l'angle solide, A est l'angle entre les arcs (à la surface de la sphère de centre O) au sommet A, α est l'angle entre les rayons joignant le centre de la sphère aux points B et C.

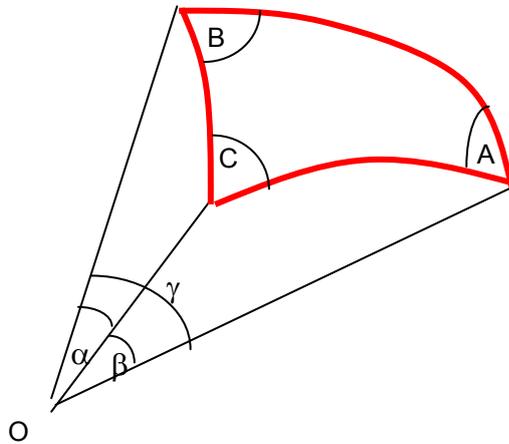


Fig. 15 : notations pour le théorème de Al-Battani, Viète & Gauss

$$\Omega = A + B + C - \pi$$

$$A = \text{ArcCos} \left(\frac{\text{Cos}(\alpha) - \text{Cos}(\beta) \cdot \text{Cos}(\gamma)}{\text{Sin}(\beta) \cdot \text{Sin}(\gamma)} \right)$$

$$B = \text{ArcCos} \left(\frac{\text{Cos}(\beta) - \text{Cos}(\gamma) \cdot \text{Cos}(\alpha)}{\text{Sin}(\gamma) \cdot \text{Sin}(\alpha)} \right) \quad (8)$$

$$C = \text{ArcCos} \left(\frac{\text{Cos}(\gamma) - \text{Cos}(\alpha) \cdot \text{Cos}(\beta)}{\text{Sin}(\alpha) \cdot \text{Sin}(\beta)} \right)$$

Par détermination (fine) de l'équation des arcs et intégration numérique (cf. Annexe)

Les valeurs des angles solides dans les versions antérieures de *Code_Saturne*, suite à la dernière correction [Thurgood, Ben-Wen Li], et proposées (ce travail propose de modifier les trois plus petits des angles solides dans la version à 128 directions et de corriger les directions) sont regroupées ci-dessous et permettent de constater que le nouveau découpage proposé conduit, à 128 directions, à un rapport entre les angles solides maximal et minimal (direction 7 / direction 1) de 1,96 alors que le découpage de référence était associé à un rapport de 2,95. La correction introduite entre 2.3 et 3.0 est la prise en compte des angles déterminés selon le découpage de Thurgood, les angles précédents n'ayant pu être rattachés à des limites de facettes. Le découpage de Thurgood contient une part d'arbitraire (choisir de partager les cotés du triangle plan puis de projeter) qui conduit, en effet, à consacrer le même effort de calcul à des fractions de la puissance échangée par rayonnement, a priori, fort différentes, la procédure que nous proposons (partager directement les arcs de grand cercle) conduit à répartir ainsi à répartir plus équitablement l'effort calculatoire. Dans tous les tableaux ci-dessus les numéros de version apparaissant en titre de colonnes sont ceux de *Code_Saturne*.

	Jusqu'à 2.3	A partir de 3.0	Ce travail
32 dir : 1, 2, 4	0,392699	0,3398369	0,3398369
32 dir : 3	0,392699	0,5512855	0,5512855
128 dir : 1, 10, 16	0,09817477	0,0526559	0,0790907
128 d: 2, 4, 5, 9, 12, 14	0,09817477	0,0995720	0,0843875

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

128 dir : 3, 11, 15	0,09817477	0,08803699	0,0919703
128 dir : 6, 8, 13	0,09817477	0,13202493	0,13202493
128 dir : 7	0,09817477	0,1552108	0,1552108

Tab. 2 : Angles solides pour DOM 32 et 128

Pour le calcul des coefficients « de dispersion », nous ne reprendrons que les valeurs des angles solides recommandées dans ce travail.

	Ω	$\tan(\alpha)$	α (degrés)
28 directions	0,5235988	0,436	23,56
32 dir : 1, 2, 4	0,3398369	0,343	18,93
32 dir : 3	0,5512855	0,449	24,18
128 dir : 1, 10, 16	0,0790907	0,16	9,10
128 d: 2, 4, 5, 9, 12, 14	0,0843875	0,166	9,40
128 dir : 3, 11, 15	0,0919703	0,173	9,82
128 dir : 6, 8, 13	0,13202493	0,208	11,77
128 dir : 7	0,1552108	0,226	12,76

Tab. 3 : Tangente du demi-angle au sommet pour les directions de DOM 32 et 128

On remarque que, de par la non linéarité de la fonction, les tangentes (donc les coefficients de dispersion) sont dans des rapports moindres que les angles solides :

à 32 directions, le rapport des angles solides est 1,62, celui des coefficients de dispersion de 1,31.

à 128 directions, le rapport des angles solides est 1,96, celui des coefficients de dispersion de 1,41.

Un petit nombre de valeurs des composantes se retrouvent par permutation entre directions.

Ainsi, avec 32 directions, nous pouvons écrire :

$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v2 \end{pmatrix}; U2 = \begin{pmatrix} v2 \\ v1 \\ v1 \end{pmatrix}; U3 = \begin{pmatrix} v3 \\ v3 \\ v3 \end{pmatrix}; U4 = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

La sphère étant couverte par des symétries (i.e. changement de signes)

	Jusqu'à 2.3	A partir de 3.0	Ce travail
v1	0,29524	0,23570226	0,2660076
v2	0,90866	0,9428090416	0,8895440
Ecart à l'axe en degrés	24,679	19,47	22,92
v3	0,57735	0,57735	0,5483544
Ecart à l'axe en degrés	54,74	54,74	54,74

Tab. 4 : Directions pour DOM 32

Les valeurs proposées pour v1, v2 et v3 sont issues d'intégrations analytiques, elles peuvent s'écrire :

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{2} - \text{ArcCos}\left(\frac{1}{3}\right) ; \quad \Omega_3 = 3 \cdot \text{ArcCos}\left(\frac{1}{3}\right) - \pi$$

$$v_2 \cdot \Omega_1 = v_3 \cdot \Omega_3 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad (10)$$

$$v_1 \cdot \Omega_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Voir en annexe le détail de ces intégrations. **La direction centrale, qui est la grande diagonale, n'est pas modifiée ; la différence sur v3 provient de ce que les travaux précédents considèrent un vecteur directeur normalisé alors que nous retenons les coordonnées du centre de gravité de la facette ; de ce fait les valeurs de v1 et v2 ne peuvent pas être directement comparées.**

Et, avec 128 directions, nous pouvons écrire :

$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v9 \end{pmatrix} ; U2 = \begin{pmatrix} v2 \\ v4 \\ v5 \end{pmatrix} ; U3 = \begin{pmatrix} v3 \\ v3 \\ v10 \end{pmatrix} ; U4 = \begin{pmatrix} v4 \\ v2 \\ v5 \end{pmatrix} ;$$

$$U5 = \begin{pmatrix} v5 \\ v4 \\ v2 \end{pmatrix} ; U6 = \begin{pmatrix} v6 \\ v8 \\ v6 \end{pmatrix} ; U7 = \begin{pmatrix} v7 \\ v7 \\ v7 \end{pmatrix} ; U8 = \begin{pmatrix} v8 \\ v6 \\ v6 \end{pmatrix}$$

$$U9 = \begin{pmatrix} v4 \\ v5 \\ v2 \end{pmatrix} ; U10 = \begin{pmatrix} v9 \\ v1 \\ v1 \end{pmatrix} ; U11 = \begin{pmatrix} v10 \\ v3 \\ v3 \end{pmatrix} ; U12 = \begin{pmatrix} v5 \\ v2 \\ v4 \end{pmatrix}$$

$$U13 = \begin{pmatrix} v6 \\ v6 \\ v8 \end{pmatrix} ; U14 = \begin{pmatrix} v2 \\ v5 \\ v4 \end{pmatrix} ; U15 = \begin{pmatrix} v3 \\ v10 \\ v3 \end{pmatrix} ; U16 = \begin{pmatrix} v1 \\ v9 \\ v1 \end{pmatrix}$$
(11)

Dans ce travail toutes les directions, sauf la grande diagonale, sont modifiées. De plus les coordonnées des barycentres remplacent les composantes des vecteurs directeurs normalisés (toutefois les facettes étant plus petites, les barycentres sont plus proches de la surface que dans le cas à 32 directions).

	A partir de 3.0	Ce travail
v1	0,0990147	0,1315438
v2	0,492365963	0,5127150
v3	0,23570226	0,2705792
v4	0,12309149	0,1403405
v5	0,8616404369	0,8368526
v6	0,6804138174	0,6687775
v7	0,5773502	0,5688752
Ecart 7/axe en degrés	54,74	54,74
v8	0,272165527	0,2833826

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

Ecart 6, 8, 13	74,21	73,32
v9	0,990147543	0,9738286
Ecart 1, 10, 16	8,05	10,81
v10	0,9428090416	0,9137541
Ecart 3, 11, 15	19,47	22,72

Tab. 5 : Directions pour DOM 128

La même démarche est applicable au découpage S4 avec 3 facettes qui sont des quadrilatères sphériques de poids ou d'angle solide $\pi/6$. Il vient pour les directions ou les composantes des barycentres :

	Truelove	Barycentre analytique
V1	0,2958759	0,3344033
V2	0,9082483	0,8311925
Ecart à l'axe	24,74	29,64

Tab. 6 : Composantes des vecteurs pour S4

3. Cas test : résultats, performances

3.1. Cas unitaire : cavité cubique transparente

Le cas test doit permettre de comparer les flux reçus calculés par la méthode des facteurs de vue et par les différentes versions de la Méthode des Ordonnées Discrètes. La méthode des facteurs de vue permet de relier deux « petits » éléments de surface caractérisés par les coordonnées de leurs centres et les composantes de leurs normales orientées [R. Siegel].

Nous nous proposons de l'appliquer directement entre les facettes de bord au sens de *Code_Saturne*.

Avec X_c, Y_c, Z_c les coordonnées des centres des facettes, ifabore et ifaborr les numéros des facettes de bord émettrice et réceptrice, N_c les composantes des normales orientées (au sens de *Code_Saturne* : contenant l'aire de la facette), Dist la distance entre facettes émettrice et réceptrice, CoDix, CoDiy, CoDiz les coefficients directeurs du segment reliant les facettes émettrices et réceptrices, CosE et CosR les produits scalaires des normales aux facettes (respectivement émettrice et réceptrice) et de la direction de propagation, AireE l'aire de la facette émettrice ; CoefER le facteur de vue entre les deux facettes.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$\text{Dist}^2 = (\text{Xcifabore} - \text{Xcifaborr})^2 + (\text{Ycifabore} - \text{Ycifaborr})^2 + (\text{Zcifabore} - \text{Zcifaborr})^2$$

$$\text{Dist} = \sqrt{\text{Dist}^2}$$

$$\text{CoDix} = \frac{\text{Xcifabore} - \text{Xcifaborr}}{\text{Dist}}$$

$$\text{CoDiy} = \frac{\text{Ycifabore} - \text{Ycifaborr}}{\text{Dist}}$$

$$\text{CoDiz} = \frac{\text{Zcifabore} - \text{Zcifaborr}}{\text{Dist}}$$

$$\text{CosE} = \text{CoDix} * \text{Nc}(\text{ifabore},1) + \text{CoDiy} * \text{Nc}(\text{ifabore},2) + \text{CoDiz} * \text{Nc}(\text{ifabore},3)$$

$$\text{CosR} = \text{CoDix} * \text{Nc}(\text{ifaborr},1) + \text{CoDiy} * \text{Nc}(\text{ifaborr},2) + \text{CoDiz} * \text{Nc}(\text{ifaborr},3)$$

$$\text{AireE} = \sqrt{\text{Nc}(\text{ifabore},1)^2 + \text{Nc}(\text{ifabore},2)^2 + \text{Nc}(\text{ifabore},3)^2}$$

$$\text{CoefER} = -2 * \text{CosE} * \text{CosR} / (\text{AireE} * \text{Dist}^2)$$

$$\forall e; \sum_r \text{CoefER} = 2\pi$$

Nous considérons une boîte cubique vide (sans milieu émetteur) de 300x300x300 m³, un maillage régulier grossier de 20x20x20 mailles et un maillage régulier fin de 40x40x40 mailles. Une seule facette du maillage grossier ou quatre facettes du maillage fin, proche du centre (mais ne le contenant pas, ce qui conduira la luminance à différer selon les faces latérales) est portée à 2 000 °C (2 273 K), toutes les autres facettes sont supposées à 1 K afin que leur émission propre soit négligeable. Sur les figures suivantes nous présentons les flux reçus. Nous vérifions que l'intégrale (sur l'ensemble des faces) des flux nets est toujours nulle ; nous comparons l'intégrale des flux reçus sur la face opposée à la facette émettrice et nous définissons un indicateur d'erreur qui est l'intégrale (sur les 5 faces réceptrices) du carré de l'écart entre flux reçus calculés par la méthode des facteurs de vue ou par les diverses versions de la Méthode des Ordonnées Discrètes.

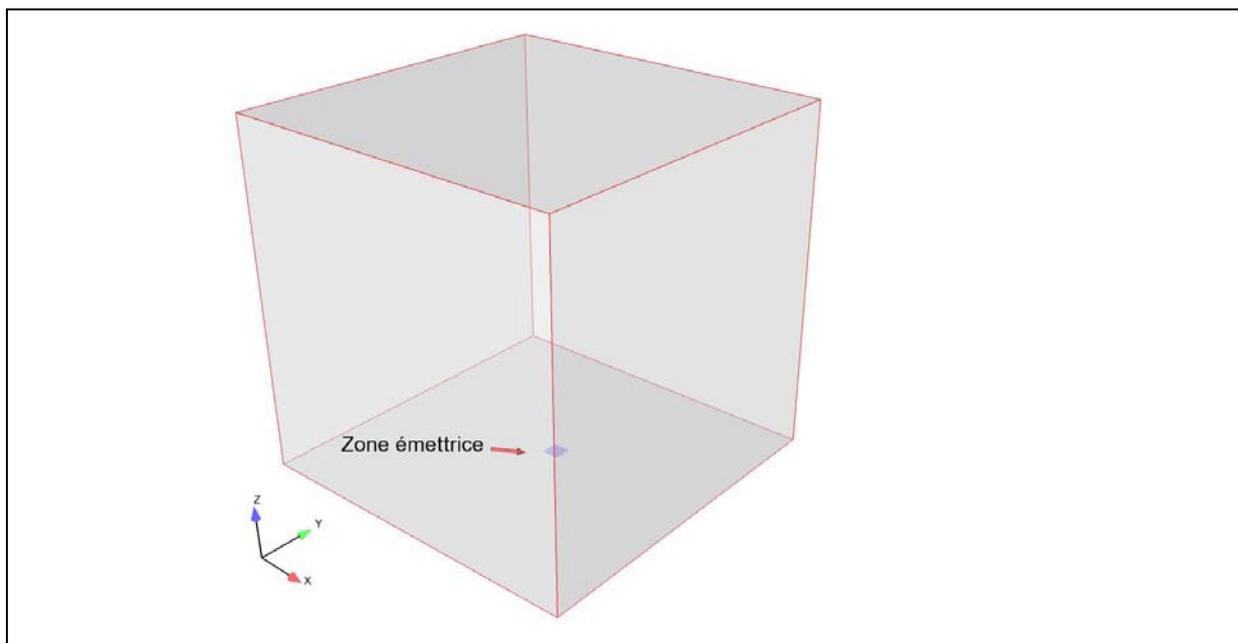


Fig. 16 : Domaine utilisé pour les calculs avec un détail de la zone émettrice

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

	Puissance captée ang et dir de référence	Erreur (DOM-vue)/émission %	Puissance captée ang et dir modifiés	Erreur (DOM-vue)/émission %
Facteur de vue	8,143 e7	Sans objet	8,143 e7	Sans objet
32 sans diff	13,46 e7	15,6	12,39 e7	12,5
32 avec coeff 5.	10,74 e7	7,63	9,419 e7	3,75
128 sans diff	8,339 e7	0,58	8,322 e7	0,53
128 avec coeff 3.	8,827 e7	2,01	8,586 e7	1,30
24 sans diff	18,29 e7	29,8	12,42 e7	12,6
24 avec coeff 3.	12,41 e7	12,5	8,936 e7	2,33

Tab. 7 : Puissance reçue sur la face opposée à la facette (émission = 3,405 e8)

Dans le cas 128 directions, les corrections n'améliorent pas significativement ce critère ; dans le cas 32 directions, a priori bien moins précis, chaque modification améliore significativement le critère.

	Angles et directions actuels	Angles et directions proposés
32 dir sans diffusion	6,3 e11	5,2 e11
32 dir coefficient 5	2,5 e10	1,6 e10
128 dir sans diffusion	7,1 e10	7,6 e10
128 dir coefficient 3	6,3 e9	3,9 e9
24 dir sans diffusion	9,9 e11	6,7 e11
24 dir avec coeff 3	4,8 e10	1,6 e10

Tab. 8 : Intégrale du carré de la différence des flux calculés avec les facteurs de vue ou DOM.

A nouveau le bénéfice des modifications est modérée avec 128 directions mais net et cumulable avec 32. Au final, la version avec 32 directions associée aux nouveaux angles solides et directions ainsi qu'à la prise en compte de la dispersion fournit une erreur 40 fois plus faible que la version d'origine et même 5 fois plus faible que la version d'origine à 128 directions. Si l'on compare les méthodes à 32 et 128 entre elles on constate qu'avec la version de référence le rapport des erreurs était de 8,9 (6,3 e11 / 7,1 e10) et qu'il n'est plus que de 3,8 (1,6 e10 / 3,9 e9).

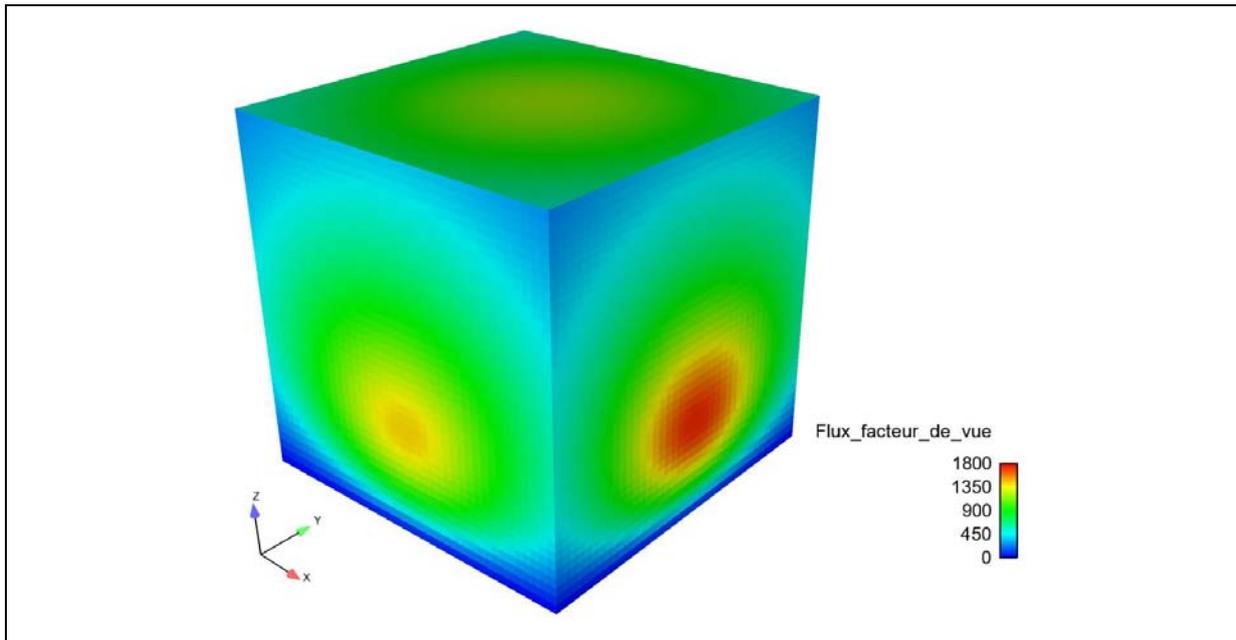
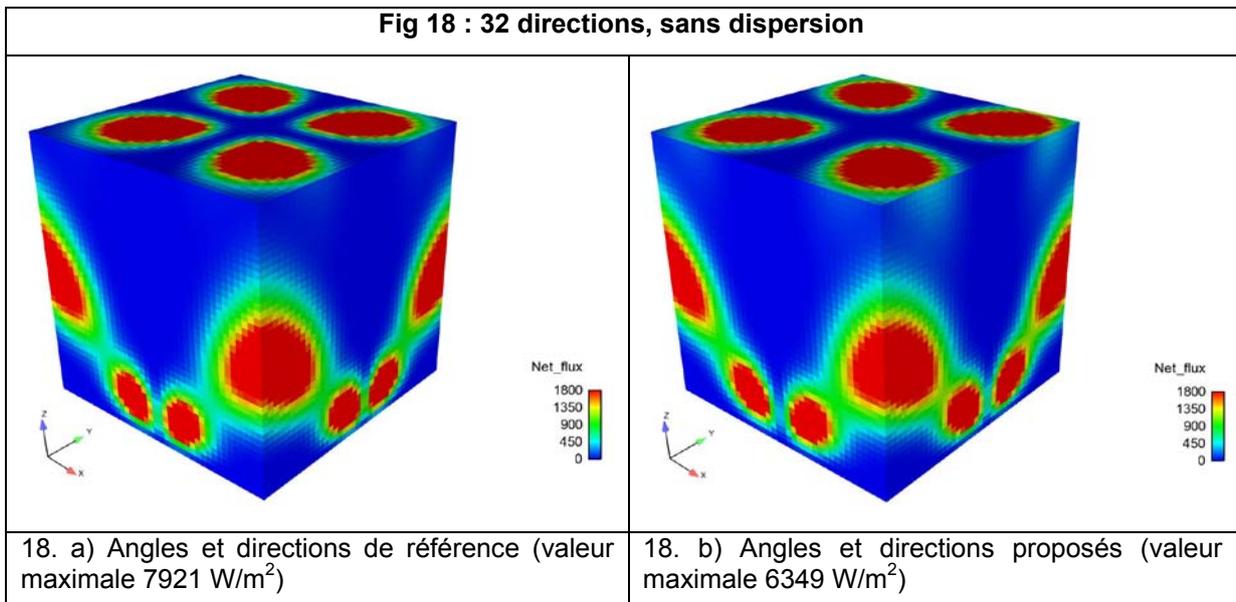


Fig. 17 : Flux nets reçus calculés par les facteurs de vue (valeur maximale 1731 W/m^2)

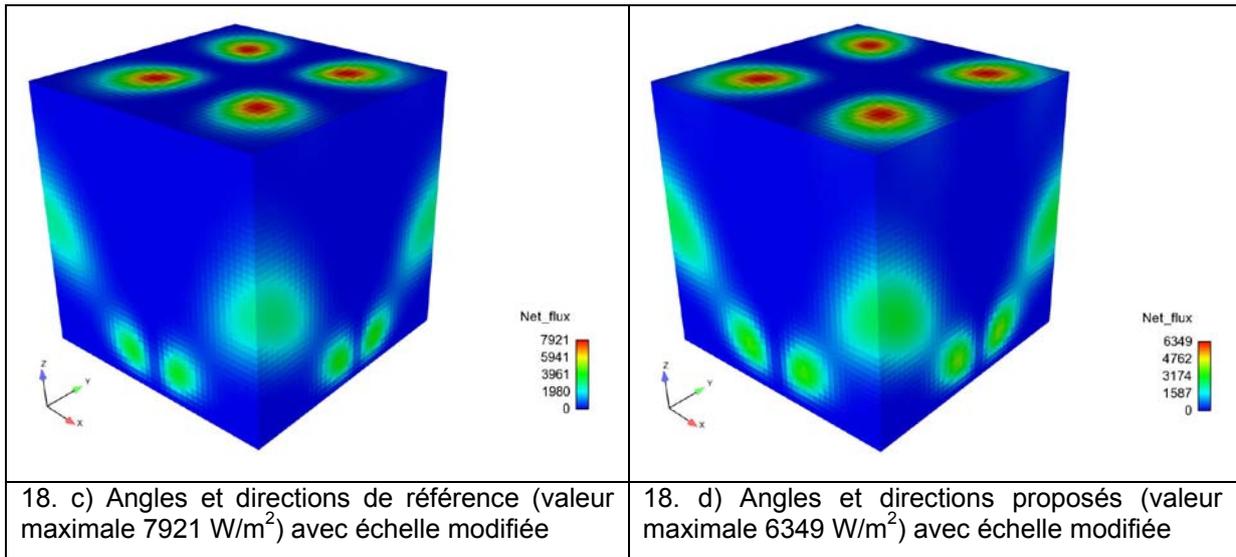
Les premiers calculs à 32 directions sans dispersion permettent d'obtenir des flux aux parois qui devraient être 16 pics de Dirac, ils sont toutefois altérés par la diffusion numérique. Le cas à droite avec des angles et directions proposés montre une séparation un peu (si, si : il y a du bleu dans les coins des figures de gauche !) supérieure des quatre maximums retrouvés sur la face opposée qui corrigent l'erreur de Thurgood (voir annexe). L'erreur dans la valeur maximale de flux obtenue pour les deux calculs est moindre pour le calcul avec les modifications proposées, tout en restant 5 fois supérieure

Fig 18 : 32 directions, sans dispersion

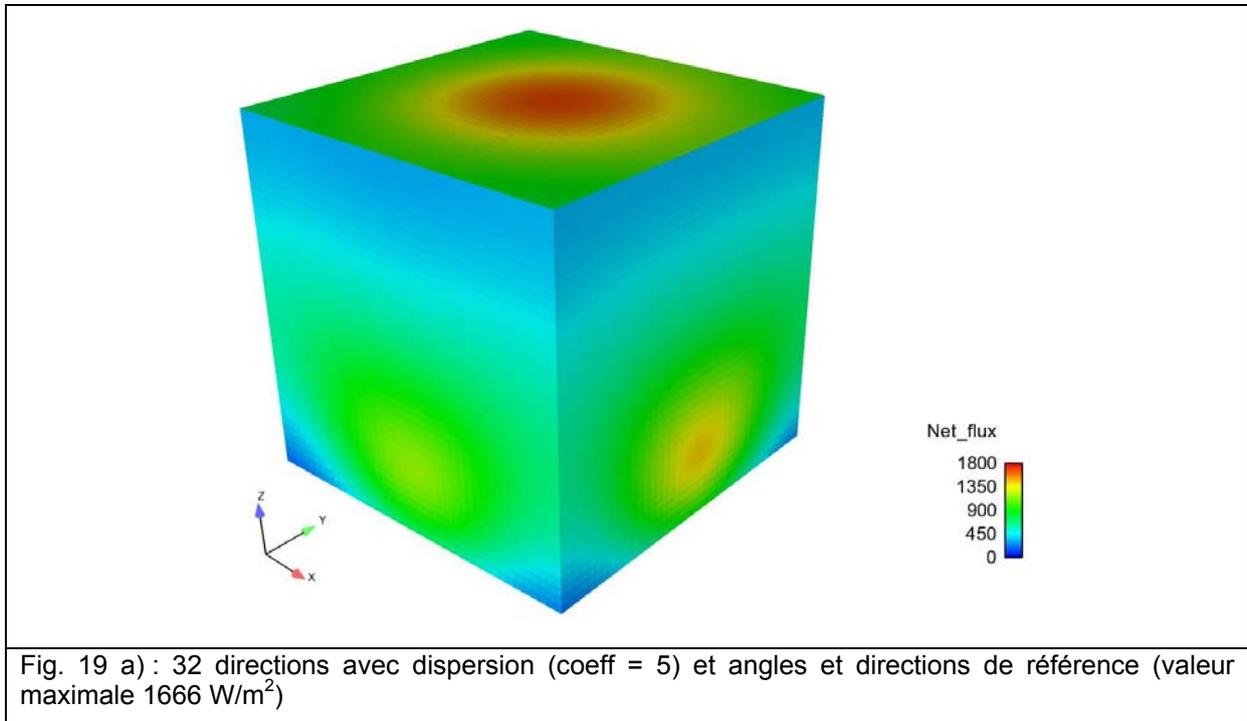


18. a) Angles et directions de référence (valeur maximale 7921 W/m^2)

18. b) Angles et directions proposés (valeur maximale 6349 W/m^2)



Dans les figures suivantes sont représentés les calculs à 32 directions avec dispersion. Ils montrent une amélioration significative dans la distribution des flux reçus et un bon accord avec la solution analytique (facteur de vue). Toutefois le calcul avec les angles et directions actuels, le flux reçu a son maximum sur la face opposée à la zone émettrice alors que la solution analytique le situe sur une face latérale. La correction mise en place sur le calcul des angles et directions réduit cette source d'erreur et le maximum de flux reçu se situe sur la même face qu'avec la méthode des facteurs de vue.



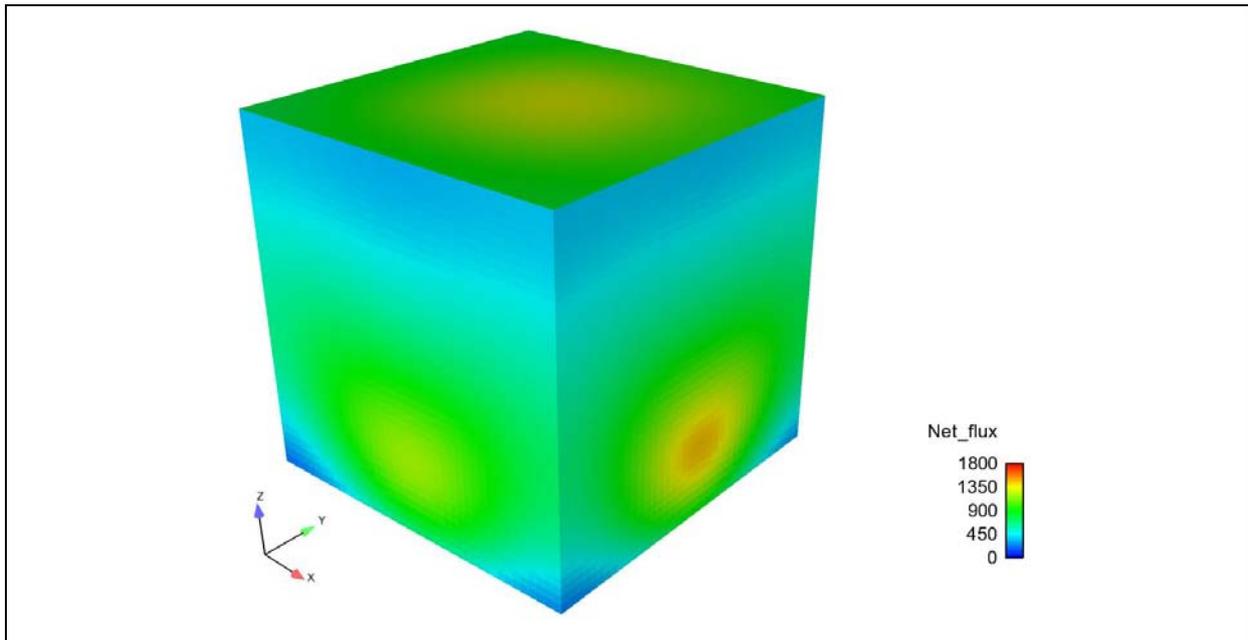
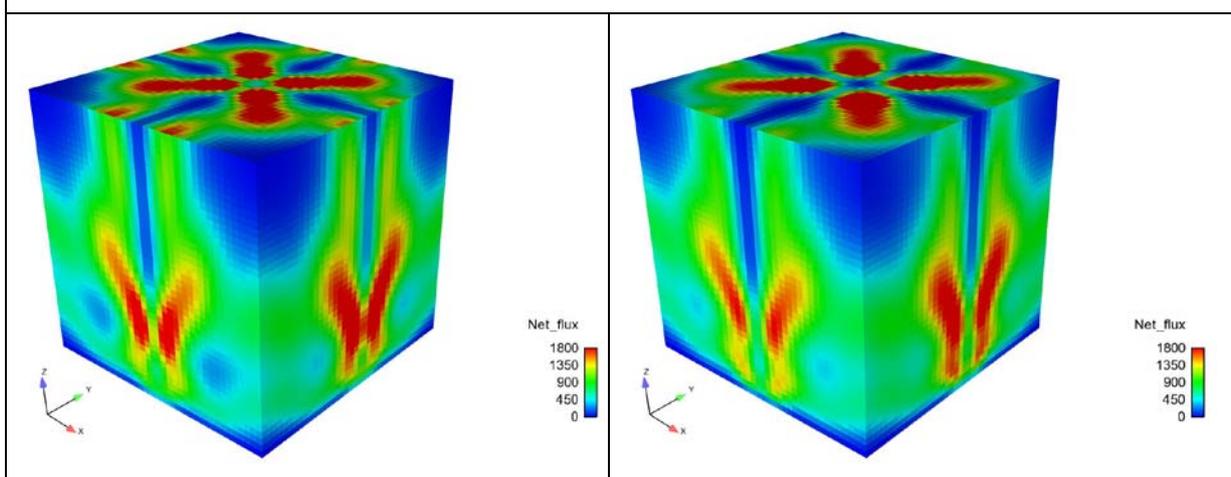


Fig. 19 b) 32 directions avec dispersion (coeff = 5) et angles et directions proposés (valeur maximale 1448 W/m^2)

Les figures suivantes montrent la distribution des flux pour les calculs avec 128 directions sans dispersion. L'effet de la modification des angles et directions est particulièrement visible dans les figures avec échelle modifiée permettant de situer plus précisément les maximums sur la face opposée.

L'effet de la dispersion sur la situation et valeur de maximums de flux à la paroi est visible sur les figures pour le coefficient de dispersion 3. La correction des angles permet une fois de plus de retrouver le maximum sur la face correcte.

Fig. 20 : 128 directions, sans dispersion



20. a) Angles et directions actuels (valeur maximale 3700 W/m^2)

20. b) Angles et directions proposés (valeur maximale 3924 W/m^2)

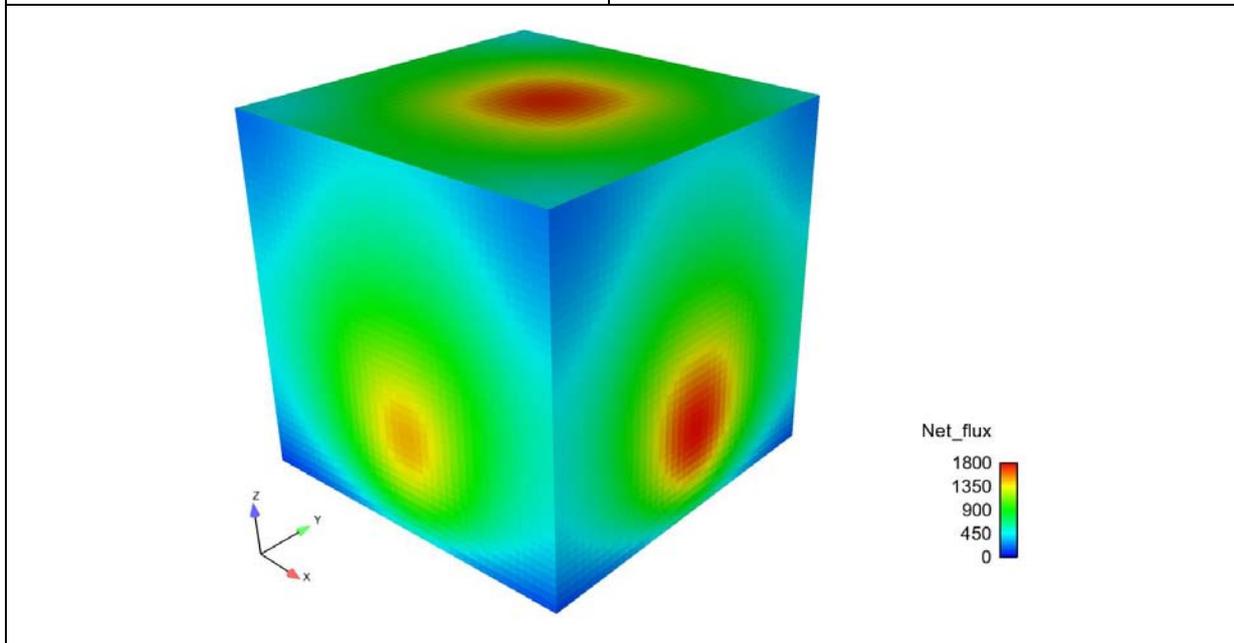
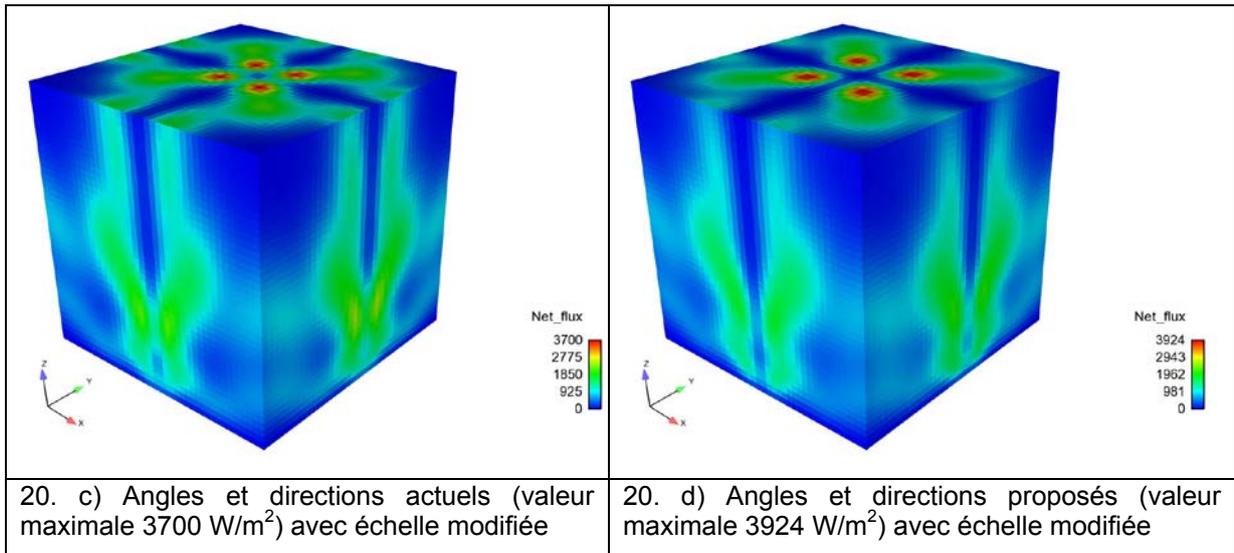


Fig. 21. a) 128 directions avec dispersion (coeff = 3) et angles et directions actuels (valeur maximale 1775 W/m²)

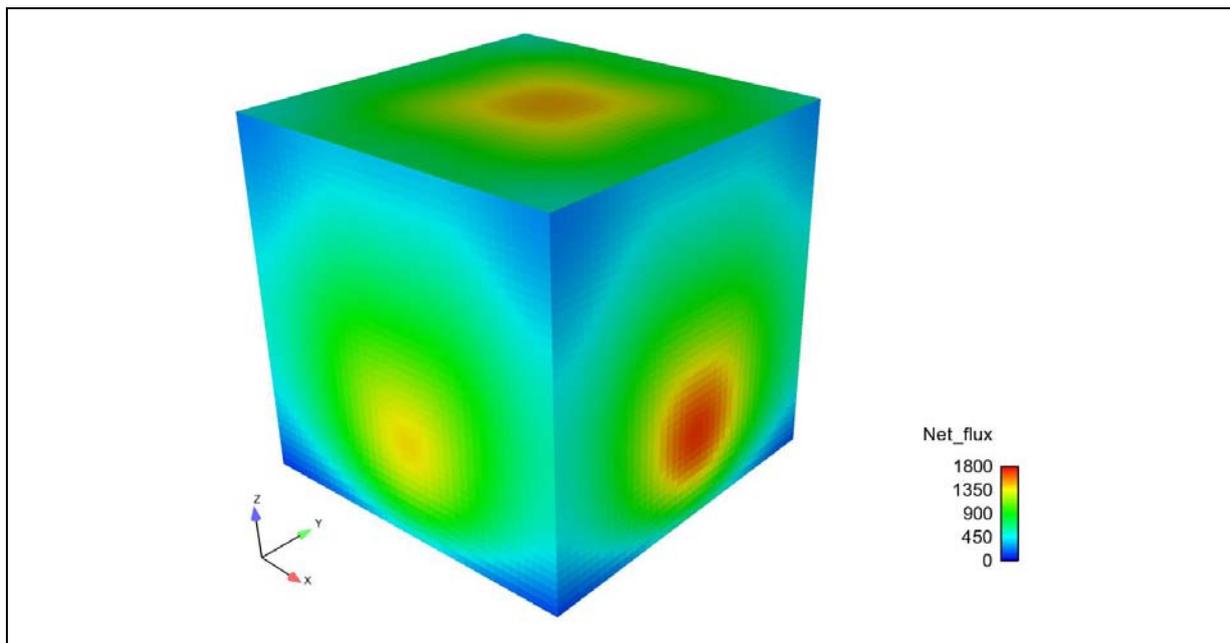


Fig. 21. b) 128 directions avec dispersion (coeff = 3) et angles et directions proposés (valeur maximale 1697 W/m²)

Néanmoins, l'introduction d'un coefficient de diffusion dans l'Equation des Transferts radiatifs tend à réduire la dominance diagonale de la matrice, ce qui induit une augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire aux critères de convergence et donc une augmentation significative du temps de calcul avec la méthode Jacobi. Une part de cette dégradation peut être évitée en utilisant lors de la résolution, la méthode BiCGSTAB (de l'anglais BiConjugate Gradient STABILized method), voire en abaissant, raisonnablement, les critères de convergence. Dans le tableau ci-dessous, les temps de calcul (en secondes CPU) pour 5 itérations de l'ETR sur maillage fin (40x40x40) avec la Méthode des Ordonnées Discrètes à 32 directions sont reportés selon les choix du solveur « IRESOL=1 » signifie l'inversion par la méthode Jacobi et « IRESOL=2 » la méthode BiCGSTAB avec les paramètres ipsilp et epsrsp portés à 10⁻⁵ pour diverses valeurs du coefficient multiplicatif intervenant dans le coefficient de dispersion :

Coefficient de dispersion	Temps de calcul 32 dir Iresol = 1	Temps de calcul 32 dir Iresol = 2	Erreur avec 32 directions	Erreur avec 128 directions
0	25,6	40,4	5,04E+11	7,62E+10
1	72,7	41,5	1,05E+11	1,19E+10
2	127,5	45,6	3,41E+10	4,45E+09
3	193,8	48,8	2,03E+10	3,91E+09
4	267,4	53,2	1,60E+10	4,19E+09
5	325,6	56,6	1,49E+10	4,69E+09
6	351,7	59,1	1,50E+10	

Tab. 9 : Temps de calcul et erreur en DOM 32 et erreur en DOM 128 selon le coefficient de dispersion

La méthode BiCGSTAB, qui n'était pas le meilleur choix dans le cas de référence, devient meilleure que la méthode Jacobi dès que le coefficient de dispersion n'est plus négligeable.

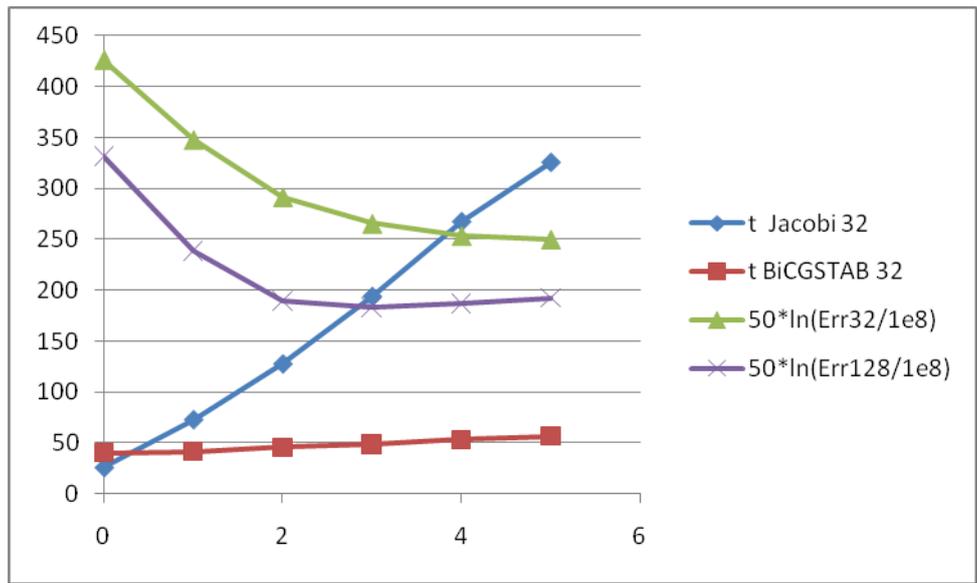


Fig 22 : Temps de calcul et erreur en DOM 32 et erreur en DOM 128 selon le coefficient de dispersion

Nous avons vérifié que, sur des cas homothétiques, avec le même nombre de mailles, l'erreur est exactement proportionnelle au carré de la longueur de l'arête du cube : il n'y a donc pas de décalage entre les termes en dérivée première et en dérivée seconde et nous pouvons considérer que la représentation d'une « convection divergente » telle que la dispersion par une diffusion est, en première approximation, correcte.

La quadrature S4 de [Truelove] à 24 directions est largement utilisée (notamment, dans les codes commerciaux) et nous en proposons également une modification. Le tableau 8 permet de confirmer l'impression laissée par les figures 23 : avec les directions de référence, S4 est moins précise que T2 (erreur augmentée de 57%), la seule correction des directions améliore les deux quadratures et réduit l'écart entre elles (l'erreur n'est plus augmentée que de 29%), enfin l'optimisation du coefficient de dispersion permet d'obtenir des erreurs beaucoup plus faibles et comparables.

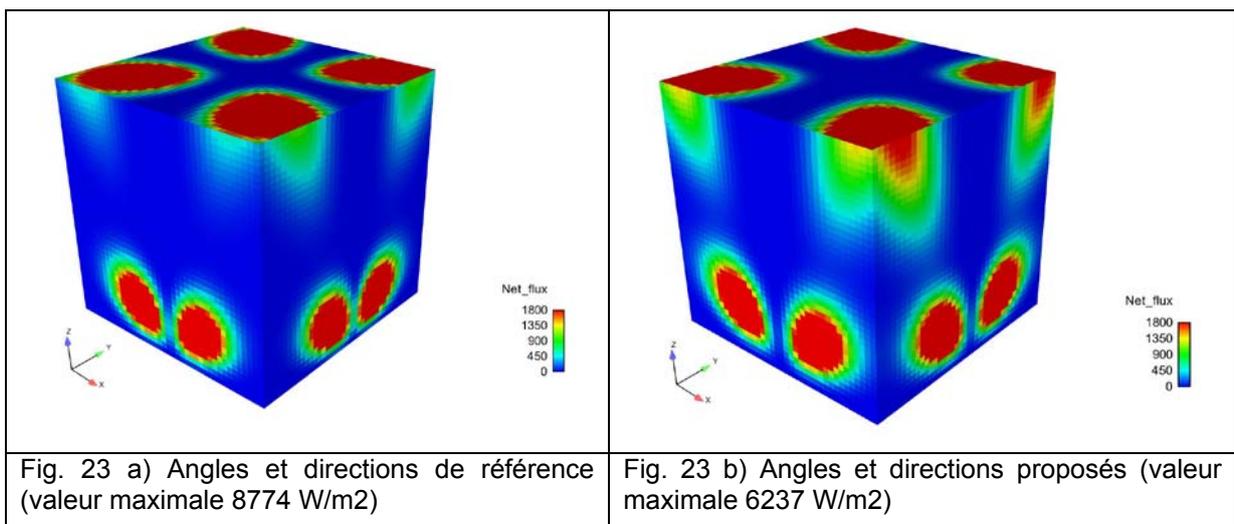


Fig. 23 a) Angles et directions de référence (valeur maximale 8774 W/m²)

Fig. 23 b) Angles et directions proposés (valeur maximale 6237 W/m²)

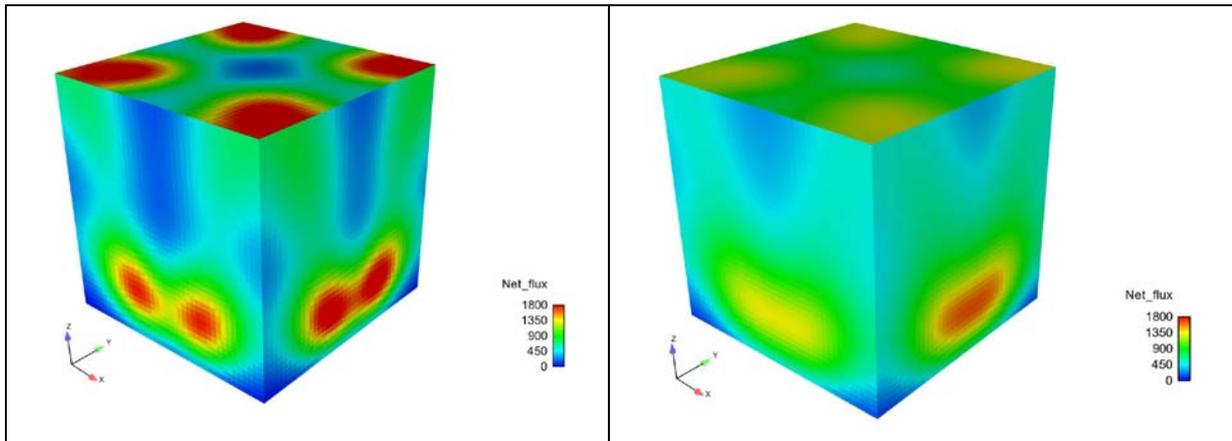


Fig. 23 c) Coef 1 (valeur maximale 2064 W/m²) avec échelle modifiée

Fig. 23 d) Coef 2 (valeur maximale 1642 W/m²) avec échelle modifiée

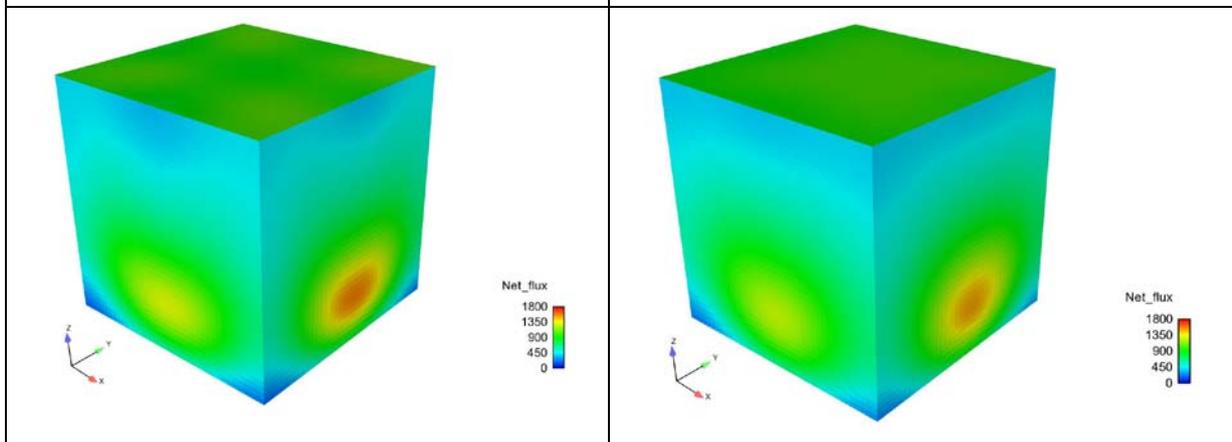


Fig. 23 e) Coef 3 (valeur maximale 1566 W/m²) avec échelle modifiée

Fig. 23 f) Coef 4 (valeur maximale 1503 W/m²) avec échelle modifiée

Le gain lié au coefficient de dispersion sature plus vite à 24 directions qu'avec 32, en particulier, il est désormais impossible d'observer le regroupement en une tache unique sur la face opposée à la facette émettrice.

3.2. Cas semi-analytique : nappe de brouillard

Dans le cadre de la préparation de sa thèse au CEREAS, Laurent Makké cherche à caractériser l'évolution nocturne des nappes de brouillards ; un terme important est alors le rayonnement infrarouge émis par le sol et partiellement capté, Code_Saturne, dispose dans son module atmosphérique de modèles dédiés au rayonnement solaire donc explicitement monodimensionnels. Dans le cadre de cette étude, Laurent a comparé ce modèle monodimensionnel qui peut être considéré comme une solution de référence au modèle DOM qui doit permettre de traiter des cas plus complexes (hétérogénéité thermique du sol).

Les comparaisons portent sur q densité de flux radiatif et s terme source radiatif (divergence de q) dans l'équation pour la température potentielle (la température potentielle est une notion pertinente en météorologie qui combine la température thermodynamique et l'humidité). Pour le cas test SELCUK : enceinte parallélépipédique, milieu absorbant gris ($\kappa=0,34 \text{ m}^{-1}$) à 293 K, parois noires à 473 K.

Avec l'option numérique idervi2, T2 désigne la méthode à 32 directions, T4 celle à 128, réf les valeurs de références des angles solides et directions, new les valeurs proposées dans notre travail, la prise en compte de la dispersion (par un coefficient de diffusion) n'est pas évaluée (hors sujet ici) :

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

	T2 réf	T2 new	T4 réf	T4 new
Δ Srad %	3,39	0,69	1,15	0,52
Δ Q rad %	4,24	2,03	2,47	2,67

Tab. 10 : Erreurs pour les valeurs de référence et les valeurs modifiées des paramètres

Le paramètre crucial, qui est le terme source, est pour la méthode à 32 directions nettement améliorée (facteur 5) voire meilleur que celui de la méthode à 128 directions de référence (facteur 5/3). La méthode à 128 directions bénéficie de la correction des angles et directions (erreur réduite d'un facteur 2,2) bien que les luminances restent assez peu précises (trop concentrées en l'absence de dispersion ?).

3.3. Cas d'intégration : combustion du charbon pulvérisé dans le four du Cerchar

Les modifications proposées ci-dessus, étant relativement lourdes et ne montrant de différences marquées que dans des cas simplistes, nous avons voulu vérifier leur impact sur une configuration semi-industrielle, pour laquelle nous ne disposons pas de mesures ou de méthode de référence mais représentative des cas pratiques. Nous avons donc retenu le four du Cerchar, alimenté en charbon pulvérisé, dans lequel le transfert de chaleur par rayonnement, notamment au niveau de l'ouveau (zone conique supposée adiabatique) conditionne la montée en température et l'inflammation du charbon qui établit ensuite une flamme dans une chaudière cylindrique à température imposée (900 °C).

Avec nos modifications, la température de parois dans l'ouveau est plus élevée de 30K (env. 1 070K au lieu de 1 040K) ce qui devrait induire un rayonnement supérieur de 12 % (T^4)

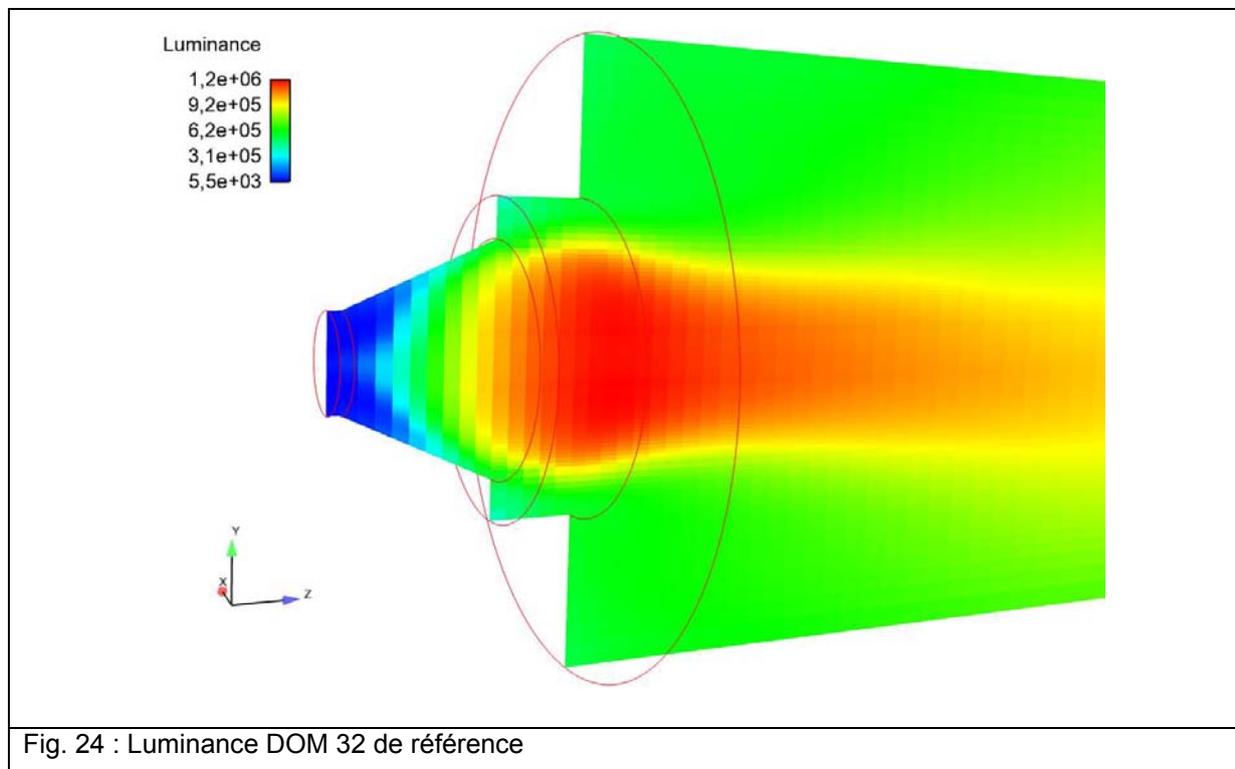
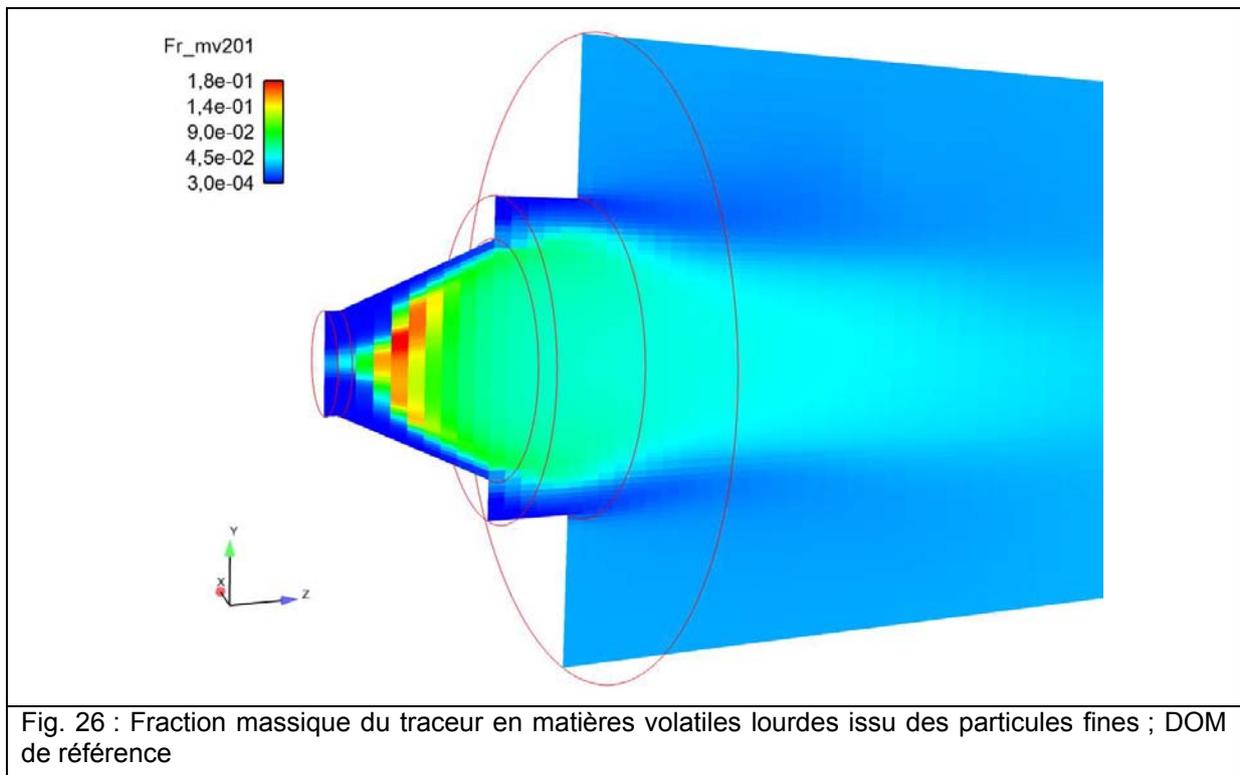
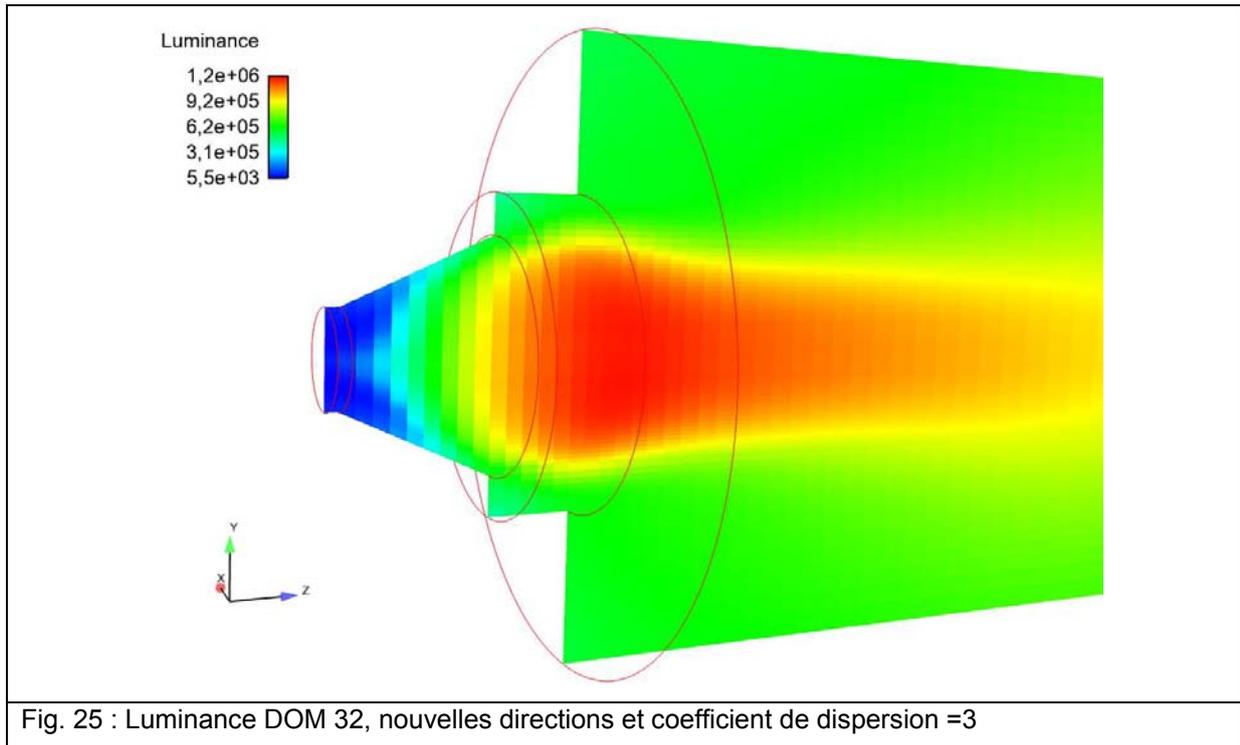
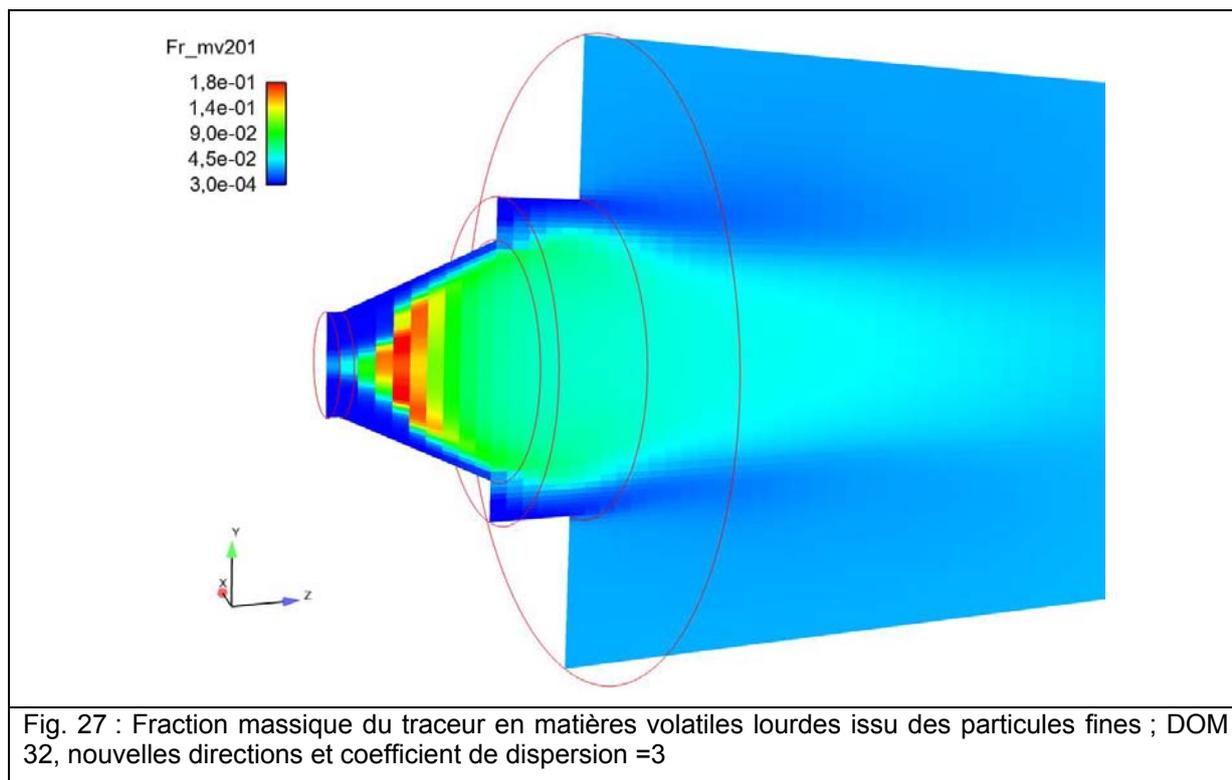
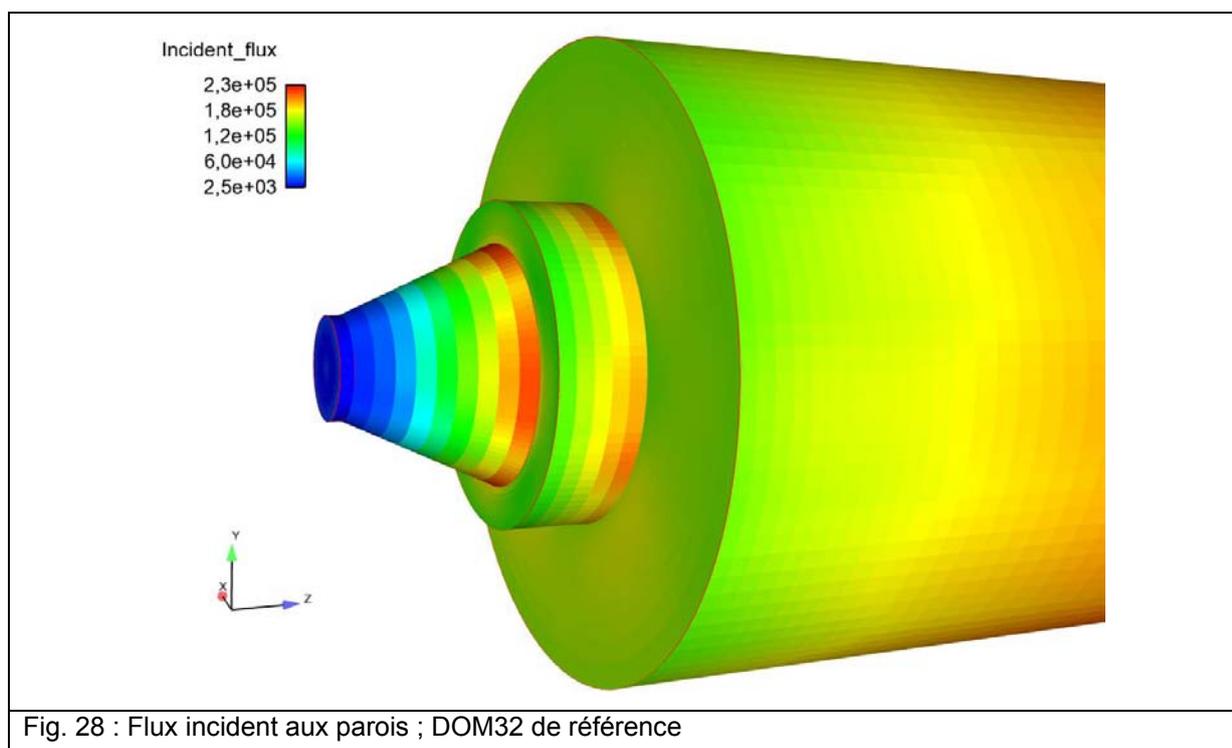


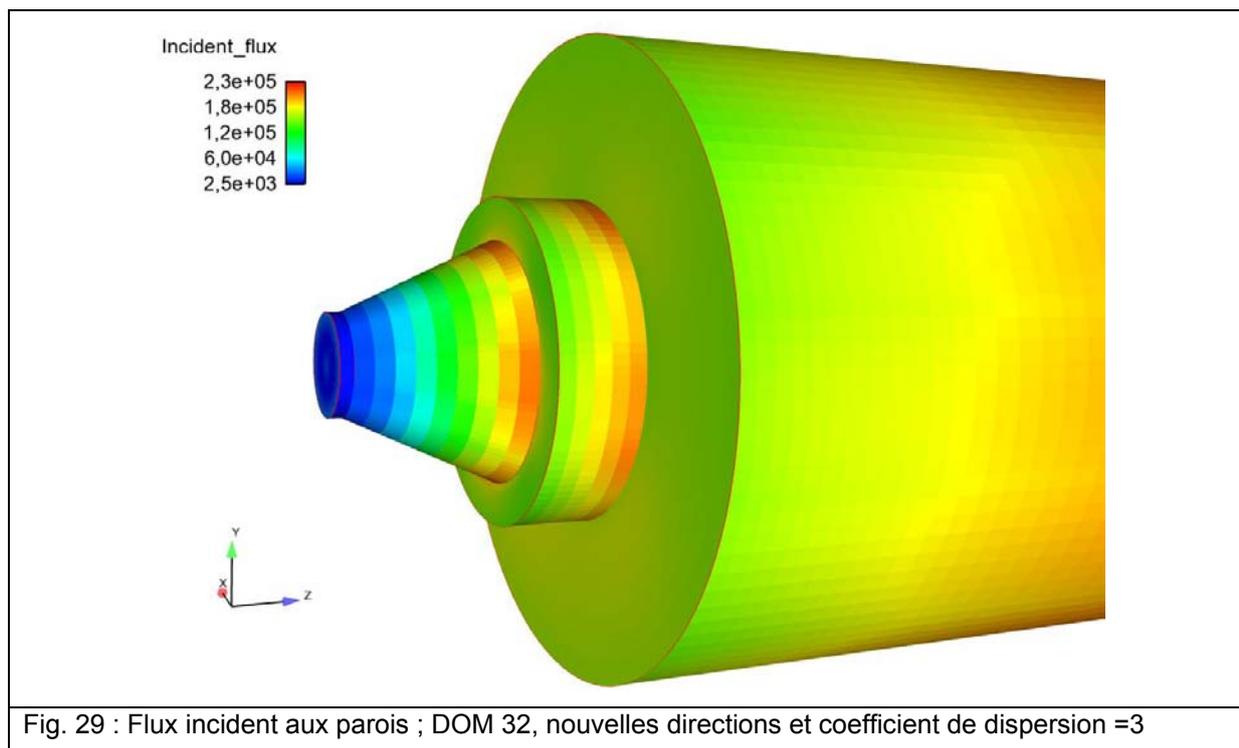
Fig. 24 : Luminance DOM 32 de référence





La comparaison des figures 26 et 27 ne montre qu'une modeste modification de la luminance (somme selon les directions) mais la comparaison des figures 26 et 27 montre que cet effet est suffisant pour augmenter l'échauffement des grains (les plus fins) au point que le dégagement des matières volatiles lourdes (celles issues de la deuxième réaction de Kobayashi à plus grande énergie d'activation), tout en restant du même ordre, soit visiblement plus précoce.





La comparaison des figures 28 et 29 fournit une première explication : les flux reçus par les parois adiabatiques de l'ouvrage semblent plus faibles dans la partie cylindrique la plus proche du four, alors qu'ils sont plus homogènes, et ceux reçus au fond de l'ouvrage (là où ils sont efficaces pour chauffer le charbon entrant) sont plus élevés (zone bleue plus réduite sur la fig. 29 que sur la 28).

4. Conclusions

Ce travail entrepris pour évaluer la possibilité de représenter la dispersion de la luminance dans le cône entourant chaque direction de propagation retenue dans la Méthode des Ordonnées Discrètes par une diffusion a permis, en outre, de proposer un découpage moins inégalitaire et de corriger des erreurs résiduelles dans la détermination des orientations des directions associées (en pratique de rejeter une approximation, proposée par Thurgood, que ses continuateurs ont cru être une solution exacte). L'interprétation dans le cadre de la méthode des quadratures de Truelove permet de montrer que l'utilisation des coordonnées du barycentre des facettes en lieu et place des composantes d'un vecteur directeur (normé) permet de respecter, plus naturellement, les conditions principales. Au final, nous avons montré que l'introduction d'une diffusion (entre lignes parallèles de propagation dans une même direction : à bien distinguer des effets de la diffusion optique qui redistribuerait la luminance entre les directions) permet d'approcher les effets de la dispersion sans modification notable de la méthode de résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs.

Sur un cas simple pour lequel nous disposons d'une solution analytique de référence, l'indicateur d'erreur est, avec la méthode à 32 directions réduit d'un facteur 40, voire réduit d'un facteur 5 par rapport à ce qu'elle était avec la méthode de référence à 128 directions.

Les cas d'intégration démontrent que les résultats sont sensibles aux améliorations proposées.

En conséquence, nous recommandons l'introduction de ces modifications de façon définitive en ce qui concerne les angles et directions, en tant qu'option en ce qui concerne la représentation de la dispersion (dont le coût numérique n'est pas négligeable ou, du moins, reste à optimiser au-delà de cette étude de faisabilité).

Enfin, la présente note a permis de retrouver et de rédiger des éléments théoriques et numériques qui pourront, à terme, être inclus dans la documentation en ligne de *Code_Saturne*.

5. Annexes

5.1. Position des points de partage et équations des arcs

Les angles Theta (« longitude » : 0 sur l'axe de x, 90° sur l'axe des y) et Phi (« latitude » : 0 sur l'équateur et 90° au pôle par lequel passe l'axe des z) sont indiqués en degrés.

Les points 1, 2 et 3 correspondent à l'intersection de la sphère et des axes Z, X et Y.

La dichotomie entre ces points pour déterminer 4, 5 et 6 est simple, en particulier elle conduit à des valeurs évidentes des coordonnées angulaires.

Les dichotomies suivantes ne sont simples que pour les paires de points appartenant à un même plan perpendiculaire à l'un des axes (tel 7 au centre de l'arc 4-1).

Les dichotomies dans les autres cas (tel 9 sur l'arc 4-5) ne sont pas triviales : la demie somme des coordonnées (cartésiennes) n'étant plus unitaire, il faut renormaliser le vecteur pour trouver l'intersection de cette direction avec la sphère puis calculer les coordonnées angulaires à partir des coordonnées cartésiennes.

Néanmoins, cette procédure est générale et permettrait de calculer des découpages d'ordre supérieur.

N°	X	Y	Z	Theta	Phi
1	0	0	1	0	90
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	90	0
4	0,707	0	0,707	0	45
5	0	0,707	0,707	90	45
6	0,707	0,707	0	45	0
7	0,383	0	0,924	0	67,5
8	0	0,383	0,924	90	67,5
9	0,408	0,408	0,816	45	54,7
10	0,924	0	0,383	0	22,5
11	0,816	0,408	0,408	26,6	24,1
12	0,408	0,816	0,408	63,4	24,1
13	0	0,924	0,383	90	22,5
14	0,924	0,383	0	22,5	0
15	0,383	0,924	0	67,5	0

Tab. A1 : coordonnées cartésiennes et sphériques des points de dichotomie des arcs

Attention : les points 9, 11, 12 ont des coordonnées angulaires non triviales !

La position d'un point à la surface de la sphère de rayon unité est constituée des composantes du vecteur unitaire reliant le centre de la sphère à ce point ; le produit scalaire de deux de ces vecteurs est le cosinus de l'angle qui les sépare. En prenant deux à deux les produits entre les trois points, on peut déterminer les angles α , β , γ (qui sont les arccosinus des produits scalaires) pour appliquer la formule de Al-Battani, Viète & Gauss.

Les grands cercles appartiennent, à la fois, à la surface de la sphère unité et à des plans passant par le centre. Les équations de ces plans sont de la forme $a.x+b.y+c.z = 0$; nous pouvons donc les écrire $A.x+B.y+z = 0$.

Connaissant les coordonnées de deux points, il est aisé de déterminer l'équation du plan qui contient le grand cercle passant par eux (analogue de l'équation de la droite passant par deux points du plan).

Arc	A	B
4 - 9 - 5	-1	-1
4 - 11 - 6	-1	1
6 - 12 - 5	1	-1
7 - 8	$-(\sqrt{2} + 1)$	$-(\sqrt{2} + 1)$
7 - 9	$-(\sqrt{2} + 1)$	$(\sqrt{2} - 1)$
8 - 9	$(\sqrt{2} - 1)$	$-(\sqrt{2} + 1)$
11 - 9	1	-3
9 - 12	-3	1
10 - 11	$-(\sqrt{2} - 1)$	$-(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1)$
11 - 12	-1/3	-1/3
12 - 13	$-(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1)$	$-(\sqrt{2} - 1)$
10 - 14	$-(\sqrt{2} - 1)$	1
14 - 11	$(\sqrt{2} + 1)$	$-(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)$
12 - 15	$-(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)$	$(\sqrt{2} + 1)$
15 - 13	1	$-(\sqrt{2} - 1)$

Tab. A2 : Paramètres pour les équations des grands cercles portant les cotés des triangles sphériques.

Attention : les arcs 7 - 9, 9 - 12 et 12 - 15 ne sont pas alignés et constituent un grand cercle brisé (analogue d'une ligne brisée) ; de même 14 - 11, 11 - 9, 9 - 8 et 10 - 11, 11 - 12, 12 - 13.

Détermination, de la latitude en fonction de la longitude, sur un arc donné :

$$x = \text{Cos}(\varphi) \cdot \text{Cos}(\theta); y = \text{Cos}(\varphi) \cdot \text{Sin}(\theta); z = \text{Sin}(\varphi)$$

$$A \cdot x + B \cdot y + z = 0$$

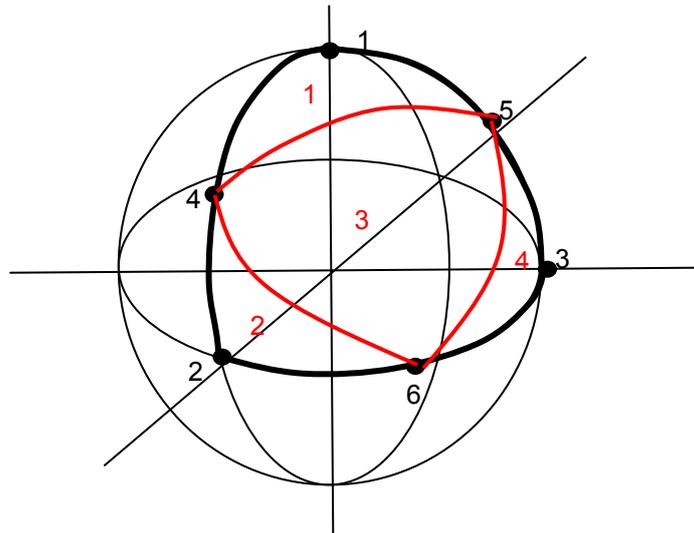
$$\text{Cos}(\varphi) \cdot (A \cdot \text{Cos}(\theta) + B \cdot \text{Sin}(\theta)) = -\text{Sin}(\varphi)$$

$$\text{Cos}(\varphi)^2 \cdot (A \cdot \text{Cos}(\theta) + B \cdot \text{Sin}(\theta))^2 = 1 - \text{Cos}(\varphi)^2$$

$$\text{Cos}(\varphi)^2 = \frac{1}{1 + (A \cdot \text{Cos}(\theta) + B \cdot \text{Sin}(\theta))^2}$$

$$\varphi = \text{ArcCos} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + (A \cdot \text{Cos}(\theta) + B \cdot \text{Sin}(\theta))^2}} \right)$$

Détermination des composantes des vecteurs barycentres pour le découpage à 4 facettes triangulaires :



On considère la coordonnée z dans le triangle 1 :

$$v_2 \cdot \Omega_1 = \int_0^{\pi/2} \int_{\varphi_{45}}^{\pi/2} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_{\varphi_{45}}^{\pi/2} \frac{\text{Sin}(2\varphi)}{2} d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{\text{Cos}(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi_{45}}^{\pi/2} d\theta$$

$$v_2 \cdot \Omega_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi_{45})^2 d\theta$$

Puis la coordonnée z dans le triangle 2 (qui a le même angle solide associé)

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$v_1 \cdot \Omega_1 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\varphi_{46}} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\varphi_{46}} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta$$

$$v_1 \cdot \Omega_1 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\varphi_{46}} \frac{\text{Sin}(2\varphi)}{2} d\varphi d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} [-\text{Cos}(2\varphi)]_0^{\varphi_{46}} d\theta$$

$$v_1 \cdot \Omega_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \text{Cos}(\varphi_{46})^2 d\theta$$

Et enfin la coordonnée z dans le triangle 3 central en remarquant que les arcs inférieurs s'ils n'ont la même équation, ont la même dépendance entre θ et φ :

$$\varphi_{46} = \varphi_{65}$$

$$v_3 \cdot \Omega_3 = \int_0^{\pi/4} \int_{\varphi_{46}}^{\varphi_{45}} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\varphi_{65}}^{\varphi_{45}} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_{\varphi_{46}}^{\varphi_{45}} \text{Sin}(\varphi) \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta$$

$$v_3 \cdot \Omega_3 = \int_0^{\pi/2} \int_{\varphi_{46}}^{\varphi_{45}} \frac{\text{Sin}(2\varphi)}{2} d\varphi d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} [-\text{Cos}(2\varphi)]_{\varphi_{46}}^{\varphi_{45}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\text{Cos}(\varphi)^2]_{\varphi_{45}}^{\varphi_{46}} d\theta$$

$$v_3 \cdot \Omega_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi_{46})^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi_{45})^2 d\theta = \int_0^{\pi/4} \text{Cos}(\varphi_{46})^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi_{45})^2 d\theta$$

Les sommes partielles font donc intervenir plusieurs fois les intégrales caractéristiques :

$$\varphi_{45} = \text{Arccos} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2}} \right)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi_{45})^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta$$

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 + \tan(\theta)^2} = \frac{2t}{1 + t^2}, t = \tan(\theta), d\theta = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi_{45})^2 d\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{2 + \frac{2t}{1 + t^2}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t + t^2}$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j^3 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi_{45})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t-j)(t-j^2)} = \frac{1}{2(j-j^2)} \left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{t-j} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t-j^2} \right)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi_{45})^2 d\theta = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \left[\ln \left(\frac{t-j}{t-j^2} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \ln(j) = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \frac{i2\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\varphi_{46} = \text{Arccos} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + (\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}} \right)$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\varphi_{46})^2 d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + (\cos(\theta) - \sin(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2 - \sin(2\theta)} d\theta$$

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 + \tan(\theta)^2} = \frac{2t}{1 + t^2}, t = \tan(\theta), d\theta = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\varphi_{46})^2 d\theta = \int_0^1 \frac{1}{2 - \frac{2t}{1 + t^2}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 - t + t^2}$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\varphi_{46})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(t+j)(t+j^2)} = \frac{1}{2(j^2-j)} \left(\int_0^1 \frac{dt}{t+j} - \int_0^1 \frac{dt}{t+j^2} \right)$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\varphi_{46})^2 d\theta = \frac{i}{2\sqrt{3}} \left[\ln \left(\frac{t+j}{t+j^2} \right) \right]_0^1 = \frac{i}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{1}{j}\right) = \frac{i}{2\sqrt{3}} \frac{-i2\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Et en reportant les valeurs des intégrales, il vient :

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$v2\Omega1 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$v1\Omega1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$v3\Omega3 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Les angles solides étant différents, la surprenante égalité des valeurs $v2\Omega1$ et $v3\Omega3$ restera une coïncidence sans conséquence.

5.2. Emission à la paroi : détail des intégrations

On procède à la double intégration, avec la longitude θ variant de 0 à 2π et la latitude φ variant de 0 à $\pi/2$. La première intégrale fournit l'angle solide, la seconde est le produit pour chaque direction de l'élément d'angle par le produit de la direction et de la normale à « l'équateur », la troisième est le produit de l'élément d'angle par le carré du produit :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) d\varphi = 2\pi [\sin(\varphi)]_0^{\pi/2} = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\varphi = 2\pi \frac{1}{4} [\cos(2\varphi)]_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi)^2 d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi)^2 d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\varphi) - \cos(3\varphi)}{4} d\varphi =$$

$$2\pi \left(\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) d\varphi - \frac{1}{12} \int_0^{\pi/2} \cos(3\varphi) d\varphi \right) = 2\pi \left(\frac{1}{4} [\sin(\varphi)]_0^{\pi/2} - \frac{1}{12} [\sin(3\varphi)]_0^{\pi/2} \right) =$$

$$2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

5.3. Moments et intégrales utiles

Avec le repère géographique (θ = longitude et φ = latitude), les intégrales sur l'octant sont :

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$x = \text{Cos}(\theta).\text{Cos}(\varphi); y = \text{Sin}(\theta).\text{Cos}(\varphi); z = \text{Sin}(\varphi)$$

$$\iint d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint x.d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi)^2 d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\theta) d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi)^2 d\varphi = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint y.d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\varphi)^2 d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\theta) d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\varphi)^2 d\varphi = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint z.d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\varphi)\text{Cos}(\varphi) d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\varphi)\text{Cos}(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint x^n y^p z^q .d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\theta)^p \text{Cos}(\theta)^n \text{Sin}(\varphi)^q \text{Cos}(\varphi)^{n+p+1} d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\theta)^p \text{Cos}(\theta)^n d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \text{Sin}(\varphi)^q \text{Cos}(\varphi)^{n+p+1} d\varphi = A(p,n).A(q,n+p+1)$$

En remplaçant θ par $\pi/2-\theta$, il est trivial de démontrer que $A(p,n)=A(n,p)$.

Ensuite, les intégrales évidentes $A(0,0)=\pi / 2$; $A(1,0)=1$; $A(2,0)=\pi / 4$; $A(1,1) = 1 / 2$ devront être complétées par quelques valeurs qui le sont, à peine, moins : $A(3,0)=2 / 3$; $A(2,1) = 1 / 3$; $A(4,0) = 3 \pi / 16$; $A(3,1) = 1 / 4$; $A(2,2) = \pi / 16$; $A(5,0) = 8 / 15$; $A(4,1) = 3 / 15$; $A(3,2) = 2 / 15$; $A(6,0) = 5 \pi / 32...$

Soit, en reportant :

$$\iint x^2 .d\omega = A(2,0).A(3,0) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint y^2 .d\omega = A(2,0).A(3,0) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint z^2 .d\omega = A(0,0).A(2,1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint x y .d\omega = A(1,1).A(3,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\iint x z .d\omega = A(1,0).A(2,1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\iint y z .d\omega = A(1,0).A(2,1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

En ne distinguant plus les intégrales homogènes en degré :

$$\iint x^3 .d\omega = A(3,0) . A(4,0) = \frac{2}{3} . \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

$$\iint x^2 y .d\omega = A(2,1) . A(4,0) = \frac{1}{3} . \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

$$\iint x y z .d\omega = A(1,1) . A(3,1) = \frac{1}{8}$$

$$\iint x^4 .d\omega = A(4,0) . A(5,0) = \frac{3\pi}{16} . \frac{8}{15} = \frac{\pi}{10}$$

$$\iint x^3 y .d\omega = A(3,1) . A(5,0) = \frac{1}{4} . \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\iint x^2 y^2 .d\omega = A(2,2) . A(5,0) = \frac{\pi}{16} . \frac{8}{15} = \frac{\pi}{30}$$

$$\iint x^2 y z .d\omega = A(2,1) . A(4,1) = \frac{1}{3} . \frac{3}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\iint x^5 .d\omega = A(5,0) . A(6,0) = \frac{8}{15} . \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi}{12}$$

Suivant les recommandations de [Koch] on doit se focaliser sur les moments homogènes, soit, sur l'octant, les valeurs régulières :

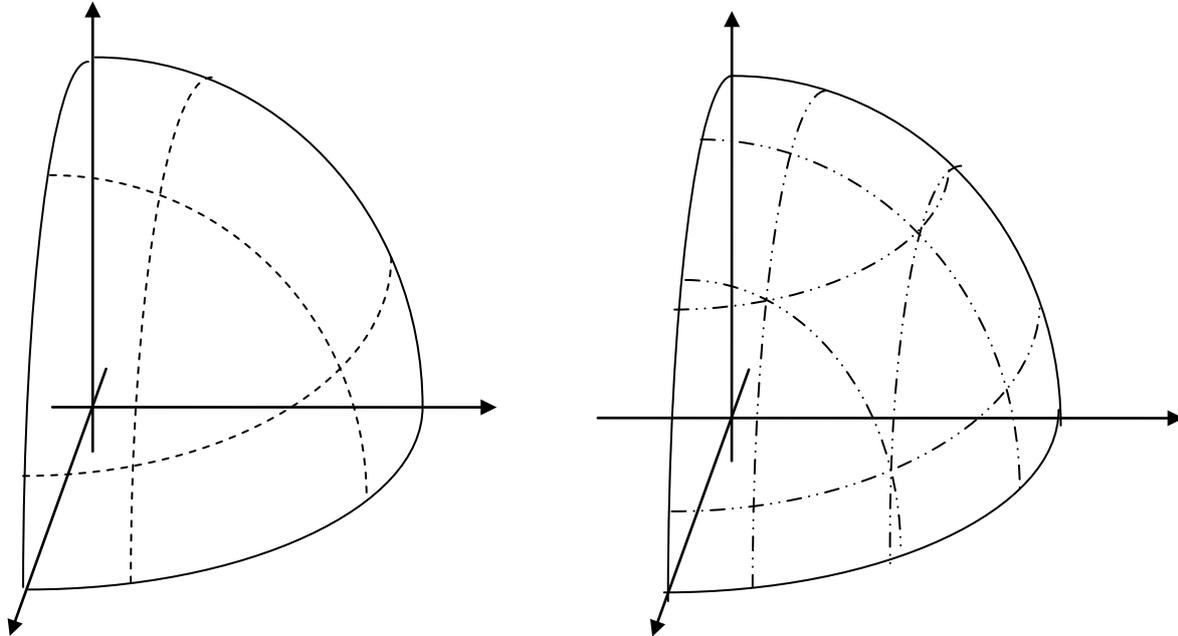
$$\iint d\omega = \frac{\pi}{2} ; \iint x .d\omega = \frac{\pi}{4} ; \iint x^2 .d\omega = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint x^3 .d\omega = \frac{\pi}{8} ; \iint x^4 .d\omega = \frac{\pi}{10} ; \iint x^5 .d\omega = \frac{\pi}{12}$$

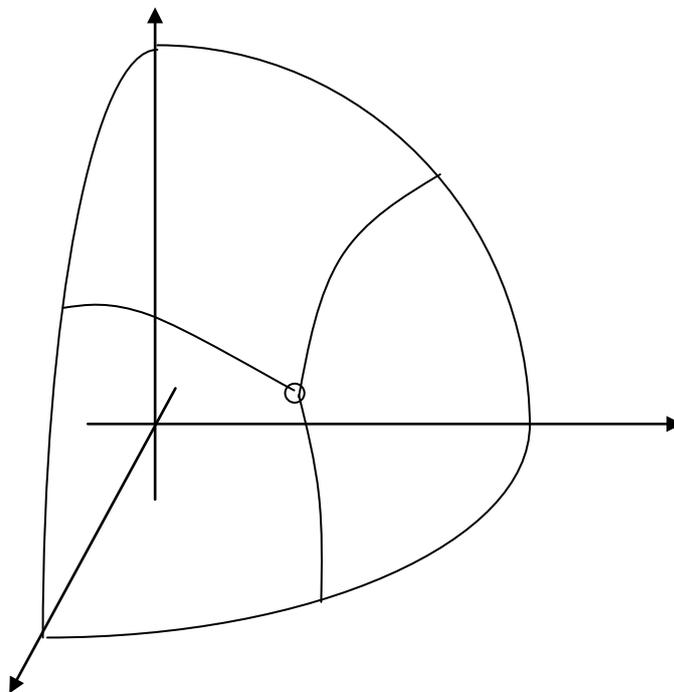
$$\iint x^n .d\omega = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

5.4. Des découpages égalitaires ?

A partir de la figure 2 :



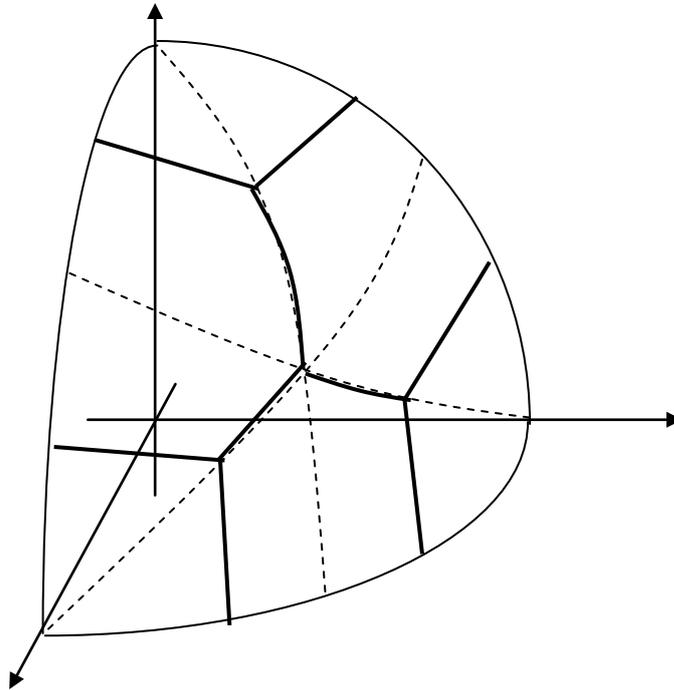
Nous avons su construire un pavage de la sphère en trois facettes égales :



Dont les directions des barycentres ne correspondaient guère à celle identifiées par Truelove.

En considérant les conditions de symétrie et le principe du découpage proposé, nous pouvons

rechercher un pavage en 6 facettes de même aire (ou angle solide) qui ne sauraient être semblables :



Les 6 facettes sous-tendent des angles solides de $\pi/12 = 0,2617994$. La donnée caractéristique de ce découpage (qui permet de retrouver les autres par des considérations de symétrie) est la latitude du sommet gauche (en $y=0$) de la facette quadrangulaire supérieure, soit $59^{\circ}419880102$, (l'arête qui en part est un segment de grand cercle passant par le point $y=1$).

Pour les trois périphériques ($0,24553616$; $0,24553616$; $0,91453353$) l'écart à l'axe est alors de $20^{\circ}79$

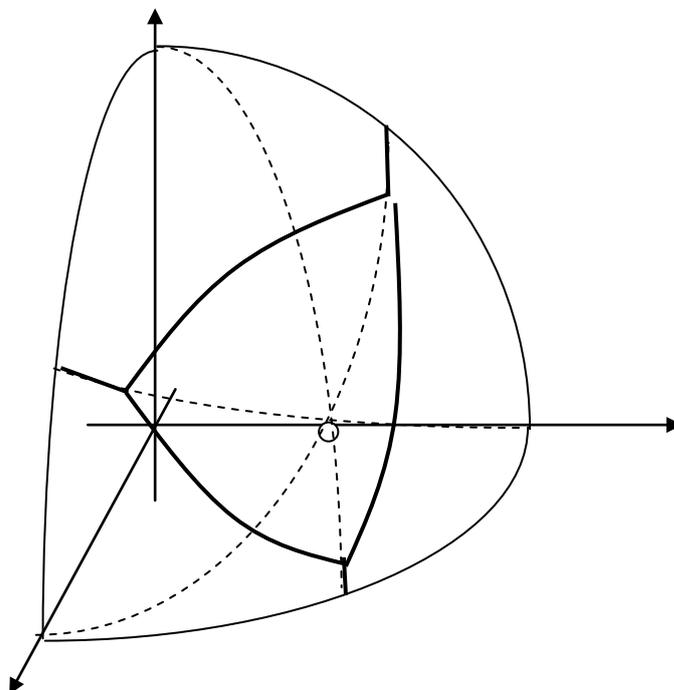
Les trois facettes centrales ont pour barycentre ($0,66656208$; $0,66656208$; $0,26128684$) l'écart au plan est alors $15^{\circ}49$.

Rappelons qu'avec les valeurs de référence : les facettes périphériques (non localisées) sous-tendent des angles solides de $0,16095$ et ont pour coefficients directeurs ($0,183867$; $0,183867$; $0,9656013$) soit un écart à l'axe de $15,07$ et les facettes centrales, qui sous-tendent un angle solide de $0,36264$ ont pour coefficients directeurs ($0,6950514$; $0,6950514$; $0,1836867$) soit un écart au plan de $10^{\circ}58$.*

Les écarts entre directions de référence et directions proposées sont, à nouveau, de l'ordre de 5° mais ne sont plus directement comparables puisque les facettes de référence étaient dans un rapport $2,25$ alors que celles proposées ici sont égales.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

En suivant une démarche similaire, il est possible de rechercher une modification du découpage T2 pour obtenir des facettes égales, à $\pi/8$ soit 0,3926991



Les facettes périphériques ont pour coordonnées de barycentre (0,285091 ; 0,285091 ; 0,873411). L'angle par rapport à l'axe est alors de $24^{\circ}78$, la facette centrale a un barycentre dans la direction de la grande diagonale mais interne soit (0,5564 ; 0,5564 ; 0,5564) ; on remarque que, bien que les angles solides soient égaux, les normes des barycentres ne le sont pas 0,962 pour les facettes périphériques, 0,964 pour la centrale. La donnée caractéristique de ce découpage (qui permet de retrouver toutes les autres par des considérations de symétrie) est la longitude du sommet supérieur gauche de la facette centrale, soit $7^{\circ}1101867$.

Bien que cette dernière construction soit plus complexe que celle proposée par [Thurgood] et qu'en particulier, elle ne puisse pas être simplement itérée (les facettes pentagonales ne se laissant pas aisément divisées) ; force nous est de constater que tant les valeurs des « poids » (ou angles solides associés) que les directions (compte non tenu de notre recommandation d'utiliser les coordonnées des barycentres en lieu et place des composantes des vecteurs directeurs) sont remarquablement proches de celles proposées par [A. Martin] et antérieurement utilisées dans *Code_Saturne* ; ceci pourrait expliquer le comportement satisfaisant des versions antérieures !

5.5. La pertinence du moment d'ordre 2

Les découpages analogues à T2 ou à S4 peuvent s'écrire en faisant intervenir les mêmes symétries dans la notation des directions :

$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v2 \end{pmatrix}; U2 = \begin{pmatrix} v2 \\ v1 \\ v1 \end{pmatrix}; U3 = \begin{pmatrix} v3 \\ v3 \\ v3 \end{pmatrix}; U4 = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v1 \end{pmatrix}$$

Les découpages à 3 (Truelove) facettes sous-tendant des angles solides égaux à $\pi/6$ ou à quatre facettes avec une valeur ω_3 pour la facette centrale et une valeur commune aux facettes périphériques $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = (\pi/2 - \omega_3)/3$.

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

Le vecteur U3 est colinéaire à la grande diagonale, en introduisant sa norme n3, nous pouvons écrire,

$$v3 = \frac{n3}{\sqrt{3}}$$

Le vecteur U1, associé à la facette périphérique supérieure, peut se mettre, en introduisant sa norme n1, sous la forme
$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) \end{pmatrix}$$

Les moments d'ordre 2 de toutes les composantes s'écrivent alors :

$$S2j = \sum_i^4 \omega_i \cdot v_{i,j}^2 = \omega_1 \cdot (2 v_1^2 + v_2^2) + \omega_3 v_3^2 = \frac{\pi/2 - \omega_3}{3} \cdot n_1^2 \left(\frac{2}{2} \text{Cos}(\varphi1)^2 + \text{Sin}(\varphi1)^2 \right) + \omega_3 \cdot n_3^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$S2j = \frac{\pi/2 - \omega_3}{3} \cdot n_1^2 + \frac{\omega_3}{3} \cdot n_3^2$$

Le moment d'ordre 2 est indifférent aux directions retenues pour les découpages à 3 ou 4 directions ; pour les mêmes raisons de symétrie les découpages à 6 ou 16 facettes se comporteront à l'identique.

Le moment d'ordre est égal à la valeur théorique si et seulement si tous les vecteurs directions sont normés, alors :

$$S2j = \frac{\pi/2 - \omega_3}{3} + \frac{\omega_3}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Auquel cas, la valeur de la somme ne dépend pas, non plus de celles des angles solides (seulement de leur somme).

Sur ces cas à 3 ou 4 facettes nous avons ainsi démontré que le moment d'ordre 2 est vérifié pour tous les ensembles d'angles solides vérifiant le moment d'ordre 0 et de directions vérifiant les conditions de symétrie et décrites par des vecteurs normés (coefficients directeurs).

L'exactitude du moment d'ordre 2 est donc un argument faible quant à la pertinence de ces directions pour décrire la propagation du rayonnement.

5.6. Minimiser la dispersion autour de l'intégrale azimutale

Au § 2.2 les figs 5 & 6 nous ont permis d'introduire un indicateur d'erreur constitué par le carré de la différence de puissances cumulées selon l'azimut soit selon la répartition continue et selon les discrétisations proposées. La puissance émise par un octant cumulée selon l'azimut s'écrit :

$$W(\Phi) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\Phi} \text{Cos}(\varphi) \cdot \text{Sin}(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{8} \cdot (1 - \text{Cos}(2\Phi))$$

La puissance émise par un schéma DOM cumulée selon l'azimut va varier de façon discontinue chaque fois que l'azimut atteindra celui d'une des directions.

Par exemple avec le découpage à trois facettes symétriques, il est judicieux de modifier la description des directions pour faire apparaître les deux azimuts caractéristiques :

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) \end{pmatrix}; \varphi2 = \text{ArcSin}\left(\frac{\text{Cos}(\varphi1)}{\sqrt{2}}\right)$$

Les trois facettes sous-tendent des angles solides de $\pi/6$, ce qui vérifie le moment d'ordre 0 ; le moment d'ordre 1 est vérifié par la condition suivante :

$$U1 = \begin{pmatrix} v1 \\ v1 \\ v2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1/\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi1) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2) \\ n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) \end{pmatrix}; \varphi2 = \text{ArcSin}\left(\frac{\text{Cos}(\varphi1)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot (n1 \cdot \text{Sin}(\varphi1) + 2 \cdot n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2)) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n1 \cdot (\text{Sin}(\varphi1) + \sqrt{2} \text{Cos}(\varphi1)) = \frac{3}{2}$$

Une factorisation judicieuse du second facteur du premier membre permet de faire apparaître une identité trigonométrique :

$$\sqrt{3} \cdot n1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{Sin}(\varphi1) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{Cos}(\varphi1) \right) = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3} \cdot n1 \cdot (\text{Sin}(\alpha) \cdot \text{Sin}(\varphi1) + \text{Cos}(\alpha) \text{Cos}(\varphi1)) = \frac{3}{2}; \alpha = \text{ArcCos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$n1 \cdot \text{Cos}(\varphi1 - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour un vecteur normé, tel que recommandé par Truelove, il vient :

$$\text{Cos}(\varphi1 - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \varphi1 = \text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{ArcCos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Pour une recherche de directions optimales, du point de vue de l'intégrale du carré de l'écart entre puissance continue et puissance discrète, nous utiliserons cette formule pour déterminer la norme du vecteur :

$$n1 = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \text{Cos}(\varphi1 - \alpha)}$$

La puissance rayonnée en-dessous de l'azimut $\varphi2$ est nulle, au-delà elle vaut deux fois le produit de l'angle solide par $n1 \cdot \text{Sin}(\varphi2)$ enfin, au-dessus de $\varphi1$ elle atteint sa valeur limite soit $\pi/4$ (i.e. le premier moment). L'intégrale du carré de l'erreur comporte donc 3 termes :

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
---------	---	------------------------------------

$$\begin{aligned} \text{Err} &= \int_0^{\varphi 2} W(\varphi)^2 d\varphi + \int_{\varphi 2}^{\varphi 1} (W(\varphi) - 2.n1.\text{Sin}(\varphi 2))^2 d\varphi + \int_{\varphi 1}^{\pi/2} \left(W(\varphi) - \frac{\pi}{4}\right)^2 d\varphi \\ \text{Err} &= \int_0^{\pi/2} W(\varphi)^2 d\varphi - 2.n1.\text{Sin}(\varphi 2) \int_{\varphi 2}^{\varphi 1} W(\varphi) d\varphi + 4.n1^2.\text{Sin}(\varphi 2)^2 .(\varphi 1 - \varphi 2) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} . \int_{\varphi 1}^{\pi/2} W(\varphi) d\varphi + \frac{\pi^2}{16} . \left(\frac{\pi}{2} - \varphi 1\right) \end{aligned}$$

Le premier terme ne dépendant pas de la direction, nous pouvons l'omettre, et en reportant l'expression pour n1 la norme du vecteur et $\varphi 2$ l'azimut des facettes « inférieures », il vient :

$$\begin{aligned} \text{Err}' &= -\frac{\sqrt{3}.\text{Cos}(\varphi 1)}{\sqrt{2}.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)} . \int_{\varphi 2}^{\varphi 1} W(\varphi) d\varphi + \frac{3.\text{Cos}(\varphi 1)^2}{2.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)^2} .(\varphi 1 - \varphi 2) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} . \int_{\varphi 1}^{\pi/2} W(\varphi) d\varphi + \frac{\pi^2}{16} . \left(\frac{\pi}{2} - \varphi 1\right) \\ \varphi 2 &= \text{ArcSin}\left(\frac{\text{Cos}(\varphi 1)}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

En introduisant l'expression de W(φ), il vient :

$$\begin{aligned} \text{Err}' &= -\frac{\sqrt{3}.\text{Cos}(\varphi 1)}{\sqrt{2}.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)} . \int_{\varphi 2}^{\varphi 1} \frac{\pi}{8} .(1 - \text{Cos}(2\varphi)) d\varphi + \frac{3.\text{Cos}(\varphi 1)^2}{2.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)^2} .(\varphi 1 - \varphi 2) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} . \int_{\varphi 1}^{\pi/2} \frac{\pi}{8} .(1 - \text{Cos}(2\varphi)) d\varphi + \frac{\pi^2}{16} . \left(\frac{\pi}{2} - \varphi 1\right) \end{aligned}$$

Les premiers termes (indépendants de φ) de chaque intégrale, se réarrangent avec les termes suivants :

$$\begin{aligned} \text{Err}' &= \frac{\pi}{8} \frac{\sqrt{3}.\text{Cos}(\varphi 1)}{\sqrt{2}.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)} . \int_{\varphi 2}^{\varphi 1} \text{Cos}(2\varphi) d\varphi + \left(\frac{3.\text{Cos}(\varphi 1)^2}{2.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)^2} - \frac{\pi}{8} . \frac{\sqrt{3}.\text{Cos}(\varphi 1)}{\sqrt{2}.\text{Cos}(\varphi 1 - \alpha)} \right) .(\varphi 1 - \varphi 2) \\ &\quad + \frac{\pi^2}{16} . \int_{\varphi 1}^{\pi/2} \text{Cos}(2\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

$$\begin{aligned}
\text{Err}' &= \frac{\pi}{8} \frac{\sqrt{3} \cdot \text{Cos}(\varphi_1)}{\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi_1 - \alpha)} \cdot \frac{\text{Sin}(2\varphi_1) - \text{Sin}(2\varphi_2)}{2} \\
&+ \left(\frac{3 \cdot \text{Cos}(\varphi_1)^2}{2 \cdot \text{Cos}(\varphi_1 - \alpha)^2} - \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \text{Cos}(\varphi_1)}{\sqrt{2} \cdot \text{Cos}(\varphi_1 - \alpha)} \right) \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \\
&+ \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{-\text{Sin}(2\varphi_1)}{2}
\end{aligned}$$

Fonction qui présente un extrema en 61° soit beaucoup plus près des 60°4 correspondants au barycentre que des 65°3 déterminés selon l'algorithme de Truelove.

Cette analyse semble conforter le choix du critère intégral mais ne peut être directement utilisée pour déterminer des directions optimales dans le cas général (trop nombreux paramètres indépendants).

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	---	--

6. Bibliographie

Balsara, D.

“Fast and accurate discrete ordinates methods for multidimensional radiative transfer. Part 1, basic methods”

Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer (2001) vol 69 pp 671-707

Ben-WenLi, Qiang Yao, Xin-Yu Cao & Ke-Fa Cen

« A new discrete ordinate quadrature scheme for three dimensional radiative heat transfer »

ASME Journal of Heat Transfer (1998) Vol. 120 pp 514-518

Boulet, P., Collin, A. & Consalvi J.L.

« On the finite volume method and the discrete ordinates method regarding radiative heat transfer in acute forward anisotropic scattering media »

Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer (2007) vol 104 pp 460-473

David J.

“Modélisation des transferts radiatifs en combustion par la méthode des ordonnées discrètes sur des maillages non structurés tridimensionnels »

Thèse INPT 2004

Koch, R. & Becker, R.

“Evaluation of quadrature scheme for the discrete ordinate method”

Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer (2004) vol 84 pp 423-435

Martin A.

“Modélisation du couplage rayonnement – convection appliqué aux flammes de diffusion de type industriel”

Thèse à l’université Pierre et Marie Curie 11/12/1992

Siegel, R. & Howell J.R.

“Thermal Radiation Heat Transfer”

3rd edition

Thurgood, C.P. ; Pollard, A. & Becker, H.A.

“The Tn quadrature set for the discrete ordinate method”

ASME Journal of Heat Transfer (1995), Vol. 117, pp 1068-1070

EDF R&D	Résolution de l'Equation des Transferts Radiatifs avec la Méthode des Ordonnées Discrètes dans Code_Saturne : propositions de modifications	H-I81-2013-01916-FR Version 1.0
--------------------	--	--

Truelove, J.S.

“Discrete Ordinate Solution of the Radiation Transport Equation”

Journal of Heat Tranfer (1987), Vol. 109, p 1048-1051